REPENSANDO LA GEOMETRÍA ESCOLAR DESDE LA RELACIÓN GEOMETRÍA-MUNDO EN LA ANTIGUEDAD

Lianggi Espinoza, Andrea Vergara, David Valenzuela
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Euclides, además de sus famosos Elementos de Geometría, escribió otras obras entre las cuales se encuentra su Óptica. La geometría de sus Elementos se caracteriza por ser teórica, abstracta y separada de la realidad. En cambio, en su Óptica, vemos a un Euclides que usa la geometría para generar un sistema de explicación de un fenómeno de la vida real, la percepción visual del mundo. En este taller problematizaremos la relación geometría-mundo desde las proposiciones de la Óptica de Euclides. Analizaremos el gran potencial que tiene la geometría para explicar diversos fenómenos próximos a la vida de los estudiantes.

Geometría escolar, euclides, óptica geométrica, percepción visual, socioepistemología

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL TALLER

El presente taller surge en el marco del proyecto Fondecyt N°82140031 y es resultado de un estudio profundo de la obra de Euclides. Se propone como una instancia práctica para poner al alcance de profesores de matemáticas, que se desempeñen en enseñanza media y/o segundo ciclo, algunas herramientas para replantear la enseñanza de ciertos teoremas geométricos a partir de la comprensión del contexto histórico y epistémico que les dieron origen. Para tales efectos, se han seleccionado algunos de los problemas propuestos en la obra más ancestral que se conoce sobre el fenómeno de la visión: la Óptica de Euclides, con el propósito de utilizarlos como dispositivos de análisis didáctico y epistemológico de varios de los teoremas clásicos de la geometría escolar, como aquellos asociados a ángulos en la circunferencia. El análisis se realiza siguiendo los principios de la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional a partir del estudio del saber, entendido este último como el conocimiento en uso (Cantoral, Reyes-Gasperini, Montiel, 2014, p.97).

De acuerdo a la actualización curricular vigente, tanto los objetivos fundamentales como los contenidos mínimos obligatorios están orientados a promover que los estudiantes logren aprendizajes que puedan ser transferidos a contextos reales, bajo la consigna de que una comprensión profunda de los saberes exige considerar que estos se encuentran integrados (MINEDUC, 2009). Dado lo anterior, resulta relevante considerar a la geometría en su relación con el mundo, pues su presencia en la representación y modelación de fenómenos no sólo ha sido permanente, sino que además ha resultado fundamental para el desarrollo de la civilización humana (Scriba y Schreiber, 2015). En este caso, nos situamos en el período conocido como helenístico o alejandrino (323 a.C – 30 a.C), en el cual la geometría euclidiana constituye el principal impulsor del desarrollo matemático y científico de la época. Uno de los problemas más significativos de la época de Euclides (325 a.C – 265 a.C) tenía relación con el fenómeno de la visión, ¿cómo percibimos las cosas que vemos? era una de las preguntas que trataba de responder la óptica geométrica de los griegos.

LA ÓPTICA DE EUCLIDES EN LA MATEMÁTICA GRIEGA

El fenómeno de la visión ha despertado gran interés desde la Antigüedad, entre otras razones debido a que se produce «a distancia». Los pensadores de esta época propusieron explicaciones de la visión que se podrían clasificar en dos grandes teorías: la intramisionista, que asume que el objeto visto emite alguna «efluencia» que alcanza al ojo, produciendo así la visión, y la extramisionista, que propone que es el ojo el que envía algún tipo de «fuerza visual» que captura las propiedades del objeto al entrar en contacto con este (Rodríguez y García, 2009). Euclides asume que existen rayos que llevan la dirección de la mirada del objeto y a través de muchos ejemplos geométricos, en su mayoría muy elementales, va demostrando la relación entre lo que podemos observar en lo inmediato del objeto y el objeto en sí (Scriba y Schreiber, 2015). Para sustentar sus explicaciones de porqué cambia el tamaño del objeto percibido según nos alejamos o acercamos a él, Euclides postula que los objetos que se ven bajo un ángulo de visión mayor parecerán mayores. Esta premisa es usada transversalmente a lo largo de toda la Óptica para justificar geométricamente por qué vemos como vemos. Y aunque hoy entendemos que el fenómeno de la visión obedece a otras causas fisiológicas, lo interesante es que lo descrito por Euclides sigue siendo verificable empíricamente y factible de ser interpretado geométricamente bajo su modelo.

La óptica de Euclides es un libro que está compuesto por 7 definiciones y 58 proposiciones, demostradas de manera axiomática al estilo de los elementos de Euclides. Las proposiciones de la Óptica tratan temas variados, como el efecto de la distancia en la percepción de los tamaños y las formas (Prop 1-17), las distorsiones ópticas que ocurren en la observación de superficies curvas como la esfera, el cilindro y el cono (Prop. 23-35), la percepción de objetos cuando estos o el ojo están en movimiento (Prop. 36-56) y la posibilidad de medir alturas y longitudes horizontales (Prop. 18-23), entre otros temas. Del estudio sistemático de esta obra es posible rescatar la semejanza que existe entre estas proposiciones y los teoremas de la geometría proporcional que prescribe el currículum, pero con una diferencia substancial: la Óptica de Euclides sitúa la explicación de las propiedades geométricas a un fenómeno real, de tal manera que las razones de porqué se cumple tal o cual teorema adquieren sentido y coherencia más allá de los constructos axiomáticos.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Remontarse a los momentos de constitución del saber, considerando de manera amplia las condiciones socioculturales, la visión de mundo y las actividades humanas asociadas, nos provee una fuente de significación renovada para la matemática tal como la conocemos hoy (Espinoza, 2014). La matemática ha pasado por sucesivos procesos de institucionalización que le brindan el actual estatus de disciplina formal. Esta condición nos hace pensar en una matemática abstracta, escindida del mundo real y cuyos alcances con problemas concretos sólo son posibles en el plano de la aplicación, pero lo cierto es que muchas de las ideas fundacionales de la matemática surgieron debido a la necesidad de entender y explicar el mundo.

Si bien las nuevas concepciones en torno a la enseñanza de la geometría coinciden en la importancia que posee el estrechar lazos entre los aprendizajes matemáticos y la resolución de problemas reales, buena parte de las tareas geométricas convencionales apuntan a utilizar las propiedades para determinar alguna medida en un ejercicio que simula un contexto problemático (Blanco y Barrantes, 2004). Esto ocurre muy especialmente en las clases de geometría, donde se privilegia la aplicación de fórmulas y otros aspectos memorísticos, cuya consecuencia directa, de acuerdo a Ballestero y Gamboa (2010), es la pérdida de los procesos de argumentación y justificación. A través de la Óptica de Euclides es posible recuperar parte de las argumentaciones ausentes en el discurso matemático escolar en torno a las relaciones entre medidas angulares y longitudinales en figuras planas, pues el escenario contextual moviliza la resignificación, entendiendo esta última como la dinámica de enriquecer el conocimientos a partir del uso de este en situaciones nuevas (Cantoral, 2013).

METODOLOGÍA DE TRABAJO

El taller se estructura de acuerdo a tres niveles de análisis. Primero se presenta un problema desde la Óptica de Euclides, con el propósito de estudiar lo que declara la proposición y su explicación geométrica de forma individual. Este se acompaña de un material concreto para facilitar la visualización y la verificación experimental de la veracidad del enunciado. Los participantes son invitados a realizar un análisis de manera grupal, el cual permite construir relaciones y reflexiones ligadas a los saberes matemáticos escolares. Hecho esto, se espera que los profesores discutan la posibilidad de asociar la proposición con un teorema específico de la geometría escolar, el cual se describe tanto desde la propia experiencia docente como desde de lo que señalan los documentos oficiales (libros de texto, planes y programas). Con estas dos concepciones se discute la resignificación de las nociones geométricas a nivel escolar que están a la base del problema y cuáles son los aportes que trae consigo el contexto de la visión para la enseñanza de la geometría (ver Tabla 1).

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Proposición de la Óptica	Teorema geometría escolar	Diálogo entre saberes
Análisis del fenómeno	Análisis didáctico	Resignificación

Tabla 1: Descripción de los niveles de análisis para los problemas de la Óptica.

SESIONES DEL TALLER

El taller contempla dos sesiones de trabajo, En la primera sesión se presentan 2 actividades se presenta el problema de la percepción de los tamaños aparentes desde los objetos, utilizando la definición 4 de la Óptica de Euclides, que declara *"Y que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales"* (Euclides, 2000, pág.135). La actividad 1 cuenta con 5 preguntas, que promueven el análisis de la geometrización en el plano del fenómeno de la visualización de un objeto simple que ocurre en el espacio. La actividad 2 cuenta con 4 preguntas. A continuación se muestran algunas de las preguntas de la Actividad 1 y 2.

Actividad 1

1. Suponga que el segmento AB representa un objeto y E el ojo, como se muestra en los casos de la Figura 1. Se deja el objeto fijo y se mueve el ojo. Encuentre un punto en

el plano desde donde AB se vea más grande (marque con color azul) y otro desde dónde se vea más pequeño (marque con color rojo). Justifique su decisión.

Figura 1: Geometrización en el plano de la percepción visual de AB desde el ojo E.

2. ¿Puede encontrar más de un punto desde donde AB se vea más grande? Marque con color azul, ¿Puede encontrar más de un punto desde dónde AB se vea más pequeño? Marque con color rojo. Justifique su decisión.
3. Encuentra un punto del plano donde el segmento AB se vea del mismo tamaño que lo que se ve desde el punto E.

Actividad 2

1. Considerando los mismos casos de la Figura 1. Encuentren un punto del plano donde el segmento AB se vea la mitad del tamaño de lo se ve desde el punto E. Si pueden encontrar otro punto también dibújenlo.

- ¿Cuántos puntos pueden encontrar y dónde están?, dibújelos.
- ¿Cuáles son todos los puntos que cumplen la condición? Elaboren y consensuen una explicación y una justificación grupal para exponer al resto del taller.

2. Encuentren un punto del plano donde el segmento AB se vea el doble del tamaño de lo se ve desde el punto E. Si pueden encontrar otro punto también dibújenlo.

- ¿Cuántos puntos pueden encontrar y dónde están?, dibújelos.
- ¿Cuáles son todos los puntos que cumplen la condición? Elaboren y consensuen una explicación y una justificación grupal para exponer al resto del taller.

Además la segunda sesión posee una actividad que cuenta con varias instancias de análisis individual y discusión grupal a partir del uso de material concreto, organizadas en 8 preguntas. En esta actividad los profesores deben analizar la percepción de objetos esféricos considerando algunos de las características y propiedades específicas de la circunferencia y el círculo. A continuación se exponen algunas de las preguntas de la tercera actividad.

Actividad 3

1. Te has dado cuenta que la luna llena en la noche a veces parece más grande y otras más pequeña. ¿Cuándo se ve más grande que gana el observador y que pierde ¿Cuándo se ve más pequeña que gana y que pierde el observador?
2. A continuación, recibirá tres esferas (grande, mediana, chica). Tome la más grande acérquela y aléjela de sus ojos. Anote lo que puede percibir en relación a la superficie vista. Haga lo mismo con las otras dos.

3. ¿Qué parte de la esfera ve en cada caso? (la mitad, más de la mitad, menos de la mitad). Luego de discutir de manera grupal, justifique su respuesta y anótela.

REFLEXIONES FINALES

La geometría escolar ha heredado sólo una dimensión de la geometría euclidiana: su estructura axiomática. Sin embargo, la epistemología del saber asociado al fenómeno de la visión de la antigua Grecia y los mismos trabajos de Euclides sobre el tema, nos dejan entrever una matemática pensada para explicar fenómenos de la vida real, que nos ofrece la posibilidad de considerar la enseñanza de la geometría desde una perspectiva más amplia, que no se restringe al ámbito de lo calculatorio y que realzan el carácter pragmático del conocimiento geométrico relativo a los contextos de significación. Este enfoque en torno a los teoremas de la geometría escolar incorpora elementos argumentativos que no desplazan ni el método ni el rigor de las demostraciones usuales, por el contrario, convive en armonía con ellas y las vuelve más próximas a la comprensión del estudiante.

Agradecimientos

Agradecemos el financiamiento de esta investigación por parte de CONICYT + PAI / Concurso nacional apoyo al retorno de investigadores/as desde el extranjero, convocatoria 2014 + FOLIO 82140031, Gobierno de Chile.

Referencias

Ballestero, E., & Gamboa, R. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare* Vol. XIV, N° 2, [125-142].

Barrantes, M., & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 241-250.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. México: Editorial Gidesa.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses.* Tesis doctoral no publicada. México: Cinvestav.

Euclides, (2000). La Óptica. (*trad*. Ortiz, P). Madrid: Editorial Gredos SA.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media*, actualización curricular. Chile: MINEDUC.

Muñoz, G., Rupin, P., & Jiménez, L. (2014). Matemática 2° medio, texto del estudiante. Chile: Edición espacial SM para el MINEDUC.

Rodríguez, M.P., & García, D. (2009). Las teorías de la percepción visual y el problema del movimiento ocular. Revista de Historia de la Psicología, 30(2), 11 -19.

Scriba, C. J., & Schreiber, P. (2015). Geometry in the 20 th century. In *5000 Years of Geometry* (pp. 489-564). Springer Basel.