

Enseñanza del concepto función a través del uso de gráficos

Daniel Mena González¹, Luis Rojas Torres² & Ana Vindas Alfaro³

Resumen

En este trabajo se presenta un método de cómo enseñar el concepto de función haciendo uso de las situaciones cercanas a los estudiantes de los colegios del área urbana del cantón de Desamparados y utilizando como estrategia, la presentación de las características que definen a las funciones vía gráficos lineales o de barras.

Palabras Claves: Gráficos, función, situaciones del entorno

Modalidad: Ponencia

Introducción

En el presente trabajo se presentará un enfoque de cómo poder enseñar el concepto de función, de una manera distinta a la tradicionalmente aplicada en la educación costarricense, de sencillamente dar el concepto mediante diagramas de Venn (Castro, Mena, Pineda, Rojas, Valverde y Vindas, 2011)

El desarrollo del estudio se basó en la tesis elaborada por Castro *et al*, para obtener el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, la cual lleva por título “Unidad didáctica para la enseñanza del tema de funciones en secundaria, a través de situaciones del entorno” En particular para este trabajo se decidió ahondar en la sección dedicada a la introducción del concepto de función, ya que no solo presentó la novedad de utilizar las situaciones reales del entorno de un grupo de estudiantes, sino que también innovó al hacer uso de los gráficos para la introducción de este concepto.

Para esto, primero se presentará una parte teórica que justifica la utilización del método elegido, para luego proceder a la presentación detallada de cómo poder introducir el concepto de función vía gráficos de situaciones cercanas a los estudiantes.

Referente teórico

En esta sección se desarrollarán varios argumentos teóricos que dan justificación a la elaboración de este trabajo. Primero se hablará sobre la dificultad del aprendizaje del concepto de función y posteriormente se discutirá la importancia de la utilización de las situaciones del entorno y los conocimientos previos en la enseñanza.

¹ Daniel Mena González: Docente de la Universidad de Costa Rica y educación secundaria. Email: daniel.menagonzalez@ucr.ac.cr

² Luis Rojas Torres: Docente investigador del Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad de Costa Rica. Email: luismiguel.rojas@ucr.ac.cr

³ Ana Vindas Alfaro: Docente del Ministerio de Educación Pública. Email: anataz84@gmail.com

Dificultad en la enseñanza del concepto de función

La educación costarricense ha presentado en los últimos años una problemática en torno a la enseñanza de las funciones, ante esto, Vílchez y Ulate (2006, p.3) dicen que “el tema de funciones presenta serias dificultades cognitivas en los estudiantes de la educación secundaria en Costa Rica, lo cual está claramente reflejado en las estadísticas del Departamento de Control de Calidad del Ministerio de Educación Pública, que muestran las altas tasas de fracaso escolar en los ítemes de las pruebas nacionales de bachillerato, relacionados con este tema.”

En las estadísticas de los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas de Bachillerato del 2008 se aprecia que en ninguna de las modalidades educativas ofrecidas por el MEP se alcanza el 51% de aciertos (Ministerio de Educación Pública, 2008). Estos resultados reflejan que la población de secundaria costarricense no está dominando ni la mitad de los contenidos de funciones que se abarcan en el programa de educación diversificada.

Duarte (1991), desarrolla un estudio en el cual expone como los alumnos costarricenses no están comprendiendo el concepto de función, y menciona que entre las razones de esta problemática se encuentran: el abuso de terminología en su enseñanza y su presentación como un concepto antinatural y poco útil.

De igual manera, Díaz (2000) también menciona que el aprendizaje del concepto de función presenta grandes problemáticas en el estudiantado, entre las cuales menciona al carácter complejo y general de este, también menciona la gran cantidad de representaciones que hay para este concepto y la variedad de conocimientos matemáticos que interactúan con las funciones.

Ante estas dificultades es que se creyó importante considerar el uso de las situaciones del entorno para la enseñanza del concepto de función, ya que así se vería a las funciones de una forma natural, útil y menos compleja.

Importancia de la utilización de las situaciones del entorno

La utilización de las situaciones del entorno en la enseñanza secundaria es muy poco frecuente en las aulas de matemática, pero en los últimos años su incorporación está tomando gran interés por parte de los expertos, la prueba PISA es una de las estrategias que se ha implementado en variedad de países a nivel mundial.

Se hace mención que “la finalidad de esta evaluación se centra en conocer cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no solo, ni principalmente, en conocer qué contenidos del currículo han aprendido” (OCDE 2004 citado por INECSE 2005, p. 13).

Este tipo de pruebas se ha implementado con el fin de comprobar que los estudiantes realmente puedan utilizar los conocimientos que están adquiriendo en las aulas en la solución de problemas que encuentran fuera de ellas.

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Además OCDE e INECSE (2004) enfatizan que, dentro de las competencias matemáticas, uno de los aspectos más importantes es poder utilizar los conocimientos adquiridos para resolver la mayor cantidad de situaciones problema posibles, tratando de hacer que los estudiantes se concentren en analizar las situaciones y traten de modelar una posible situación utilizando las herramientas que la Matemática les ofrece.

La importancia de la utilización de las situaciones del contexto radica en que la resolución de problemas es considerada la herramienta que permite comprobar que los estudiantes se han apoderado realmente del conocimiento, Schoenfeld (1992) menciona que un estudiante cuantitativamente alfabetizado es capaz de interpretar datos de su contexto, analizar y solucionar situaciones diarias, con criticidad y finalmente emitir un juicio acertado, pasando así de repetir fórmulas y procedimientos, a crearlos.

Por otro lado también se menciona “No: primero hacer las matemáticas y después regresar al mundo real, sino el mundo real primero, y después la matematización.” (Freudental citado por Planchart, 2003, p. 4).

Lo que propone que cada tema o contenido que se pretende introducir a los estudiantes debería iniciar con una situación del contexto a solucionar, y solo a partir de esa resolución el docente podría formalizar los contenidos y no al revés como ha sido por generaciones.

Uso de los conocimientos previos en la enseñanza

Los conocimientos previos en el abordaje del tema funciones y en general en la enseñanza de la Matemática son indispensables. Específicamente en el tema funciones, podemos introducir los contenidos siempre partiendo y utilizando prácticamente sólo conocimientos previos, el valor numérico, la resolución de ecuaciones, la factorización.

Algunas veces, aunque los estudiantes cuenten con conocimientos previos suficientes para comprender los nuevos contenidos, la falta de relación evidente entre unos y otros hace que el hecho de poseerlos no sea suficiente, como lo mencionan:

“que los alumnos pongan en juego los conocimientos necesarios en el momento adecuado puede depender del número de factores. En ocasiones, la no disponibilidad puede ser tan sólo un problema transitorio de falta de atención. A veces, el hecho de que los alumnos no actualicen sus conocimientos previos puede ser debido a la falta de sentido que atribuyen a la actividad”. Cool, Martin, Mauti, Miras y otros (1994, p.3)

Por lo que aunado a la utilización de los conocimientos previos, es necesario utilizar una metodología motivadora y que establezca una forma clara de relacionar lo que conocen con el nuevo conocimiento.

Una de estas herramientas en la interpretación de datos y funciones son los gráficos, puesto que constituyen una de las formas de representación de las funciones que proporciona información valiosa sobre diversos elementos de las mismas (dominio, ámbito, relación de preimagen e imagen, régimen de variación, intersecciones con los ejes, entre otros), además de ser familiares para los estudiantes.

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Dolores y Cuevas (2007) desarrollaron una investigación enfocada a determinar si los estudiantes de primaria y secundaria se encuentran capacitados para analizar e interpretar gráficos que se presentan cotidianamente en diversos medios y los cuales proporcionan información sobre aspectos políticos, económicos, sociales, y muchos otros más. Esto es “Nos planteamos una pregunta esencial: si la escuela, como se dice, prepara para la vida, en la vida diaria los individuos encontrarán seguramente gráficas que interpretar ¿Estarán en condiciones de leerlas e interpretarlas adecuadamente?” (2007, p.73)

Esto hace que la memorización tanto de datos como de información en general se facilite, logrando separar lo fundamental de lo innecesario.

Metodología

Esta sección expone la metodología utilizada para la elaboración de este trabajo, desde la muestra y los instrumentos de recolección de información, hasta los resultados conseguidos por los mismos.

Muestra

La muestra que se seleccionó consta de una sección en cada uno de seis centros educativos de San José, en el circuito 02 de la región de Desamparados; las cuales varían entre modalidades públicas, subvencionadas y técnicas.

Las instituciones consideradas son las siguientes:

- Liceo Monseñor Rubén Odio Herrera
- Colegio de Gravilias
- Liceo San Miguel
- Liceo San Antonio
- Colegio Vocacional Monseñor Sanabria
- Colegio Nuestra Señora de los Desamparados.

Recolección de la información

A los estudiantes de las secciones seleccionadas se les aplicó un cuestionario que les solicitó información sobre sus intereses tanto profesionales como en actividades recreativas.

Además se realizó una observación de dos lecciones a cada sección, donde se le dio prioridad a la metodología y a los materiales utilizados por el docente, con el fin de

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

determinar si se emplean las situaciones del entorno en la enseñanza de funciones y de ser así, cómo es que lo hacen.

Para complementar la observación realizada, se les pidió a los docentes que respondieran una entrevista, en donde se les consultó, entre otros aspectos, sobre qué estrategias conocen o utilizan para enseñar el tema funciones, además de las empleadas precisamente ese día, además de la dificultad del tema funciones tanto para el aprendizaje de los estudiantes, como para la enseñanza.

Resultados obtenidos

- Dificultad del tema: la dificultad en el tema funciones radica, según los docentes, en la poca aplicabilidad que le encuentran los estudiantes a los contenidos en general, puesto que pocas veces logran relacionarlos con algo que tengan en su contexto, además de la gran gama de conocimientos previos que necesitan dominar para comprender correctamente los nuevos conceptos.
- Intereses de los estudiantes: en forma general los intereses recreativos de los estudiantes se centraron en las actividades que tienen que ver con salir y con la música, aunque específicamente en el caso de los hombres las actividades recreativas de mayor interés son las relacionadas con el deporte.

Por otro lado en los intereses profesionales los estudiantes externaron tener preferencia por el área de la salud, las mujeres y por las ingenierías los hombres. Y en relación a una tercera consulta sobre otros temas, lo jóvenes en general dijeron tener gran interés por la tecnología, más que por la moda, la apariencia física y el medio ambiente.

- Importancia del contexto: los docentes estuvieron de acuerdo, casi en su totalidad, en que el contexto está estrechamente ligado con las funciones, y reconocen que aunque el plan de estudios propuesto por el Ministerio de Educación Pública mantiene, en la mayoría de objetivos, la importancia de la relación de la cultura sistematizada en el desarrollo de las lecciones, es prácticamente imposible, al menos para ellos, mantener clara esa relación, tanto por el poco tiempo con el que cuentan para desarrollar el plan completo, como para el construir un planeamiento adecuado.
- Metodologías: la mayoría de docentes reconocieron como nuevas metodologías la implementación de software educativo y aunque aseguraron estar conformes con los resultados obtenidos con las que utilizan (en la mayoría la clase magistral o preguntas y respuestas) reconocen que si contaran con las condiciones necesarias utilizarían otras.

Desarrollo del método

En esta parte del artículo se presenta propiamente el detalle de cómo introducir el concepto de función mediante gráficos de barras, para esto se consideró como necesario primero la presentación del concepto de variable, ya que las funciones son una

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

particularidad de una relación entre variables, posterior a esto se procedió a discutir las relaciones entre variables, para finalmente definir lo que es una función.

Variable

El primer paso que se consideró para la elaboración de una unidad didáctica que persiga la introducción del concepto de función, fue la utilización del concepto estudiado en primaria conocido como “variable”. Para esto se trató de hacer ver a los estudiantes cómo este concepto se encuentra constantemente en su entorno.

Como resultado de la investigación propia a la elaboración de esta unidad didáctica, se definieron situaciones en las que se apreciaran explícitamente las variables y que además estuvieran realmente relacionados con los estudiantes a los cuales se dirige el trabajo. Entre estas situaciones se puede mencionar, aquellas que requieren elegir:

1. El canal de televisión que desean ver antes de acostarse.
2. El equipo con el que quieren jugar un partido de fútbol en una consola de video juegos.
3. El amigo con el que se quiere hablar por el chat.

Entonces, a partir del análisis grupal con los chicos y chicas se puede concluir que “canal de televisión”, “equipo de futbol” y “amigo de chat”, son categorías que presentan varias opciones de escogencia, situación de la cual se puede valer el docente para introducir el concepto de variable.

Siendo más ambicioso en el estudio de este concepto, se pueden utilizar otros ejemplos para estudiar los diversos tipos de variables que hay: dicotómicas, ordinales, discretas y continuas.

En la unidad didáctica se presenta cómo las variables continuas pueden favorecer a la precisión de variables discretas, mediante un ejemplo llamado “competencia de velocidad”, en este, un seleccionador se enfrenta a la decisión de seleccionar al mejor de sus corredores, pero tienen un problema cuando utiliza la variable discreta “tiempo en segundos”, y es que los dos candidatos que obtienen los mejores tiempos, los alcanzan en siete segundos, por lo que no le queda más remedio que utilizar la variable continua “tiempo exacto”.

Relaciones entre variables

De igual manera que en la presentación de las variables a los estudiantes, se buscó mostrar la relación entre variables mediante la utilización de situaciones que realmente estuvieran cercanas a ellos y ellas.

Para esto se utilizó otro conocimiento aprendido en la primaria, que prácticamente es desechado durante toda la secundaria: “los gráficos”. Estos solo se vuelven a ver después de la escuela, en el último trimestre de octavo año (MEP, 2003)

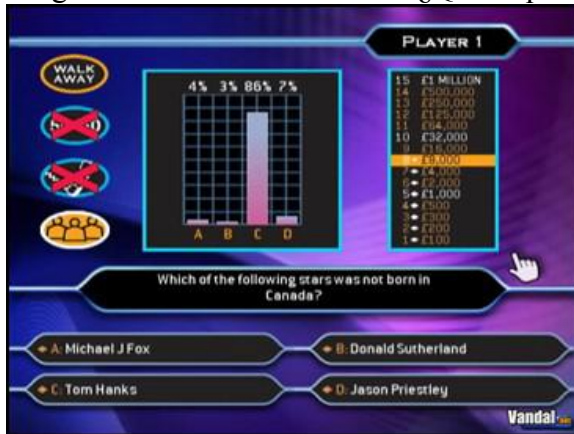
Entonces se tomó como uno de los ejemplos los gráficos de barras que se utilizan en el programa de televisión “¿Quién quiere ser millonario?”. Dicho programa es un concurso

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

basado en las respuestas a preguntas sobre cultura general, en este hay una opción de ayuda a preguntas en las cuales no se está seguro, llamada “opinión del público”.

Si el concursante utiliza dicho comodín, los resultados se le presentan en un gráfico de barras, donde en el eje horizontal están las cuatro opciones posibles, mientras que en el eje vertical aparecen los porcentajes asignados por el público a cada una de esas opciones (ver imagen 1)

Imagen 1: Gráfico utilizado en “¿Quién quiere ser millonario?”

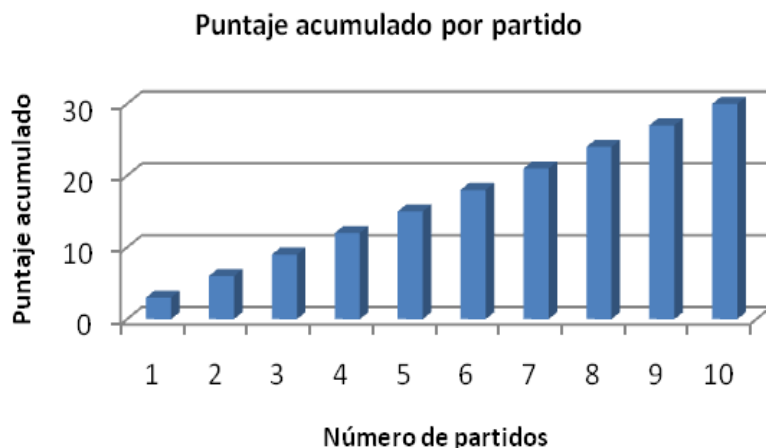


La idea es que el profesor o profesora mediante la técnica de preguntas y respuestas o de trabajo en grupos, haga que sus estudiantes determinen cuáles son las variables en juego y que puedan visualizar cómo estas se están relacionando por medio de la utilización de un gráfico.

Una actividad que se puede hacer para enriquecer este trabajo, es solicitar a los y las estudiantes que busquen gráficos de todos los tipos, en periódicos y revistas, para que sean analizados de la misma manera en clase. Esto además de ayudar a que los estudiantes vean las relaciones de las variables en la cotidianidad, brinda un espacio para poder discutir la situación nacional y mundial, llevando a un tiempo de reflexión dentro de la clase.

Con la utilización de gráficos, los y las docentes, pueden ir aprovechando para presentar relaciones específicas que podrán ser empleadas como ejemplos de casos particulares de las funciones. Como ilustración a esto, puede tomarse el caso de un equipo de fútbol llamado “Furia” que ha ganado todos sus encuentros del campeonato, y analizar la relación que se da entre la cantidad de partidos jugados y el puntaje acumulado según la cantidad de partidos.

Imagen 2: Gráfico del puntaje acumulado por Furia según partidos jugados



En el fútbol, por lo general si un equipo obtiene un triunfo se le asignan tres puntos, entonces se tiene que el puntaje acumulado del equipo “Furia” en cierta jornada equivale al triple de la cantidad de partidos jugados; esto puede ser apreciado claramente en el gráfico de barras, introduciendo así que existe una relación entre la cantidad de partidos jugados por “Furia” y el puntaje acumulado según la cantidad de estos, la cual puede ser expresada por una fórmula.

En este momento de la clase, se puede hacer ver a los estudiantes la importancia de usar un símbolo para las variables en vez de utilizar su nombre completo, ya que para establecer una fórmula matemática es poco operativo el uso palabras, esto es, para efectos de cálculos es mejor trabajar con $P = 3n$, que usar, el puntaje acumulado según partidos jugados es el triple de la cantidad de partidos jugados.

Este argumento se puede evidenciar aún más si se plantean otras situaciones, por ejemplo, si el equipo Furia continuó su racha ganadora durante todo el campeonato, entonces se quiere saber cuántos partidos había jugado cuando llevaba 48 puntos acumulados. Entonces acá es beneficioso tener una fórmula sencilla que permita agilizar los cálculos.

Aprovechándose de este ejemplo, el y la docente, puede introducir el concepto de variable dependiente e independiente, haciendo reflexionar a los y las estudiantes en que el puntaje acumulado depende de la cantidad de partidos jugados o que el porcentaje de respuesta en “la opinión del público” de “¿Quién quiere ser millonario?” depende de las opciones de respuesta que se presenten. Esto hará ver al alumnado de una manera natural a los conceptos de variable dependiente y variable independiente.

Un caso particular de las relaciones entre variables: las funciones

Una vez ya introducido lo natural de encontrarse relaciones entre variables en la cotidianidad, queda el reto de evidenciar lo habitual que son las funciones en el contexto de los y las estudiantes. Para esta tarea se decidió establecer un método que muestre que las características particulares que definen a la función, son muy comunes en una gran cantidad de relaciones familiares a la población. Claramente se tiene que si f es una función de A en B , estas características serían:

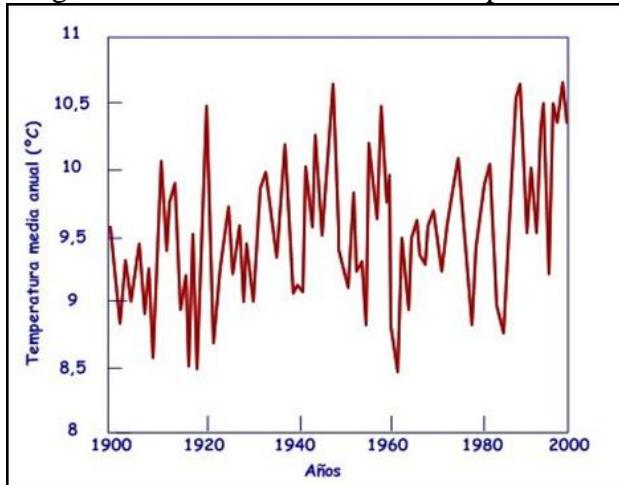
1. A y B son conjuntos no vacíos

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

2. Todo elemento de A, tiene una imagen en B.
3. La imagen de todo elemento de A es única.

Ahora, lo primero que se hace, es decirle a los y las estudiantes que se va a analizar un grupo de características muy habituales en las relaciones, la primera de estas es demasiado común, y es que las variables relacionadas tienen al menos una categoría, por ejemplo, es “antinatural” hablar de la variable “tipo de alas de los elefantes”, ya que esa variable no presenta categoría alguna. Por tanto nunca se ven gráficos que relacionen “tipos de alas de elefantes” con “cantidad de elefantes”.

Imagen 3: Gráfico de años contra temperatura media anual en Inglaterra en el S.XX



La segunda característica, es muy evidente en los gráficos lineales continuos, y es que a cada elemento de la variable independiente siempre está asociado con uno de la variable dependiente. En el gráfico anterior se puede hacer ver claramente que siempre, en cada momento entre los años 1900 y 2000, hay una temperatura media asociada. Aquí se espera que el y la docente profundice en su clase, sobre la infinidad de ejemplos que hay de este tipo y de lo importante que resulta para la humanidad este tipo de relaciones.

Esta particularidad, cobraría más importancia en los y las estudiantes, si a estos se les habla que en el análisis de relaciones es deseable saber siempre qué elemento se le asocia a cada elemento de la variable independiente, ya que por ejemplo, qué pasaría si el concursante del ejemplo de “¿Quién quiere ser millonario?” no sabe qué valor tienen las opciones C y D.

Por último, se debe mostrar que la tercera característica de las funciones también es demasiado común en muchas de las relaciones entre variables, igualmente haciendo uso de los gráficos, así por ejemplo se puede ver en el gráfico 3, que a cada año le corresponde una única temperatura media anual en Inglaterra, o que a cada fecha del torneo de Furia, este equipo tiene una única cantidad de puntaje acumulada, o que a cada opción de respuesta en la pregunta de “¿Quién quiere ser millonario?” le corresponde un único porcentaje de escogencia del público.

Para enriquecer la importancia del estudio de las relaciones con esta tercer particularidad, se puede hablar de los problemas enormes que traería que no existieran relaciones con esta tercer característica, como por ejemplo que Furia tuviera dos puntajes acumulados, entonces no se sabría qué posición tienen en el campeonato, o que

II Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

el concursante de “¿Quién quiere ser millonario?” vea que las opciones tienen dos porcentajes asociados, entonces el comodín no sería de ayuda, y así se pueden ver muchas más.

De esta manera, se ha revelado que las tres características que definen a las funciones, son utilizadas en una gran cantidad de relaciones de la cotidianidad de los estudiantes, y que aparte estas particularidades tienen gran utilidad en nuestro diario vivir y que son sumamente empleadas en los gráficos que los y las estudiantes se encuentran en diversos medios de comunicación.

Ahora, el profesor y la profesora pueden decir con propiedad, que con base en estas razones se va a estudiar a profundidad el tipo especial de relación que cumple con las tres características estudiadas, la cual se denomina *función*.

Conclusiones

Sobre el uso de gráficos en la enseñanza del concepto de función se puede referir a los siguientes aspectos:

- Constituye un recurso muy rico puesto que permite al estudiante visualizar de una mejor manera aspectos específicos de una función los cuales no son proporcionados por el criterio o una tabla.
- La estrategia de enseñanza desarrollada en este artículo se puede extender a los demás tipos de funciones puesto que diversos fenómenos son modelados con expresiones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas.
- Hacer uso de gráficos representa una ventaja para el estudiante, puesto que los mismos no son ajenos a su realidad tanto escolar como social, económica, política, cultural.
- El análisis de gráficos sobre diversos tópicos abren un espacio en la clase de Matemática para la discusión de acontecimientos de índole nacional e internacional, es decir, la incorporación de ejes transversales en la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina.
- Esta estrategia incorpora mayor dinamismo en la clase de Matemática, lo cual permite salir de la rutina en la enseñanza del concepto de función y por ende puede parecer más atractivo para el estudiante el aprendizaje del mismo.
- Los docentes participantes en el estudio se refieren a la necesidad de nuevas estrategias para la enseñanza del tema de funciones y se muestran anuentes a implementarlas
- La vinculación de los contenidos matemáticos y las situaciones del entorno se convierte en una herramienta valiosa para el logro de un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes, puesto encuentran el valor utilitario de lo que aprenden.

Bibliografía

Castro, M., Mena, D., Pineda, E., Rojas, L., Valverde, P. y Vindas, A. (2011). **Unidad didáctica para la enseñanza del tema de funciones en secundaria, a través de situaciones del entorno**. Tesis para optar al grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica.

Cool C, Martin, E., Mauti, T., Miras, M., y otros (1994). **Los conocimientos previos en los procesos de enseñanza/ aprendizaje**. El Constructivismo en el Aula. Colección Biblioteca de Aula. 2 edición- Barcelona.

Díaz, J. (2000). Función: historia, investigación, enseñanza. En **Memorias del primer encuentro internacional sobre la enseñanza del cálculo**, Departamento de Matemática, Universidad de Sonora, México.

Dolores, C. Cuevas, I. (2007). **Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas**. Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 10 (1), 69-96.

Duarte, A. (1991). Hacia la funcionalidad de las funciones. **Ciencias Matemáticas** 2(2) 9-16. Editorial de la Universidad de Costa Rica. Costa Rica

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). (2005). **PISA 2003 Pruebas de Matemática y de solución de problemas**. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, España.

Ministerio de Educación Pública. (2008). **Informe nacional: Resultado de las pruebas nacionales de la educación formal Bachillerato**. San José, Costa Rica.

OCDE, INECSE (2004). **Marcos Teóricos de PISA 2003**. Madrid: Secretaría General Técnica.

Planchart, O. (2003). **La modelación matemática: alternativa didáctica en la enseñanza de Precálculo**. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado en: <http://www.matedu.cinvestav.mx/>

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think matematically: problem solving, metacognition and sense-making in Mathematics. **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning** ,334-370. New York: MacMillan.

Vílchez, E. y Ulate, G. (2006) Funciones cuadráticas una experiencia de desarrollo, implementación y evaluación. **Actualidades investigativas en Educación** 6(2) 1-32. Universidad de Costa Rica.