

## UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR LA NOCIÓN DE LA SUMA DE RIEMANN

Mihály André Martínez Miraval, Daysi Julissa García Cuéllar  
Pontificia Universidad Católica del Perú

*Resumen: La investigación presenta el estudio de una situación didáctica desarrollada por estudiantes universitarios, mediada por el GeoGebra, para introducir la noción de suma de Riemann a partir de la suma de áreas de rectángulos. La comparación entre los análisis a priori y a posteriori evidenció que se redujeron las dificultades para plantear la suma de áreas de rectángulos, cuando se introdujo notaciones simbólicas.*

Situación didáctica, área, suma de Riemann, geogebra, deslizadores

### INTRODUCCIÓN

La relación entre el concepto de área y de integral definida se presenta en cualquier curso o libro de Cálculo integral. En nuestra práctica docente, en una universidad de Lima, no se propone al estudiante actividades de inducción sobre la noción de área de una región que le permita emplear conceptos conocidos como funciones, intervalos, áreas de rectángulos, sumatorias, límites, etc., y se pierde con ello la oportunidad de que el estudiante adquiera un nuevo concepto, a partir de sus conocimientos previos.

Las investigaciones reportan diversas dificultades que resulta al construir el concepto de área, y muchas de ellas citan el trabajo de Freudenthal (1999), que presenta diferentes enfoques para su construcción, de ahí su complejidad. En nuestra investigación, hemos trabajado con el enfoque por medición mediante un proceso de acotación, que se caracteriza por el uso de unidades cada vez más pequeñas, inscritas y/o circunscritas a la región que generan una aproximación a la medida del área por defecto y por exceso respectivamente.

La situación didáctica que planteamos propone definir el área como el límite de una suma de Riemann, pero en este trabajo que presentamos nos hemos centrado en el análisis de las respuestas de los estudiantes de una de las actividades propuestas, en la cual se pretende introducir al estudiante en el planteamiento de una suma de términos, expresados simbólicamente, y reducidos utilizando la notación sigma.

Por lo mencionado anteriormente, hemos diseñado una propuesta didáctica tomando como marco teórico a la Teoría de las Situaciones Didácticas, porque busca, a partir de la interacción entre el estudiante, el saber y el medio, que el aprendizaje se logre (Brousseau, 2007).

Para diseñar la secuencia didáctica, que tiene como objetivo que los estudiantes adapten a su aprendizaje un procedimiento de aproximación con rectángulos que les permita aproximar el área de una región tanto como lo deseen y representen dicha aproximación simbólicamente utilizando sumatorias, hemos tomado en cuenta ciertos análisis preliminares referidos al objeto matemático área, y el análisis lo hemos hecho contrastando lo que nosotros esperábamos que los estudiantes contesten a las preguntas, presentes dificultades en algunos procesos, etc., y lo que ellos presentaron como producto al final de la experimentación. Por ese motivo, hemos elegido algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica como nuestro marco

metodológico, por ser, en palabras de Artigue (1995), un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Nosotros hemos diseñado *applets* en Geogebra basados en deslizadores, para que el estudiante centre su mirada en la interpretación de resultados y no en la complejidad de los cálculos, y sí buscamos que el estudiante realice un planteamiento con sumatorias. El uso de la tecnología al trabajar conceptos que involucran a la geometría dinámica, como derivadas, integrales, áreas, límites, etc., en particular el uso del Geogebra, es importante ya que, desde el punto de vista de Amorin et al. (2011), permite que el estudiante valide sus hipótesis, y argumente o cuestione sus ideas o de sus compañeros.

### **Problemática**

El concepto de área se trabaja en todos los niveles educativos: primaria, secundaria y universitario. En la etapa escolar, para definir el concepto de área, se emplean métodos de subdivisión finita, pero no se realiza un proceso de refinamiento infinito como los que se esperaría que se realicen en una etapa superior. Del mismo modo, la integral definida se presenta en los libros de texto de cálculo integral (Stewart, 2001) asociada al concepto de área, es decir, como el límite de una suma de Riemann, sin embargo, no se presentan actividades para que el estudiante construya la definición, y se presenta a la integral definida, tanto en los libros como en la clase teórica, como una técnica que permite solucionar el problema de calcular el área de una región no lineal.

Centrando la atención en el planteamiento de la suma de Riemann, se observan dificultades para representar las alturas de los rectángulos dadas gráficamente, en su forma algebraica, como imagen de la función en uno de los extremos de su base. En palabras de Artigue (1998), estas dificultades resultan de los procesos de traducción de un registro semiótico a otro, especialmente las dificultades de traducción del registro gráfico al registro algebraico.

Nosotros proponemos utilizar el enfoque por medición bajo un proceso de acotación, de modo que el estudiante exprese la suma de áreas de rectángulos de forma numérica, en un momento de la actividad, y luego, en otro momento, exprese dicha suma a partir de las imágenes de la función, de forma simbólica, y la reduzca usando la notación sigma.

### **MARCO TEÓRICO**

Para el presente estudio, tomamos como referencial teórico a la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, por la manera cómo concibe el proceso de enseñanza - aprendizaje en la educación, en la que el aprendizaje del estudiante se debe dar a partir de las interacciones entre el medio y el saber en juego.

El investigador llama *medio* a un sistema diseñado por el profesor con el fin de hacer reflexionar al estudiante sobre su aprendizaje. La respuesta dada por el medio hace que el estudiante refuerce el conocimiento nuevo adquirido, o que modifique su procedimiento si el resultado dado no es coherente. Este medio es organizado a partir de la selección de *variables didácticas*, las cuales al cambiar de valor generan en los estudiantes cambios en sus estrategias consideradas como óptimas.

Las situaciones son construidas por el profesor para proporcionar al estudiante las condiciones propicias para la adquisición del saber, en las que la intención de enseñar no es revelada al estudiante son llamadas *situaciones a-didácticas* (Brousseau, 2007). En cada una de ellas, la relación entre el estudiante y el saber es distinta. La fase a-didácticas son tres: Fase de acción, Fase de formulación y la Fase de validación. En el desarrollo de las tareas de nuestra investigación, se aprecia la fase de acción al reconocer el funcionamiento de los deslizadores, al manipularlos de forma exploratoria, y junto con sus conocimientos previos actuar sobre el medio. La fase de formulación se aprecia en el intercambio de información sobre cómo hallar la medida de las bases, y cómo expresar las alturas de los rectángulos como la imagen de una función. Finalmente, la fase de validación se observa, luego de cambiar la variable didáctica e introducir la notación simbólica, al validar una expresión que represente a la aproximación del área realizada.

## ANÁLISIS

La situación didáctica que se propuso fue la de delimitar la sala y el comedor de una casa con una curva diseñada por los deslizadores  $a$  y  $b$ . Con el deslizador  $n$  se colocaron losetas rectangulares de igual base, inscritas y circunscritas al comedor, y con el punto móvil  $P$  se hallaron las alturas. A continuación presentamos las respuestas de uno de los cinco estudiantes con los que se trabajó.

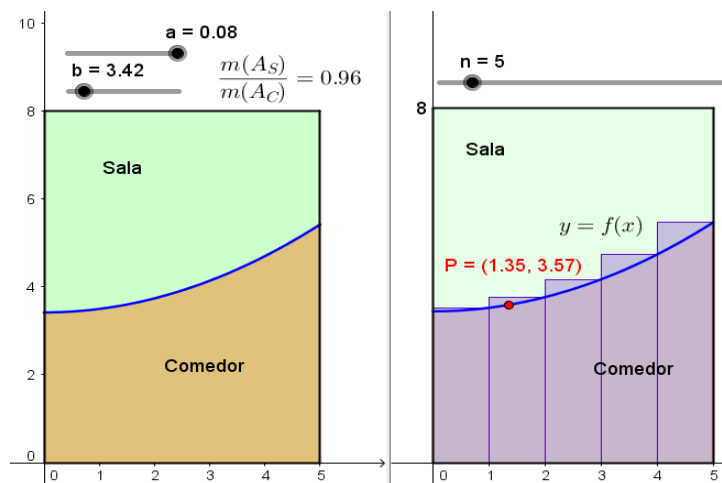


Figura 1: Applet en Geogebra

En una de las tareas de la actividad el estudiante debía hallar las alturas y las áreas de un número determinado de rectángulos. Cuando trabajó con 5 rectángulos no tuvo problemas; debido a que las bases medían 1u y las alturas eran iguales a la imagen de la función evaluada en un número natural. Al modificar la variable didáctica *número de rectángulos de aproximación* y colocarlo en 10, halló bien las alturas pero trabajó con base 1u en vez de 0,5u. Para 80 rectángulos, el estudiante señaló que no pudo hacerlo porque le parecía muy difícil.

En otra de las tareas, el estudiante ya no contaba con el valor numérico de las alturas; ahora contaba con la imagen, por ejemplo,  $P(2; f(2))$ . Se esperaba que no presente dificultades al determinar la altura de cada rectángulo, y por consiguiente al plantear la adición de términos. Sin embargo, no consideró el último término de la suma que era  $0,06 f(5)$ .

$$0,06 (f(0,06) + 0,06 (f(0,12) + 0,06 (f(0,18) + 0,06 (f(0,24) + \dots \text{ hasta } 80. \\ 0,06 (f(4,8).$$

Figura 2: Planteamiento de la suma de áreas de 80 rectángulos

Finalmente, en una última tarea, se trató de ver la viabilidad de reemplazar los valores numéricos generados por la partición del intervalo por símbolos como  $x_0$ ;  $x_1$ ;  $x_2$  y  $x_3$ , de modo que se facilite el planteo de la suma de términos y su reducción simbólica; con el objetivo de plantear, en otra situación, el límite a dicha suma cuando el número de rectángulos tiende al infinito. La respuesta del estudiante se muestra en la figura.

$$b f(x_1) + b f(x_2) + b f(x_3) + \dots + b f(x_{80}) \\ S = \sum_{i=1}^{80} b \times f(x_i) = 22,206 m^2$$

Figura 3: Representación reducida de la suma de términos

Apreciamos que luego de introducir la notación simbólica, el estudiante fue capaz de expresar correctamente la suma de los 80 términos de forma reducida. Por ello decimos que alcanzó las fases de acción, formulación y validación propias de la teoría de situaciones didácticas.

### CONSIDERACIONES FINALES

Observamos que inicialmente el estudiante no fue capaz de hallar la suma de áreas de rectángulos cuando el número era grande, por más que contaba con las alturas de los rectángulos de forma numérica; estas dificultades fueron cambiando a medida que el estudiante ya no tenía que calcular la altura, sino expresarla como imagen. Al final, al trabajar exclusivamente con símbolos, el estudiante logró su objetivo. Esto nos hace pensar que para introducir valores genéricos en la partición del intervalo, el estudiante debe pasar por un proceso de cambio de representación, es decir, de número a una expresión simbólica. Esto facilitaría el planteamiento de la suma de Riemann, con miras a definir el área como el límite de dicha suma.

### Referencias

- Amorim, F. V., Costa de Sousa, G. y Salazar, J. V. (2011). Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado de: <http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/1649.pdf>
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

- Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y cambios curriculares?* Vol. 1, pp. 40-55. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Stewart, J (2001). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. México, D. F.: Thomson Editores.