ESTRATEGIAS INDUCTIVAS EN PROBLEMAS CON PROGRESIONES ARITMÉTICAS DE ORDEN DOS[1]

MARÍA CONSUELO CAÑADAS SANTIAGO.
Universidad de Zaragoza
ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ.
Universidad de Granada

En este trabajo nos centramos en la descripción de estrategias de resolución de problemas en los que el razonamiento inductivo puede ser un heurístico. La resolución de diferentes tipos de problemas puede contribuir a la adquisición de la competencia matemática. Presentamos y comparamos parte de los resultados de dos problemas propuestos en una investigación más amplia (Cañadas, 2007).

La incorporación de las competencias al currículo de educación secundaria pretende resaltar los aprendizajes imprescindibles que los estudiantes deben lograr al final de ese período educativo. De las ocho competencias básicas que se distinguen en el currículo, en este trabajo prestamos especial atención a una de ellas, aquella que "*consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático*" (Boletín Oficial del Estado, 2007, p. 686). En particular, la competencia matemática *"supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos"* (Boletín Oficial del Estado, 2007, p. 687).

[1] Este trabajo ha sido realizado dentro del Proyecto de Investigación "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática"-SEJ2006-09056.

La competencia matemática cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para afrontar situaciones cotidianas que los precisan. En este sentido, *"la aplicación de estrategias de resolución de problemas y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella"* (Boletín Oficial del Estado, 2007, p. 687).

De los dos tipos de razonamiento que se suelen considerar en la resolución de problemas, nos centramos en el razonamiento inductivo. Utilizamos parte de los resultados de una investigación más amplia (Cañadas, 2007) para poner de manifiesto el interés de considerar problemas contextualizados en los que se pueda utilizar el razonamiento inductivo como heurístico para fomentar la adquisición de la competencia matemática.

En primer lugar, presentamos los principales aspectos teóricos y metodológicos de la investigación. Posteriormente, describimos las estrategias de resolución que utilizan los estudiantes participantes en dos problemas en los que el razonamiento inductivo se puede utilizar como heurístico. Uno de los problemas está contextualizado y el otro no. Finalmente presentamos algunas reflexiones de la comparación de las producciones de los estudiantes en ambos problemas.

MARCO TEÓRICO

El razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que da lugar al conocimiento científico a través del descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares (Neubert y Binko, 1992). Según esta concepción, defendida desde los matemáticos clásicos de prestigio como Hermite (véase Pólya, 1962-65) o Poincaré (1902), hasta asociaciones como la National Council of Teachers of Mathematics (2003), la inducción[2] es un medio potente para la adquisición de conocimiento y para realizar descubrimientos matemáticos.

Pólya identifica unos *pasos*[3] en el proceso de razonamiento inductivo, los cuáles permiten la sistematización del trabajo relacionado con el mismo. Consideramos estos pasos como la primera aproximación a un nuevo *modelo* de razonamiento inductivo que

[2] La inducción es equivalente, en este sentido, a lo que en esta investigación denominamos razonamiento inductivo.

[3] Damos el nombre de *pasos* a los diferentes elementos individuales que se pueden diferenciar en todo el proceso de razonamiento inductivo

planteamos en Cañadas y Castro (2007)[4]. Partiendo de este modelo, estudiamos las producciones de unos alumnos de 3º y 4º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en el contexto de resolución de problemas. En este trabajo nos centramos en dos pasos concretos (trabajo con casos particulares y generalización) y en dos problemas.

Para la Educación Matemática, las estrategias se pueden definir como las "*formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones*" (Rico, 1997, p. 31).

En la resolución de problemas, Pólya considera que la inducción es importante porque trata de proporcionar regularidad y coherencia a los datos obtenidos a través de la observación (Pólya, 1966). Llamamos *estrategias inductivas* a las estrategias que se utilizan en problemas en los que el razonamiento inductivo puede ser un heurístico.

METODOLOGÍA

En la investigación participaron 359 estudiantes de 3º y 4º de la ESO, seleccionados intencionalmente, de cuatro centros públicos de Cúllar-Vega, Granada, Madrid y Teruel. El instrumento de recogida de información fue una prueba individual escrita compuesta por seis problemas en los que aparecen patrones cuya generalización se puede expresar mediante progresiones aritméticas de órdenes 1 y 2. La prueba se aplicó en los centros educativos y aulas habituales de los alumnos, en una de sus horas de matemáticas. Los alumnos trabajaron individualmente en los problemas, sin interacción alguna.

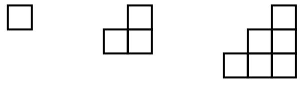
Los dos problemas de la prueba en los que nos centramos en este trabajo son:

Problema 2. Se tiene la siguiente secuencia de números:

3, 7, 13, 21...

- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

Problema 6. Observa las siguientes escaleras de uno, dos y tres pisos en las que cada cuadrado que observas está formado por cuatro palillos de dientes.



- Calcula los palillos que necesitas para construir las escaleras de 4, 5 y 6 pisos.
- Justifica tu respuesta.

[4] El modelo de Cañadas y Castro (2007) consta de los siguientes pasos: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de casos particulares, (c) identificación del patrón, (d) formulación de conjetura, (e) justificación basada en casos particulares, (f) generalización y (g) demostración.

Los patrones que se observan en ambos problemas, se pueden expresar mediante una progresión aritmética de orden 2. La principal diferencia es que, en el problema 2, los casos particulares se expresan numéricamente mediante un enunciado tradicional; y en el Problema 6 se introduce el sistema de representación gráfico en el enunciado y se trata de un problema contextualizado.

Para la descripción de las estrategias utilizadas por los estudiantes, partimos de las progresiones aritméticas como contenido matemático involucrado en el problema. La descripción del contenido matemático[5], nos lleva a considerar los términos k-ésimos de la sucesión (casos particulares) y el término general, como elementos implicados en el proceso inductivo; los sistemas de representación en los que se pueden expresar éstos; así como las posibles transformaciones que los estudiantes pueden realizar.

DATOS

Según el procedimiento descrito por Cañadas y Castro (2006), que se apoya en el *análisis de contenido* (Gómez, 2007) de las sucesiones, cada estrategia inductiva queda determinada por una secuencia de transformaciones cuyo significado se puede comprender según las tablas del Anexo A. Consideramos que los sistemas de representación iniciales son los que aparecen en la segunda columna y los sistemas de representación finales son los que se corresponden con los sistemas de representación de la tercera columna y siguientes. Ese sentido de lectura también es válido para la Tabla A.1 y, en caso de que se diera una transformación del término general a los términos k-ésimos, se interpretaría a la inversa.

En la Tabla 1 recogemos las estrategias inductivas que hemos identificado en las producciones de los estudiantes, los elementos de las progresiones con los que trabajan y las frecuencias de alumnos que utilizan cada una de ellas.

Tabla 1. Estrategias Inductivas_Problema 2

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	68			68
TSN	56			
T5	1	T. k-ésimos	NO	277
TSN-T5	220			
TSN-C1	5	T. k-ésimos y	SÍ	14

[5] Hacemos esta descripción con base en la estructura conceptual y los sistemas de representación, dos de los organizadores del currículo de matemáticas que considera Rico (1997b).

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
TSN-C1-C1B-TSN	4	T. general		
C1	1			
C1-TSA-C1B-TSN	1			
TSN-C4	2			
TSN-C4-T7-C1B-TSN	1			
Total				359

La Tabla 2 es análoga a la anterior pero para el Problema 6.

Tabla 2. Estrategias Inductivas_Problema 6

Estrategias Inductivas	Frecuencias	Elementos Progresión	Generaliza	Frec. Parciales
No transformaciones	36			36
T1	14	T. k-ésimos	NO	315
T1-T5	10			
T1-TSN	36			
T1-TSN-T5	26			
TSG	5			
TSG-T1	93			
TSG-T1-TSN	54			
TSG-T1-T5	24			
TSG-T1-TSN-T5	44			
TSG-T6	3			
TSG-T6-T2	1			
T6	2			
T6-T2-TSN	3			
T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN	1	T. k-ésimos y T. general	SÍ	8
TSG-T1-C1	1			
TSG-T1-TSN-C1-TSA-C1B-TSN	1			
T1-C4	2			
T1-TSN-C4	2			
TSG-T1-C4-C4B	1			
Total				359

ANÁLISIS DE DATOS

Análisis de datos para el Problema 2

A partir de la información de la Tabla 1, destacamos dos aspectos generales:

- Empleo del sistema de representación numérico. Esto se pone de manifiesto por la presencia de TSN como parte de la secuencia que expresa las estrategias de todos los estudiantes excepto en 3.
- La utilización del sistema de representación verbal como último sistema en su respuesta después de otras transformaciones, la llevan a cabo 222 alumnos (220 + 2). Sólo dos de ellos llegan a expresar la generalización.

Estudiantes que no Generalizan

Se observa que 276 estudiantes de los que restringen su trabajo a los términos k-ésimos, utilizan el sistema de representación numérico. De ellos, 56 lo emplean como único sistema de representación (TSN) y 220 lo usan junto con el sistema de representación verbal (TSN-T5). En éstos últimos, la aparición del sistema de representación verbal al final de la secuencia de transformaciones que identifica la estrategia, se debe a diversos tipos de explicaciones verbales a sus conjeturas. En algunos casos, esas explicaciones llegan a ser justificaciones basadas en los términos k-ésimos de la sucesión numérica.

Estudiantes que Generalizan

La totalidad de los alumnos que llegan a la generalización, excepto dos, (12 estudiantes) lo hacen a partir de los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico. Los dos alumnos que constituyen la excepción, generalizan directamente en el sistema de representación algebraico (siguen las estrategias inductivas C1 y C1-TSA-C1B-TSN). Estos dos estudiantes no trabajan con términos k-ésimos explícitamente pero sí identifican un patrón a partir de los términos k-ésimos que se presentan en el problema al que nos referimos.

En cuanto a la forma de expresar la generalización, hay 12 alumnos que generalizan algebraicamente y tres que lo hacen verbalmente. Uno de ellos expresa la generalización en ambos sistemas de representación.

Uso de la generalización

De los 14 alumnos que llegan a expresar la generalización, hay seis que la utilizan para trabajar después con términos k-ésimos (utilizan las estrategias TSN-C1-C1B-TSN, C1-TSA-C1B-TSN, TSN-C4-T7-C1B-TSN). Los ocho alumnos restantes no particularizan posteriormente.

Centrándonos en los 11 alumnos que expresan la generalización sólo algebraicamente, podemos distinguir entre los alumnos que la utilizan para calcular términos k-ésimos de la sucesión y los que no lo hacen. En el primer caso, tres alumnos ven en la generalización una herramienta útil para calcular otros términos k-ésimos de la sucesión; y dos alumnos que vuelven a los términos k-ésimos tras la generalización para justificar la fórmula que han obtenido. En el segundo caso, hay seis alumnos que formulan la generalización como última transformación (TSN-C1 y C1). Estos seis alumnos no consideran la generalización como una herramienta útil para responder al problema, sino como un modo de explicar sus conjeturas.

De la misma forma que en la generalización algebraica, en los alumnos que generalizan verbalmente, encontramos dos usos análogos. Mientras que dos alumnos han hecho uso de la generalización verbal como parte de su intento de justificación (TSN-C4), un alumno generaliza verbalmente y continúa su trabajo hacia la generalización algebraica y la posterior vuelta a los términos k-ésimos (TSN-C4-T7-C1B-TSN).

Por tanto, se observan dos usos en la utilización que dan los alumnos a la generalización y éstos no están asociadas a ninguno de los sistemas de representación en los que los alumnos pueden expresarla. Los dos usos hacen referencia al cálculo de términos k-ésimos como respuesta a la tarea propuesta y al intento de justificar su resolución.

Análisis de datos para el Problema 2

Identificamos los siguientes aspectos a partir de la información de la Tabla 2:

- Predomina el trabajo en el sistema de representación numérico. Todos los alumnos que llevan a cabo alguna transformación, excepto los 10 que emplean las estrategias TSG, TSG-T6 y T6, utilizan la expresión numérica de los términos k-ésimos de la progresión.
- Los alumnos que utilizan el sistema de representación verbal tienden a hacerlo en la parte final de la resolución. Hay 113 estudiantes que finalizan su respuesta verbalmente (con las transformaciones T5, T6 o C4).
- El sistema de representación gráfico es empleado al comienzo de la resolución de este problema por 227 estudiantes, que hacen una transformación sintáctica a partir de la información que se proporciona en el enunciado del problema. Esto se observa con la presencia de TSG como primer término de la secuencia que determina la estrategia.

Estudiantes que no Generalizan

Se pueden distinguir diferentes grupos de alumnos que trabajan únicamente con los términos k-ésimos atendiendo al sistema de representación que utilizan y las transformaciones que realizan. En un primer grupo, están los 215 alumnos que combinan los sistemas de representación gráfico y numérico para comenzar la resolución del problema (TSG-T1 como comienzo de la secuencia), y en ese orden.

En un segundo grupo, hay 86 alumnos que se centran en el trabajo con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (utilizan las estrategias T1, T1-T5, T1-TSN y T1-TSN-T5).

En un grupo menos numeroso se ubican los que utilizan el sistema de representación verbal únicamente (T6), el verbal junto con el numérico (T6-T2-TSN), el gráfico con el verbal (TSG-T6) o combinando los tres sistemas de representación en los que se pueden expresar los términos k-ésimos (TSG-T6-T2).

Estudiantes que Generalizan

Como se deduce de la Tabla 2, de los ocho estudiantes que llegan a la expresión de la generalización, hay tres que generalizan algebraicamente (aparece C1) y cinco lo hacen verbalmente (C4).

Los tres alumnos que generalizan algebraicamente han trabajado con términos k-ésimos en el sistema de representación numérico previo a la generalización. Esto se pone de manifiesto por la aparición de T1 como parte de su estrategia. Además, dos de esos tres alumnos han trabajado también en el sistema de representación gráfico (aparece TSG previa a la generalización).

Hay cuatro alumnos que generalizan verbalmente habiendo trabajado previamente con los términos k-ésimos en el sistema de representación numérico (utilizan las estrategias inductivas T1-C4 y T1-TSN-C4).

REFLEXIONES FINALES

En los dos problemas destacamos que la mayoría de los estudiantes tienden a trabajar únicamente con los términos k-ésimos de las respectivas sucesiones para dar respuesta a los problemas. La generalización, por tanto, se considera una herramienta útil para la obtención de los términos siguientes de la sucesión.

Destacamos la diferencia en el número de estrategias que hemos identificado en los dos problemas. Mientras que en el Problema 2 hay 9 estrategias, en el Problema 6 hay 19. Una de las razones que puede explicar esta variedad de estrategias en el Problema 6 puede deberse a la escasa frecuencia con que los estudiantes trabajan con problemas contextualizados relacionados con sucesiones numéricas.

En cuanto a los sistemas de representación que utilizan los estudiantes, señalamos una mayor variedad en el Problema 6. En este problema, utilizan el sistema de representación gráfico presente en el enunciado.

Los resultados indican que los problemas contextualizados dan la oportunidad a los estudiantes de investigar diferentes tipos de estrategias en problemas donde el razonamiento inductivo se puede utilizar como heurístico.

REFERENCIAS

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria* (Vol. BOE nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

CAÑADAS, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada. (Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/FMPro)

CAÑADAS, M. C. Y CASTRO, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.

CAÑADAS, M. C. Y CASTRO, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

GÓMEZ, P. (2007). Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Autor y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NEUBERT, G. A. Y BINKO, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. National Education Association: Washington D.C.

POINCARÉ, H. (1902). *La ciencia y la hipótesis.* Madrid: Espasa-Calpe. [Traducción al castellano de Besio, A. B. y Banti, J. (1963).]

PÓLYA, G. (1962-65). Pólya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery*. 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

PÓLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.

RICO, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

ANEXO A

Tabla A.1. Transformaciones entre representaciones de un término k-ésimo

Elemento		Término k-ésimo		
	S. Representación	Numérico.	Gráfico	Verbal
Término k-ésimo	Numérico	TSN	T3	T5
	Gráfico	T1	TSG	T6
	Verbal	T2	T4	TSV

Tabla A.2. Transformaciones entre representaciones del término general

Elemento		Término General	
	S. Representación	Algebraico	Verbal
Término general	Algebraico	TSA	T8
	Verbal	T7	TSV

Tabla A.3. Cambios del sistema de representación entre diferentes elementos

Elemento		Término General			
	S. Representación	Algebraico		Verbal	
Término k-ésimo	Numérico	C1	C1B	C4	C4B
	Gráfico	C2	C2B	C5	C5B
	Verbal	C3	C3B	C6	C6B