HACIA UN MODELO COGNITIVO PARA EL APRENDIZAJE DE LOS FRACTALES GEOMÉTRICOS

Ximena Gutiérrez-Figueroa[1], Marcela Parraguez González[2]
Universidad de Chile[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: El presente estudio, considera a los fractales como un concepto asimilador para el aprendizaje de otros objetos presentes en el currículum escolar de Matemática. La motivación de fondo es la reinterpretación de la geometría a través de los fractales geométricos, complementando la cosmovisión euclidiana que caracteriza a los procesos de enseñanza. Se aborda entonces un desafío mayor, y es que los fractales no son parte de los conocimientos que el Ministerio de Educación, la sociedad y la cultura han definido como obligatorios para la enseñanza. Algunos elementos metodológicos que sutentaron la investigación, se fundamentan en los resultados de un estudio experimental sobre los conocimientos que construyeron nueve estudiantes de educación media (16 a 18 años), al abordar uno de los fractales más divulgados, -el Triángulo de Sierpinski-. Estos resultados permitieron la proyección de un modelo cognitivo sobre un conjunto de fractales geométricos, que orientan caminos de construcción viables para este tipo de conocimiento en niveles escolares.

Fractal geométrico, teoría APOE, modelo cognitivo

EL ÉNFASIS DE LA GEOMETRÍA EN EL CURRÍCULUM

Chevallard (2015), realiza un cuestionamiento sustantivo a los paradigmas imperantes en el tratamiento de la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria, donde se sigue replicando una concepción epistemológica del conocimiento, cuya finalidad es que el estudiante haga suyo, en el mejor de los casos, un cuerpo de conocimientos solo por el hecho de que la institución escolar y la tradición señalan que son dignos de alcanzar. Una postura más realista del autor, alude a revivir una Matemática vinculada también a las aplicaciones para ser remiradas y concebidas como una herramienta que aporta soluciones a la sociedad.

La evolución de las temáticas en el eje de geometría del currículum nacional se desarrollan desde los cursos de educación básica, inicialmente en relación a la comprensión de las formas, la caracterización y relaciones simples entre estas y su representaciones cartesianas. Continúa con la medición de perímetros, áreas y volúmenes y con movimientos rígidos de figuras en el plano (Ministerio de Educación, 2010). En el plan común de estudios, la mayoría de dichos aprendizajes se desarrollan en torno a la axiomática de Euclides, dejando para los cursos del plan diferenciado, algunas actividades que aluden a fractales (Ministerio de Educación, 2005). Se observa así, un cuerpo de conocimientos centrado en elementos conceptuales y rígidos, que en algunos casos se transfiere a contextos cotidianos a partir de la medición. La primacía de la geometría euclidiana, se puede considerar como un tema de estudio en sí mismo y no es parte de este trabajo, sin embargo, se sostiene que el potencial formativo de las estructuras fractales se sustenta en la exhibición de una geometría más cercana a la naturaleza, a los fenómenos sociales, a los biológicos y los económicos, entre otros, así la incorporación de este tema se basa en sus cualidades formativas e integradoras.

La reinterpretación de la geometría a través de los fractales geométricos, motivó a que este estudio se focalizara en el diseño de un modelo cognitivo, que sustentara los conceptos que emergen en la construcción de un conjunto de fractales geométricos y que a su vez, le otorgasen una nueva categoría a este concepto, como asimilador de otros conocimientos que son tratados en la escuela. Al ser un tema no contemplado en el currículum, se decidió abordarlo considerando los elementos conceptuales que lo originan y le otorgan sus características intrínsecas -la iteración y la autosimilutud a diferentes escalas-.

DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Con base en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) creada por Dubinsky (1991) y desarrollada por otros investigadores (Arnon et al., 2014), se diseña un modelo cognitivo o Descomposición Genética (DG) para el Triángulo de Sierpinski. Esta teoría nos proporciona una manera de describir el aprendizaje de este concepto matemático, a partir de estructuras que elabora el estudiante en su mente. Así, el concepto lo reconstruye a través de acciones, procesos, objetos y esquemas; y los mecanismos de interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación como medio para lograr dichas estructuras. Arnon et al. (2014) presentan la posible construcción de un nuevo estado, la Totalidad, que es concebida como una construcción intermedia entre Proceso y Objeto y se relacionaría principalmente con procesos infinitos o aquellos que involucran un gran número de pasos por la dificultad de concebir un proceso como un todo estático (Dubinsky 1987). La DG diseñada propone al fractal geométrico como una Totalidad.

Para dar cuenta de la viavilidad del modelo propuesto se trabajó con dos casos de estudio, con la finalidad de compreder en profundidad los fenómenos a partir de los estudiantes que elaboran conocimiento a partir de sus propias habilidades, experiencia y aprendizajes previos (Maykut y Morehouse, 1999). Las producciones de los estudiantes son sus escritos, que fueron piezas claves para el análisis y las interpretaciones que ellos muestran del objeto matemático en estudio.

Los casos de estudio

Se definieron dos casos de estudio: el Caso 1 del Triángulo de Sierpinski, y el Caso 2 de la Curva de Koch. Para el primer caso se consideraron los resultados obtenidos en la aplicación de una secuencia de aprendizaje para el Triángulo de Sierpinski (Gutiérrez-Figueroa, 2014), en la cual participaron nueve estudiantes de 4to año medio (16 a 18 años). Para el caso de la Curva de Koch, se realizaron mediciones iniciales, donde participaron diez estudiantes del mismo nivel educativo. La base del diseño fue orientada por el Ciclo de Investigación propio de APOE (ver Tabla 1).

Etapa	Descripción
Análisis teórico	Se realizó un estudio histórico-epistemológico; revisaron textos y artículos científicos sobre fractales en la Matemática, otras ciencias y como objeto de enseñanza. Este estudio dio origen a una DG para el Triángulo de Sierpinski.

Diseño e implementación de la instrucción	Se diseñó una secuencia de aprendizaje para la Curva de Koch, análoga a la elaborada para el Triángulo de Sierpinski y se realizaron mediciones iniciales.
Recolección y análisis de datos	Los análisis se basaron en la comparación con la DG y las semejanzas y diferencias que se observan en la producción de los estudiantes para ambos fractales.

Tabla1: Síntesis del diseño de investigación

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS DOS FRATALES GEOMÉTRICOS

En la Tabla 2 se muestra el trabajo de estudiantes, que fue interpretado a partir de estructuras mentales: acciones o procesos referidos a algunos conceptos claves para los fractales geométricos.

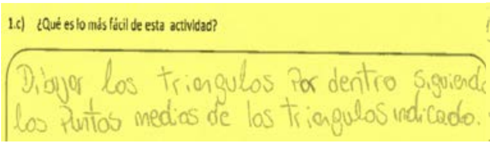
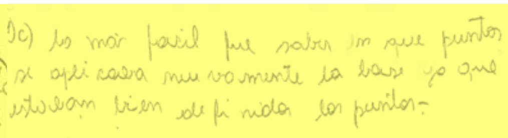
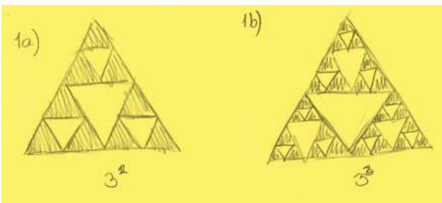
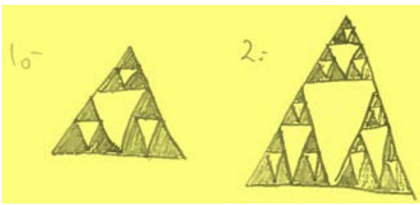
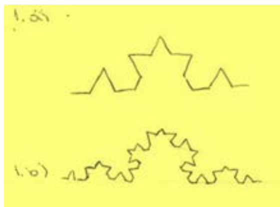
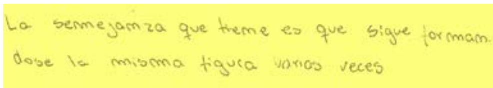
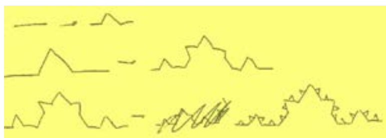
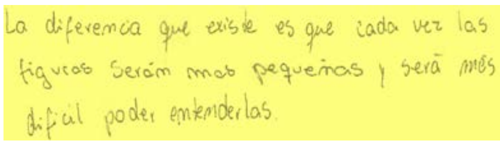
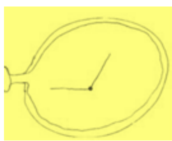
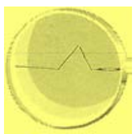
Construcción	T. de Sierpinski	C. de Koch
Acción sobre el Iniciador	 	
Proceso de Iteración	  	  
Proceso de Autosimilitud		  

Tabla 2. Construcciones mostradas por los estudiantes de ambos casos de estudio

Al contrastar las evidencias se observa que las estructuras mentales de la Curva de Koch, como Iteración y Autosimilitud, fueron de mayor dificultad para los estudiantes, lo que se debería a que el el Iniciador para el Triángulo de Sierpinski es una figura más habitual para ellos. Sin embargo, para el Caso 2, la poligonal cerrada es una estructura no tratada en la enseñanza, también puede estar inidiendo, el trazado de triángulos en distintas posiciones relativas, respecto de cada segmento de la curva.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Se sostiene la conjetura de que el tratamiento de la geometría euclidiana está interfiriendo en la construcción de las estructuras fractales. Esto se presentó en forma más evidente en la Curva de Koch, cuyo Iniciador es una poligonal abierta sobre la cual se define el proceso iterativo del fractal. En la Figura 1, se presenta la respuesta de un estudiante, para el caso 2, cuando se le pregunta ¿qué es lo más difícil de esta actividad?, en referencia a dibujar las etapas 3 y 4 de la curva de Koch. Este estudiante manifiesta que no se le ha dado instrucciones sobre cómo cerrar la figura, lo que desde la investigación se asocia al énfasis en el trabajo con polígonos en la etapa escolar por sobre otro tipo de figuras.

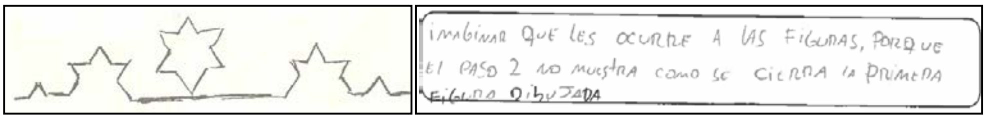


Figura 1. Construcción de la etapa 3 y su justificación por parte del estudiante.

Con base en las evidencias recopiladas de ambos casos, se sostiene que las componentes para un modelo cognitivo de los fractales geométricos serían: Acciones sobre objetos geométricos ya conocidos, como el tiángulo, las medianas, y las poligonales abiertas. Al interiorizar dichas acciones comprende a la figura como un estado inicial: el Iniciador, también interioriza la instrucción como una regla a modo de proceso, en este caso el Generador. Ambos se coordinan para construir la Iteración y la Autosimilitud como nuevos procesos para la construcción de las Imágenes fractales. La investigación continúa y la etapa que sigue es la implementación de la secuencia en base a los dos fractales señalados en estudiantes de educación básica y la definición de un tercer caso para ajustar aun más las componentes que describen el modelo de aprendizaje de los fractales geométricos.

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer-Verlag.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. *In The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer International Publishing.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1987). Anatomy of a question. *The Journal of Mathematical Behavior*, *6,* 363– 365.

Gutiérrez-Figueroa, X. (2014). *Una descomposición genética del fractal triángulo de Sierpinski* Tesis de Magíster no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Maykut, P., & Morehouse, R. (1999). *Investigación cualitativa, una guía práctica y filosófica*. Barcelona: Editorial Nurtado.

Ministerio de Educación. (2010). *Mapa de progreso del aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría*. Santiago: Autor.

Ministerio de Educación. (2005). Matemática. Formación Diferenciada Humanístico-Científica. En *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media*. Actualización 2005 (pp. 237-240). Santiago, Chile: Autor.