

Una introducción a la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria

Bolívar Alonso Ramírez Santamaría¹ & Reiman Yitsak Acuña Chacón²

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo reflejar la importancia de la combinatoria dentro de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, así como introducir a los y las docentes de Matemática que laboran en secundaria al conocimiento elemental de dicho contenido, por medio de actividades significativas elaboradas dentro de un taller pedagógico.

Palabras clave: Combinatoria, combinaciones, permutaciones, enseñanza, aprendizaje.

Modalidad: Taller.

1. Introducción

Dentro de la formación del docente en Matemáticas, las universidades estatales y privadas, se han encargado de elaborar programas de estudio que propician las competencias matemáticas y pedagógicas necesarias para que el educador se desenvuelva satisfactoriamente a nivel de secundaria. Fonseca (2009) agrega que

[...] las instituciones educativas tienen la misión y responsabilidad de usar su experiencia y conocimiento, así como su tradición y capacidad de innovación, en la formación de profesionales capaces de responder a las constantes demandas y cambios del mercado laboral y de la sociedad misma. (p.12)

En suma, Verdejo (2008) alude que las competencias en educación están en proporción a una creciente demanda social y de allí la necesidad de desarrollarlas en los diferentes procesos de formación del educador.

Con base en esto, los docentes deben estar en la capacidad de comprender aquellos contenidos que los programas de estudio vigentes demanden y, además, tener la disposición pedagógica de transmitirlos en forma adecuada al estudiantado.

¹ Universidad de Costa Rica. bolivar.ramirezsanamaria@ucr.ac.cr

² Universidad de Costa Rica. reiman.acunachacon@ucr.ac.cr

Sin embargo, existe un contenido en secundaria que no ha sido considerado para su enseñanza, a pesar de su importancia en la vida cotidiana y como herramienta útil en la resolución de problemas. Dicho tema corresponde a la Combinatoria, definida como la parte de las Matemáticas Discretas, cuyo objetivo es buscar estrategias y procedimientos para el recuento de los elementos de un conjunto o la forma de agrupar los elementos de un conjunto.

Por ello, de acuerdo con García, Hernández y Nevot (2003) se define el Análisis Combinatorio como la [...] *la técnica de saber cuántos elementos tiene un conjunto sin tener la necesidad de enumerarlos o contarlos todos uno por uno.* (p.168).

Ante este hecho, los educadores de Matemática en secundaria deben ser competentes para resolver los problemas más básicos de dicho contenido pues se asume que fue estudiado durante su formación universitaria. Sin embargo, ¿están los docentes capacitados para resolver problemas elementales de análisis combinatorio después de un largo tiempo de no tener un acercamiento a dicho contenido? Y de no ser así, ¿de qué manera se pueden reconstruir las estructuras cognitivas de análisis combinatorio en los docentes de Matemática de secundaria?

Estas interrogantes pueden ser contestadas mediante la experiencia y el acercamiento de las y los educadores por una serie de actividades que propicien un aprendizaje significativo. Los siguientes apartados muestran un esquema a los y las docentes para introducirlo al análisis combinatorio.

1I. Desarrollo

Importancia del Análisis Combinatorio

De acuerdo con López (2010) *Si el conocimiento surge como una mezcla de observaciones y razonamientos, la educación matemática debería permitir que el niño verifique lo que sucede en el mundo real, que intente formas alternativas de resolver los problemas, para que descubra así, que existen restricciones e imposibilidades.* (s.p.)

Con ello, el objetivo del análisis combinatorio es que el individuo indague y evalúe procedimientos de enumeración y de orden que le permitan descubrir una respuesta ante un problema dado. Así, por ejemplo, si se tiene una naranja, una manzana y una uva, ¿de cuántas

maneras se pueden **ordenar** éstas frutas? Con un procedimiento experimental se puede verificar que existen 6 maneras que se describen en la tabla siguiente:

Tabla N°1: Ordenamiento de Frutas.

1	Naranja, Manzana, Uva
2	Naranja, Uva, Manzana
3	Manzana, Naranja, Uva
4	Manzana, Uva, Naranja
5	Uva, Manzana, Naranja
6	Uva, Naranja, Manzana

Fuente: Elaboración Propia. 2011.

Por otro lado, si se desea **seleccionar** dos de esas tres frutas, con razonamientos experimentales se puede concluir que sólo existen 3 maneras diferentes, las cuales son:

Tabla N°2: Escoger dos de tres Frutas.

1	Naranja, Manzana
2	Uva, Naranja
3	Manzana, Uva

Fuente: Elaboración Propia. 2011.

En ambas circunstancias, los ejemplos mostrados introducen la **permutación** (ordenamiento de objetos) y la **combinación** (seleccionar una cantidad de objetos en forma arbitraria de una cantidad dada) respectivamente, que son principios básicos dentro la combinatoria. Otros ejemplos un poco más elaborados serían los siguientes³:

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 6 cuadros distintos sobre una pared?
2. Si usted dispone de cuatro cartas iguales, y se desean colocar en 5 sobres de diferente color y cada sobre sólo puede contener una carta ¿De cuántas formas se pueden colocar las cartas en los 5 sobre?
3. En una urna hay 4 bolas enumeradas con los dígitos 2, 4, 5, 8, y 2. Se extrae una bola de la urna y se anota su número. Sin devolver la bola extraída se elige una segunda bola y se anota

³ Sus respuestas no se abordarán.

su número; y así sucesivamente con las últimas dos bolas. ¿Cuántos números de cuatro cifras diferentes se puede obtener?

4. Considere el problema anterior. ¿Cuántos números diferentes de tres cifras se puede obtener?
5. Se quiere elegir un parlamento formado por tres miembros (presidente, tesorero y secretario). Si se disponen de 7 candidatos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los 7 candidatos?

Se puede apreciar que este tipo de problemas acercan más al sujeto con la realidad, la resolución de problemas y el pensamiento lógico no formal. En este sentido, de acuerdo con Batanero, Godino y Navarro (1996), la enseñanza de la combinatoria es importante ya que pueden emplearse para incentivar a los sujetos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización y el pensamiento formal. Además ayudar a desarrollar muchos conceptos como los de relación, aplicación y orden. Y no menos importante, su implementación en diversos campos por medio de la interdisciplinariedad.

De esta manera, la enseñanza y aprendizaje de la combinatoria debe ser un pilar en la educación Matemática, pues evoca el razonamiento y el pensamiento abstracto del individuo.

La enseñanza de la Combinatoria: Dificultades

A pesar de la evidencia en lo interesante, estratégico e importante del análisis combinatorio para las Matemáticas, en Costa Rica este contenido sólo posee relevancia en la Olimpiadas de Matemática y en distintos cursos de Probabilidad y Estadística impartidos por las universidades estatales y privadas. Más aún, si se revisan los Programas de Matemática (2005) para secundaria vigentes, se observa que la combinatoria no es parte de ningún objetivo.

Además, según Batanero et als (1996) la combinatoria [...] *se considera difícil por los profesores quienes, a veces, han preferido omitir su enseñanza.* (p.27). Esto permite justificar, en parte, que existe una aptitud de recelo y reproche sobre el contenido en cuestión. A pesar de que López (2010) exponga que la educación de calidad debería permitir el análisis de situaciones reales de la que surjan los conceptos académicos, el entendimiento o acercamiento del tema por parte del profesorado es indispensable, primero, para apreciar un contenido, y en el caso de la combinatoria, esto no es la excepción.

Entonces, ¿de qué manera el docente puede conocer la combinatoria sin qué resguarde rechazo hacia ésta? La respuesta planteada en este artículo es la elaboración de un taller pedagógico que invite a

los y las docentes a la creatividad, la iniciativa y la motivación por fundamentar la matemática con el contacto de objetos y fenómenos naturales, observables por el estudiante, fundados en los principios de la enumeración.

El Taller Pedagógico y la Combinatoria

Según el M.E.P., citado por Alfaro y Badilla (2009), el taller se conceptualiza de la manera siguiente:

[...] El taller es un espacio para hacer, para la construcción, para la comunicación y el intercambio de ideas y experiencias... es ante todo un espacio para escuchar, es ante todo, un espacio para acciones participativas. Utilización de diversidad de técnicas, elaboración de material y otros. Además puede concebirse como el espacio que propicia el trabajo cooperativo, en el que se aprende haciendo, junto a otras personas al tiempo que pone énfasis en el aprendizaje, mediante la práctica activa, en vez del aprendizaje pasivo (p.7).

De acuerdo con Alfaro et al (2009), el taller pedagógico se considera como una modalidad didáctica que permite compartir diferentes experiencias académicas, intercambiar criterios, conocimientos e ideas entre los participantes. Dentro de éste se permite realizar diversos ejercicios y actividades, que permitan un proceso de enseñanza y aprendizaje, y que deben ser previamente planificadas, de tal forma que los partícipes “aprendan haciendo” y construyan sus propios significados, lo cual conlleva a la validación de sus procesos cognitivos.

Es de relevancia aclarar que, según Alfaro et al (2009), *[...] los talleres pedagógicos deben planificarse, con la intención de que los participantes construyan el conocimiento, aprovechando para ello, el potencial académico y la experiencia adquirida en los diferentes contextos educativos, donde se desenvuelven. (p.8).*

Éstas características permiten intuir que el Taller Pedagógico es un modelo didáctico apropiada para una introducción al análisis combinatorio, ya que se pueden realizar, por medio de la resolución de problemas, experimentos que involucren razonamientos de índole combinatoria, partiendo de las estructuras cognitivas previas que posee el participante.

Etapas del Taller Pedagógico

De acuerdo con Alfaro et al (2009) el taller pedagógico debe cubrir al menos las siguientes etapas:

- Saludo y Bienvenida.

- Motivación.
- Desarrollo del tema.
- Recapitulación y Cierre.
- Evaluación.

Ajustando estas etapas al contenido de combinatoria; sumado al interés por acercar a los docentes de Matemática de Secundaria a dicho tema, se plantean los siguientes objetivos para el taller (están en función del participante):

- Operar con soltura factoriales y números combinatorios.
- Aplicar el principio de adición y de multiplicación como técnicas de combinatoria de una forma elemental.
- Comprender los conceptos de permutación y combinación, sin repetición y con repetición.
- Deducir la fórmula para calcular el número de permutaciones y combinaciones, sin repetición y con repetición, de cualquier orden.
- Resolver diferentes problemas utilizando permutaciones y combinaciones, sin repetición y con repetición y los principios de adición y multiplicación de forma elemental.

De esta manera, el taller en cuestión se realizará de la siguiente manera:

1. Actividades de Rutina: saludo inicial, presentación por parte de los expositores y guías de las actividades del taller, presentación de los partícipes y pasar una hoja de asistencia.
2. Motivación: se solicita que cuatro participantes del total pasen al frente en forma voluntaria. Los expositores facilitarán tres sombreros diferentes, y los colocarán sobre la cabeza de tres de ellos. El cuarto voluntario se le pedirá intercambiar los sombreros y determinar todas las maneras posibles de ordenarlos en las cabezas de sus compañeros. El público le puede ayudar con sugerencias.

Los expositores agregan un sombrero más y diferente a los ya dados, y solicita al cuarto voluntario que trate de determinar las posibles formas de seleccionar tres de los cuatro sombreros para ubicarlos sobre las cabeza de sus compañeros, sin importar el orden. Luego se hace lo mismo pero considerando el orden.

Se solicita el mismo experimento (con un voluntario menos), y esta vez debe determinar las posibles formas de escoger dos sombreros de los cuatro para ubicarlos sobre las cabezas de sus compañeros, sin importar el orden. Luego se hace lo mismo pero considerando el orden.

3. Desarrollo: IDEAS

- Explicación del factorial de un número natural.
 - Mediante experimentos con objetos diferentes (que los expositores proporcionaran) los partícipes deducen que el orden de n elementos distintos es en realidad $n!$.
 - Explicación de los arreglos. (escogencia ordenada de r objetos tomados de n distintos).
 - Mediante experimentos con objetos diferentes (que los expositores proporcionaran) los partícipes deducen escoger r objetos de n elementos distintos es en realidad $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.
 - Explicación de las combinaciones. (escoger de r objetos tomados de n distintos donde el orden no importa)
 - Mediante experimentos con objetos diferentes (que los expositores proporcionaran) los partícipes deducen que una combinación r objetos de n elementos distintos es en realidad $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.
4. Recapitulación y Cierre: se realizará una plenaria que le permitirá a los coordinadores de la actividad obtener conclusiones.
5. Evaluación: se realizará un examen de 5 preguntas donde se evalúen los conocimientos adquiridos.

Referencias y bibliografía

- Alfaro, A. y Badilla, M. (2009). *El taller pedagógico, una herramienta didáctica para abordar temas alusivos a la Educación Ciudadana*. Proyecto de investigación: Conceptualización y percepción de la Educación Cívica por parte de los docentes de Estudios Sociales y los y las estudiantes de décimo y undécimo años de la Enseñanza Media. San José, Vicerrectoría de Investigación, Universidad de Costa Rica.
- Fonseca, J. (2009). Conocimiento pedagógico del contenido en la formación de docentes matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 4(5). 11 – 27.
- García, F., Hernández, G., Nevot, A. (2003). *Problemas resueltos de Matemática Discreta. Paso a Paso*. Madrid: Ediciones Paraninfo.
- López, A. (2010, julio 21). La matemática y el mundo físico. *La Nación*. Recuperado el 24 de Octubre del 2011 en <http://www.nacion.com/2010-07-21/Opinion/Foro/Opinion2454471.aspx>
- Navarro, V., Bataner, Y. y Godino, D. (1996). Razonamiento Combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 8(1), 26 – 29.
- Verdejo, P. (2008). Modelo para la Educación y Evaluación por Competencias (MECO). En *Propuestas y acciones universitarias para la transformación de la educación superior en América Latina. Informe final del proyecto 6x4 UEALC*. Bogotá, Asociación Colombiana de Universidades. Recuperado el 16 de Octubre del 2011 en <http://www.6x4uealc.org/site2008/indice.htm>