Uso de Tecnología para Modelar Diversas Soluciones de un Problema de Probabilidad

Marco Vinicio Gutiérrez Montenegro[1]

Natalia Rodríguez Granados [2]

Resumen

En la propuesta siguiente se muestran algunas soluciones referentes a un problema relacionado con la probabilidad de un evento, y al mismo tiempo se emplean herramientas tecnológicas para modelar las diversas soluciones encontradas.

Palabras clave: Probabilidad, Evento, Simulación.

Modalidad: Ponencia

1. Introducción

En la actualidad la tecnología computacional ayuda a los estudiantes a comprender conceptos difíciles en las Matemáticas y en particular en el área de la probabilidad. Un ejemplo de ello es por medio de la simulación, permitiéndole al estudiante comprender conceptos y principios de la probabilidad de un evento contribuyendo con ello a mejorar la experiencia y compresión de los métodos de solución empleados para la resolución de un problema de probabilidad.

Considerarando lo anterior, en el presente trabajo se proponen diversas soluciones para un problema de probabilidad, y se complementa con el empleo de tecnologías computacionales para visualizar las diversas soluciones encontradas.

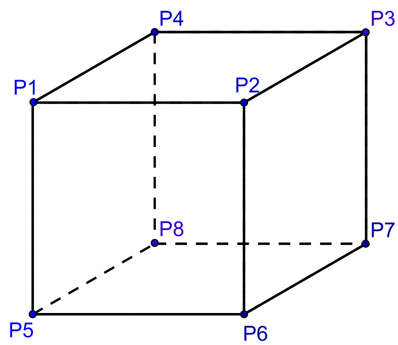
2. Propuestas de soluciones al problema

Se propone a continuación una de las soluciones encontradas al siguiente problema:

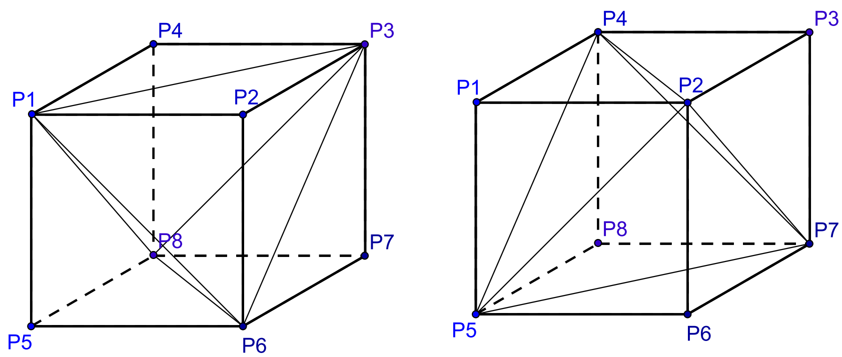
[1]Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. vgutierrez@itcr.ac.cr

[2]Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. nrodriguez@itcr.ac.cr

"Se tiene un cubo y en cada una de sus ocho esquinas hay una pulga. En un momento dado, cada pulga brinca al azar a una de las esquinas opuestas a al esquina en la que se encuentra. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las esquinas queden ocupadas por al menos una pulga?"



Para el análisis del problema se puede notar que las pulgas que se encuentran en las esquinas $P1, P3, P6$ y $P8$ solo se pueden mover en esas posiciones; en forma similar sucede con las que se encuentran en las esquinas $P2, P4, P5$ y $P7$.

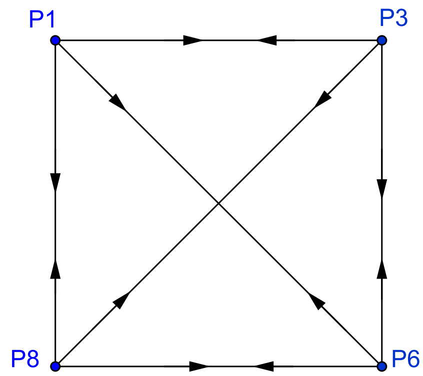


De acuerdo a esta primera idea gráfica se puede asegurar que existen dos eventos independientes, pues si se toma un circuito donde se mueve un conjuntos de las pulgas no dependerá del "circuito" donde se muevan las demás.

Representando uno de los "circuitos" por medio de un grafo dirigido, donde cada uno de los nodos representa uno de los vértices del cubo en el circuito.

De acuerdo con cada una de las posiciones y hacia donde se pueden dirigir se tienen los casos siguientes:

$$(P1; P3, P6, P8), \ (P3; P1, P6, P8), \ (P6; P8, P3, P1) \text{ y } (P8; P3, P6, P1)$$



Analizando el número de casos en que ninguna esquina quede vacía al saltar las pulgas se tiene:

E_1: la esquina 1 no quede vacía
E_2: la esquina 3 no quede vacía
E_3: la esquina 6 no quede vacía
E_4: la esquina 8 no quede vacía

Luego, se busca que $|E1 \cap E2 \cap E3 \cap E_4|$. Analizando el complemento tenemos:

$|E1 \cap E2 \cap E3 \cap E_4|$

$= |U| - \left|\overline{E1 \cap E2 \cap E3 \cap E_4}\right|$

$= |U| - \left|\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \overline{E_3} \cup \overline{E_4}\right|$

$= |U| - \left[4|\overline{E_1}| - C(4,2)|\overline{E_1} \cap \overline{E_2}| + C(4,3)|\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}| - C(4,4)|\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4}|\right]$

Además, $|U| = 3^4 = 81$, $|\overline{E_1}| = 2^3 \cdot 3 = 24$, donde 2^3 representa tres pulgas ubicadas solo en dos esquinas, y 3, la pulga que está en $P1$ tiene tres esquinas.

También $|\overline{E_1} \cap \overline{E_2}| = 2^2 = 4$. Note que $|\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}|$ y $|\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4}|$ no se pueden dar, pues al menos una pulga quedaría sin poder desplazarse. Entonces:

$$\begin{aligned} |E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4| &= 81 - [4 \cdot 24 - 6 \cdot 4 + 0 - 0] \\ &= 81 - 96 + 24 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Ahora, si A es el evento para las cuales las esquinas $1,3,6$ y 8 no queden vacías es $P(A) = \frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}$.

En forma análoga, si B es el evento para las cuales las esquinas $2,4,5$ y 7 no queden vacías es $P(B) = \frac{9}{3^4} = \frac{1}{9}$.

Como los eventos son independientes, entonces si definimos el evento E como aquel donde ninguna esquina del cubo quede vacía, entonces $P(E) = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{81}$.

3. Simulaciones

Para realizar la simulación de la solución del problema, se procurará el uso del software geometría dinámica GeoGebra.

4. Referencia

Este problema es una adaptación al problema No 1 de la XIII Olimpiada Matemática de Centroamericana y El Caribe realizada en la ciudad de Colima, Colima, México, entre los días 16 y 26 de junio de 2011.