

Vega-Castro, D., Castro, E., y Molina, M. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Comunicación presentada en Seminario del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico en el XIV simposio de la SEIEM (7-10 Septiembre 2010). Lérída.

SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO EN TAREAS QUE INVOLUCRAN IGUALDADES NOTABLES

Danellys Vega-Castro, Encarnación Castro, y Marta Molina
Universidad de Granada, España

Resumen

A raíz de las dificultades que presentan estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato cuando tienen que operar con igualdades notables, nos propusimos indagar sobre el sentido estructural que manifiestan un grupo de estudiantes de 1º de bachillerato al trabajar con expresiones algebraicas que involucran este tipo de igualdades. Con este objetivo pasamos una prueba escrita a 33 estudiantes de 1º de Bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de Granada. En los ítems de dicha prueba se propone a los estudiantes simplificar fracciones algebraicas y construir nuevas expresiones con la misma estructura que las dadas. Los resultados proporcionan información sobre el sentido estructural de los estudiantes y, en particular, sobre cómo y qué visualizan de las subestructuras que componen una expresión algebraica. Como educadores preocupados por el aprendizaje consideramos necesario que la enseñanza favorezca en los estudiantes la percepción de expresiones algebraicas desde un punto de vista estructural y en esa dirección esperamos realizar aportaciones con este trabajo.

Abstract

As a result of the difficulties that secondary students encounter when they have to operate with algebraic identities, we decided to explore their use of structure sense on their work on algebraic expressions that involve this type of equalities. With this aim, we proposed a written test to 33 sixteen to eighteen years old students from a high school in Granada. The test asked the students to simplify algebraic fractions and to build new expressions with the same structure than those given. Results provide information on the students' structural sense and, in particular, on how and what students visualize within an algebraic expression. As educators concerned about learning, we consider necessary that teaching promotes in students the perception of algebraic expressions from a structural point of view, and in that sense we expect this work to make a contribution.

Palabras clave: igualdades notables, sentido estructural, expresiones algebraicas.

Key words: algebraic identities, structural sense, algebraic expressions.

Introducción

Diferentes autores señalan las dificultades mostradas por estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato cuando trabajan con estructuras algebraicas que involucran igualdades notables. Así mismo los profesores de dichos cursos expresan que estudiantes con buenas calificaciones en matemáticas muestran dificultades al trabajar con expresiones algebraicas, y otros, incluso, abandonan las matemáticas avanzadas en los últimos cursos de la educación obligatoria debido a su falta de habilidad para aplicar las técnicas algebraicas en diferentes contextos (Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006, Novotná y Hoch, (2008). En particular las igualdades notables representan una temática de difícil comprensión en el desarrollo del álgebra básica para los estudiantes de estos niveles, quienes las ven como una barrera que limita sus estudios (Chang y Tsai 2005). Surge pues la necesidad de encontrar situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a superar estas dificultades.

Tomando como base dichas consideraciones nos planteamos como proyecto, a largo plazo, realizar un estudio sobre el aprendizaje de las igualdades notables centrado en la consideración de su estructura. Para tal fin, un primer paso en dicha investigación ha sido realizar un estudio exploratorio con el objetivo general de conocer el sentido estructural que muestran un grupo de alumnos de primer curso de bachillerato al trabajar con expresiones algebraicas en las que varias igualdades notables están presentes, implícita o explícitamente. Dicho trabajo ha consistido en transformar fracciones algebraicas en otras equivalentes de aspecto más simple, y en construir expresiones algebraicas de igual estructura que una dada.

Nuestra atención, por tanto, en esta investigación la hemos centrado en estudiar el sentido estructural de los estudiantes. Ello ha exigido revisar trabajos que han realizado aportaciones sobre este constructo. Los trabajos de Hoch y colaboradores (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006, 2007; 2010; Novotná y Hoch, 2008) han sido los más destacados. En ellos se reflexiona sobre las habilidades de los sujetos, fundamentalmente de secundaria, en el manejo de expresiones algebraicas y se llega a establecer qué entienden los autores citados por sentido estructural.

Estructura y sentido

La palabra estructura en matemáticas se utiliza en ocasiones para referir a un conjunto cerrado bajo una o varias operaciones, cumpliendo varios axiomas. Según Castro, Rico y Romero (1997, p.362) este término consiste en “un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes”. Desde un punto de vista más amplio, se puede decir que, en matemáticas, el término estructura se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004).

Por otra parte destacamos la noción de sentido. Peltier (2003) considera como aspecto relevante en la construcción del conocimiento que éste se realice con sentido, y emplea como apoyo la idea de que un conocimiento es portador de sentido para un sujeto si este último es capaz de identificar un campo de aplicación en el mismo. Esta concepción pedagógica del aprendizaje ha dado lugar a que se tengan en cuenta en la enseñanza y en la investigación constructos como sentido numérico (Sowder 1988), sentido operacional (Slavit, 1995, 1999), sentido simbólico (Arcavi, 1994), sentido estructural o de estructura (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Linchevski y Livneh, 1999; Novotná, Stehlikova y Hoch, 2006, Novotná y Hoch, 2008), entre otros. En todos estos casos se considera a los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos. Son términos asociados a una visión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas centrada en promover la comprensión de las matemáticas (Molina, 2006).

Sentido estructural

El término sentido estructural utilizado por vez primera por Linchevski y Livneh, (1999), se refiere, en términos generales, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permiten a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. A partir de la introducción de este constructo y su consideración en la enseñanza, los autores confían en el surgimiento de una nueva forma de afrontar la problemática de la enseñanza del álgebra. Novotná y Hoch (2008) han detectado cierta correlación entre el nivel de sentido estructural y la habilidad en la

manipulación de expresiones algebraicas puestos de manifiesto por los estudiantes. A mayor sentido estructural mayor habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas.

Descriptores de Sentido estructural

Los autores Hoch y Dreyfus han realizado un esfuerzo continuado por precisar la noción de sentido estructural. En 2004 y 2005 señalaron algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. Posteriormente en 2006, presentaron una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria. Según estos autores, un alumno muestra sentido estructural en dicho contexto si es capaz de:

- SS1** Reconocer una estructura familiar en su forma más simple,
- SS2** Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja,
- SS3** Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

En función de la complejidad de los términos que componen las expresiones con las que se esté trabajando, los autores subdividen los descriptores SS2 y SS3 en dos y tres subdescriptores respectivamente:

- SS2.a** El término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta
- SS2.b** El término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia
- SS3.a** La estructura está en su forma más simple
- SS3.b** La estructura incluye algún término compuesto que contiene un producto o potencia pero no una suma/resta

SS3.c La estructura incluye algún término compuesto que contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia

Lo que caracteriza a SS2.a, SS2.b, SS3.b. y SS3.c es la necesidad de tratar términos compuestos como si fueran una entidad.

Entendemos que este refinamiento en la precisión del constructo sentido estructural está basado en la consideración de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas, lo que lleva a los autores a no enfatizar otras habilidades como dividir una entidad en subestructuras y apreciar conexiones mutuas entre estructuras. En este trabajo queremos destacarlas como habilidades implícitas dentro del constructo sentido estructural, las cuales pueden ser medidas separadamente de los descriptores señalados por medio de tareas como la agrupación de expresiones según su misma estructura o la construcción de expresiones con estructura igual a otra dada. Por este motivo, hemos añadido un descriptor (**SS4**) a los anteriores: “Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas”.

Metodología

Esta investigación es de carácter exploratorio, descriptivo y cualitativo. Los sujetos que intervinieron en el estudio fueron un grupo de 33 alumnos de 1º de Bachillerato perteneciente a un Instituto de la ciudad de Granada.

En lo que se refiere al instrumento, al no contar con una prueba preparada y utilizada por otros investigadores para una investigación similar, nos planteamos construirla de manera que nos permitiese recoger la información necesaria para dar cumplimiento a nuestros objetivos de investigación. El diseño de la misma estuvo guiado por los descriptores de sentido estructural señalados anteriormente. Se elaboró en dos fases: una primera prueba que se sometió a pilotaje y una segunda versión definitiva.

La redacción final consta de cuatro tareas con cuatro ítems cada una. En el primer ítem (a) se pide al estudiante que modifique la expresión dada (una fracción algebraica) para obtener una expresión equivalente más sencilla. En el tercer ítem (c), se indica al estudiante que analice la expresión dada en esa misma tarea y construya otra expresión diferente con igual estructura. Los ítems (b) y (d), piden explicar lo hecho en los apartados previos.

La Tabla 1 muestra las fracciones algebraicas consideradas en cada tarea y precisan los descriptores del sentido estructural en los que se basan.

TAREA	Descriptores de sentido estructural						
	SS1	SS2		SS3			SS4
		a	b	a	b	c	
1. $\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$	X			X			X
2. $\frac{2m(2m-1)}{4m^2-2m^2}$		X			X		X
3. $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$		X			X		X
4. $\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^2+1+10a^2}$		X			X		X

Tabla 1. Relación entre descriptores del sentido estructural y parte (a) y (c) de las tareas.

Resultados

Dado que la prueba elaborada para la recogida de datos incluyó dos tipos de actividades de naturaleza diferente —simplificar y construir fracciones algebraicas—, las cuales requerían que los estudiantes pusiesen en juego distintas capacidades para su ejecución, realizamos de forma separada, y por medio de diferentes criterios, el análisis del desempeño de los estudiantes en los apartados (a) y (c) de las tareas. Los ítems (b) y (d) proporcionaron información adicional sobre cómo se han abordado los ítem anteriores.

Para el análisis de las actuaciones en el ítem (a) de las tareas, en el que los alumnos trabajan en la simplificación de las fracciones algebraicas, nos centramos en las estrategias que utilizan para hacer las transformaciones en las expresiones dadas. Para el análisis de las fracciones algebraicas construidas en el apartado (c), nos detuvimos en sus producciones, examinando la conservación de la estructura de las fracciones dadas.

Ítem (a) de las tareas

Analizadas las pruebas detectamos tres modelos de actuación de los estudiantes. El modelo A consta de dos pasos en la resolución de la tarea y conduce a estrategias exitosas. El modelo B consta de tres pasos y, conduce a estrategias exitosas pero menos elaboradas. El modelo C presenta diversos casos de resolución que no conducen a estrategias exitosas y que incluyen, en general, más de tres pasos.

Las diferentes estrategias, utilizadas por los estudiantes, fueron organizadas de acuerdo a estos modelos y clasificadas en estrategias exitosas “EE” o no exitosas “EQ”. A modo de ejemplo presentamos en la Tabla 2 las estrategias desarrolladas por los estudiantes en la Tarea 1. En ella se identificaron seis estrategias, cinco de ellas exitosas y una no exitosa. De las cinco estrategias exitosas tres corresponden al modelo A (color oscuro) y dos al modelo B (color claro).

Estrategias -Tarea 1 $\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$		Modifica P(x)		
		No	Sí	
Modifica Q(x)	No	No se considera	Aplica Factorización	Aplica Igualdad Notable. Percepción. 1-EE1
				Ruffini 1-EE2
				2º Grado 1-EE3
	Sí	Aplica Igualdad Notable. Desarrollo cuadrado de un binomio. Percepción 1-EE4 Agrupa Potencias. 1-EQ	Aplica Igualdad Notable. Factoriza y agrupa potencias Percepción. 1-EE5	

Tabla 2. Estrategias de la Tarea 1.

La diferencia que existe entre estas estrategias radica, principalmente, en cómo se obtiene la factorización del numerador y en si se hacen transformaciones en numerador y denominador o en sólo uno de estos miembros de la fracción. En la Ilustración 1 mostramos algunas respuestas de los estudiantes en la Tarea 1 que clasificamos por estrategias. El primer caso muestra la estrategia exitosa 1-EE1 basada en la percepción de la expresión y la aplicación de una igualdad notable. En el segundo caso el alumno utiliza una estrategia exitosa, aunque menos elaborada, denominada 1-EE2, basada en la aplicación del método de Ruffini a la expresión que compone el numerador. El tercer caso corresponde a una estrategia no exitosa (1-EQ) en la que el estudiante opera desarrollando numerador y denominador. En los resultados de este apartado se detectó que un 36% de los estudiantes presenta dificultades para transformar estructuras algebraicas simples, y que el 74% tienen dificultades para transformar estructuras algebraicas complejas. La Ilustración 1 es un ejemplo de las diversas formas de cómo trabajan los alumnos con una estructura simple.

1-EE1	Modelo A	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$												
1-EE2	Modelo B	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ <p><i>Ruffini</i></p> <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">1</td> <td style="padding-right: 5px;">-14</td> <td style="padding-right: 5px;">49</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">7</td> <td style="padding-right: 5px;">-49</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">0</td> <td style="padding-right: 5px;">0</td> <td></td> </tr> </table>	7	1	-14	49		7	-49			0	0	
7	1	-14	49											
	7	-49												
	0	0												
1-EQ	Modelo C	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x^2 + 2x + 1) \cdot (x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3} = \frac{x^2 + 14x + 49}{x^3(-7)^3 + 3x^2(-7) + 3x(-7)^2 + (-7)^3} = \frac{x^2 + 14x + 49}{x^3(-343) + 3x^2(-7) + 3x(49) - 343}$												

Ilustración 1. Modelos de actuación clasificados por estrategias en la Tarea 1.

Ítem (c) de las tareas

En el caso del ítem (c) de las cuatro tareas, analizamos las producciones de los estudiantes atendiendo a si mantienen la estructura de las fracciones dadas al construir las nuevas expresiones. Denominamos PE (producción exitosa) a aquellas expresiones que mantienen la estructura total de la fracción, es decir la estructura del numerador, del denominador y la relación existente entre ambos. Denotamos como PP (producciones parciales) a aquellas producciones en las que se mantiene sólo la estructura del numerador o del denominador o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas y como PQ (producción no exitosa) a las producciones que no mantienen la estructura ni del numerador ni del denominador.

En la Ilustración 2 se presentan algunos ejemplos de producciones de los alumnos en la Tarea 1. La primera producción muestra como el estudiante es consciente de que la expresión que compone el numerador proviene del desarrollo del binomio cuadrado que aparece en el denominador; percibe la estructura de la fracción como un todo. En el segundo caso la producción de este estudiante muestra reconocer y mantener la estructura del denominador; percibe solamente la estructura del denominador. El tercer caso trata de un estudiante que no conserva en su producción ninguna parte de la estructura de la expresión dada. En los resultados de este apartado se pudo detectar que 60% de los estudiantes no conservan la estructura de la fracción en su totalidad.

1. Producción Exitosa “PE”	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{(a-2)^2(a-2)} \Rightarrow \frac{a^2 - 4a + 4}{(a-2)^2(a-2)}$
2. Producción Parcial “PP”	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{a^2 - 10a + 36}{(a-8)^2(a-8)}$
3. Producción no Exitosa “PQ”	$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} \quad \frac{2a^2 - 28a + 98}{(2a-14)^2(2a-14)}$

Ilustración 2. Ejemplos de producción en la Tarea 1.

Niveles del Sentido Estructural

Una vez codificados los tipos de estrategias y producciones de cada estudiante en cada una de las tareas se construyó la Tabla 3, la cual presenta, en orden, las producciones de los estudiantes según las estrategias y tipos de producciones mostradas en su desempeño de las tareas. Cada número de esta tabla, del 1 al 33, corresponde a un alumno. Así mismo en la tabla aparecen dos columnas subdivididas en 4 sub-columnas, una por cada tarea. La primer columna corresponde al ítem (a) de las tareas y la segunda al ítem (c). En ambas columnas distinguimos varios niveles para cada tipo de actuación: nivel alto; medio-alto; medio; medio-bajo, bajo y nulo.

Si atendemos a la parte izquierda de la tabla, se puede observar que los primeros tres alumnos (Nº 4, 24, 32) muestran un sentido estructural alto, sus actuaciones están basadas en el modelo A. Los siguientes nueve estudiantes muestran un sentido estructural medio alto ya que han realizado actuaciones basadas en el modelo A en tres de las cuatro tareas, y así sucesivamente. De forma análoga se organiza la parte derecha de la tabla.

De acuerdo a los datos de la Tabla 3, se realizó una comparación en cuanto a la consistencia del sentido estructural mostrado por cada alumno, en ambos ítems de las tareas. Por ejemplo el alumno Nº 4 mostró ser consistente en cuanto al nivel de sentido estructural mostrado en ambas partes de la tarea, además mostró ser el único en poseer un sentido estructural alto tanto en estrategias como en las producciones. Otros alumnos muestran una consistencia parcial, como es el caso del Nº 7. Otros mostraron no consistencia, como por ejemplo el Nº 32 que muestra un sentido estructural alto en cuanto a estrategias y nulo en producciones.

	Nº	Estrategias				Nº	Producciones				
SS Alto	4				Q	4					SS Alto
	24				I	7					
	32				Q	20					
SS Medio Alto	12				I	23					SS Medio Alto
	30				I	25					
	14					29					
	8			Q	I	24					
	21			I	I	13					
	22		Q	Q		30					
SS Medio	23		I	Q	I	11					SS Medio
	18		I	Q		21					
	29	Q	Q	Q		33					
	7				I	5					
	5		I			8					
	11		I			14			--	--	
	27		Q		--	27			--	--	
SS Medio Bajo	9	I	Q	I		18			--	--	SS Medio Bajo
	17	I	I			17					
	33	Q	Q		--	31					
	28		I	Q	Q	19				--	
	6			Q		22					
SS Bajo	2		I	Q		10		--	--	--	SS Bajo
	19					15					
	20				--	9					
	10		Q			6				--	
	25		Q			1					
	31	Q	Q			3					
	13	Q	Q			16					
SS Bajo	26		I	Q		26					SS Nulo
	16		I			12				--	
	1		Q			28				--	
	3	I	Q			32			--	--	
	15	Q				2		--	--	--	

Tabla 3. Nivel de Sentido Estructural mostrado por cada alumno en partes (a) y (c) de las tareas.

Conclusiones

Esta investigación nos ha permitido estudiar la potencialidad de dos actividades cuyo desempeño por los alumnos proporcionan manifestaciones empíricas de su sentido estructural. Hemos diseñado una prueba que fue sometida a un proceso de pilotaje para su mejora. Una vez corregida y mejorada nos permitió detectar en los estudiantes estrategias al operar con expresiones algebraicas, en un caso, y formas de concebir y reproducir la

estructura de una expresión algebraica, en otro. Todo ello nos ha llevado a establecer diferentes niveles de sentido estructural en estos estudiantes concretos. Además la prueba ha permitido situar dos elementos significativos del sentido estructural como son la interpretación de la estructura de expresiones y la realización de transformaciones que preservan la equivalencia. Estos elementos se encuentran entre los que investigadores anteriores han considerado que afectan al sentido estructural.

La investigación ha hecho posible explicitar un descriptor diferente a los ya establecidos con anterioridad y corroborar que las igualdades notables han permitido fijar y acotar una temática sobre la que los estudiantes pueden trabajar en el estudio de su sentido estructural.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado dentro del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática (EDU2009-11337) financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER, con el apoyo otorgado a la primera autora por el Programa de Becas Doctorales que patrocina IFARHU-SENACYT (Instituto para la Formación y Aprovechamiento de Recursos Humanos - Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación) de la República de Panamá.

Referencias bibliográficas

- Castro, E., Rico, L., Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*. 15(3), 361-371. ISSN: 0212-4521.
- Chang, C. K. y Tsai, Y. L. (2005). An alternative Approach for the Learning of $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. The 3^{er} East Asia Regional Conference in Mathematics Education.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proc. 3rd Conf. for European Research in Mathematics Education* (compact disk). Bellaria, Italy: CERME.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3 (pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. 3, 145-152. Melbourne, Australia: PME.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. Submitted to *30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague: PME.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2007). Recognising an Algebraic Structure. Working Group 3. CERME 5. 436 - 435.
- Hoch, M. (2007). *Structure sense in high school algebra*. Unpublished doctoral dissertation, Tel Aviv University, Israel.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's Algebraic Structure Sense. Working Group 4. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010 www.inrp.fr/editions/cerme6 (pp. 529-538).
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Disponible en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF>
- Novotná, J., y Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.
- Peltier, M. (2003). Problemas Aritméticos. Articulación, significados y procedimiento de Resolución. *Educación Matemática*, 15(003), 29-55.