

La enseñanza de la probabilidad geométrica en primaria y secundaria con ayuda de GEOGEBRA

Marylin Calderón Mora¹

Resumen

El presente taller se enfoca en la resolución de una guía de ejercicios de probabilidad geométrica con ayuda del software de matemática GEOGEBRA. Dicha guía puede ser aplicada en los niveles de primaria y secundaria, cuando los conceptos geométricos y estadísticos ya han sido vistos en clase. Esta propuesta puede ser enriquecida con la iniciativa propia de cada docente, así mismo puede motivarlo a crear nuevos problemas.

Palabras clave: Probabilidad geométrica, área.

Abstract

This workshop focuses on the resolution of a guide of exercises of geometric probability with the help of a mathematics software called GEOGEBRA. Said guide may be applied to primary and secondary school, once the geometric and statistic concepts have been taught in class. This proposal may be enriched with the initiative of each teacher, it may also encourage the teachers to create new exercises.

Keywords: Geometric probability, area.

Introducción

Como parte de la reforma educativa aplicada en Costa Rica 2013 para el área de la matemática, toma relevante importancia en la educación integral de la matemática el estudio de la estadística y probabilidad. Estos temas desde hace varios años se había dejado de lado de los contenidos de la enseñanza secundaria. Estadística y Probabilidad no eran parte de los temas a evaluar en los exámenes de Bachillerato aunque si pertenecían a los contenidos de secundaria, por lo que muchos docentes e instituciones destinaban sus recursos a aquellos temas contenidos en dicha prueba.

Actualmente, a nivel internacional, la probabilidad y la estadística se consideran claves en la formación de los futuros ciudadanos, y se señala que su enseñanza inicie desde la primaria, pues son una herramienta valiosa para la resolución de ciertos problemas. Además, con el uso de medios tecnológicos actuales se ha fortalecido la enseñanza.

¹Colegio Saint Paul, Costa Rica, mary_cm@yahoo.com

Los alumnos deben ampliar su visión de la probabilidad a más que monedas, naipes, dados o cualquier juego de azar, los problemas de probabilidad geométrica deben tener sentido, para que los jóvenes tome interés, y empezar con juegos es un muy buena estrategia de lograr captar dicho interés.

Marco teórico

Para desarrollar una estrategia de resolución de los problemas de probabilidad geométrica es importante que el estudiante domine un serie de conceptos y estrategias de resolución tanto de geometría como de probabilidad, además de la habilidad en cálculos sencillos de aritmética y muy importante, la habilidad del uso de un software adecuado de matemática, lo que se convertirá, si hay posibilidad del uso de este medio, en una forma ágil en la resolución y generación de los problemas de probabilidad geométrica.

Para definir el término Probabilidad Geométrica, primero haremos una breve descripción de los términos que componen esta frase.

Epistemológicamente el término geometría deriva del griego geo (tierra) y metrón (medida), pero al pasar los siglos y gracias a matemáticos importantes como Euclides, Gauss, Lobatschewsky, John Bolyai, Sacchiary entre otros, se abrió el concepto de geo a todo el espacio y espacio conceptual-abstracto donde vivimos. Pensar en una geometría aplicada al álgebra o a la probabilidad nos lleva a un espacio no tangible más conceptual, en donde el uso de la geometría permite relacionar conceptos teórico y abstractos, tomado así forma visual y creando una nuevas estrategias de razonamiento.

El concepto de probabilidad proviene del término en latín probabilitas, el cual se puede traducir como aquella posibilidad que hay entre diversas posibilidades de ocurrencia de un determinado evento. La Probabilidad es una rama de la matemática ya que está se encarga del estudio y medición cuantitativa de que un determinado hecho suceda u ocurra.

La medición de la ocurrencia de una evento X se denota como $P(X)$ y está pertenece al intervalo $0 \leq P(X) \leq 1$.

Cuando $P(X) = 0$ se sabe con absoluta certeza que la ocurrencia del evento es nula, en otras palabras, es imposible que el evento ocurra, lo llamamos evento imposible.

Si $P(X) = 1$, se sabe con absoluta certeza que el evento va a ocurrir, lo llamamos evento seguro.

Las mediciones de las probabilidades se pueden expresar mediante:

- Notación decimal correspondiente a una fracción propia
- En notación de porcentaje %, forma más utilizada comúnmente en el lenguaje. Esta es la forma más habitual de tener contacto con las probabilidades en periódicos, revistas, noticias, investigaciones...

La probabilidad como medición cuantitativa se puede calcular de varios enfoques (Spiegel, 1970)

- Enfoque Clásico: $P(X) = \frac{\text{Cantidad de eventos exitosos}}{\text{Cantidad total de posibles eventos}}$
- Enfoque frecuencias relativas
- Enfoque subjetivo

Otro concepto importante en el tema de las probabilidades es “el azar” o “fenómeno estocástico” definido como:

Se dice que un hecho o fenómeno es de naturaleza estocástica cuando su incidencia no está ligada ni vinculada absoluta o directamente a factores puramente causales propio de modelos deterministas, habiendo fenómenos o hechos cuya ocurrencia sucede en un contexto o margen de indeterminismo lógico o incertidumbre empírica, de forma aleatoria y al azar, motivo por el cual sus métodos de estudio son la estadística y la probabilidad, ya sea para el estudio del comportamiento estocástico de una o más variables (Pedraza, 2013)

Entonces, ahora podemos definir el concepto de Probabilidad como el conjunto de reglas que nos permiten determinar si un fenómeno tiene probabilidades de producirse fundamentado en el cálculo.

Sabiendo el significado de probabilidad y de geometría podemos tener una idea clara de lo que la probabilidad geometría estudia, tomamos problemas geométricos y los combinamos con la probabilidad de que un evento ocurra para calcular dicha probabilidad usamos concepto geométricos básicos como: áreas de polígonos, círculo y circunferencia, plano rectangulares, longitudes de segmentos, por ejemplo.

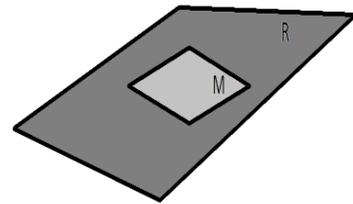
Con respecto al uso de la tecnología, es bien sabido el aporte de este medio a la enseñanza, para esta propuesta se usará el programa GEOGEBRA ya que por ser un software libre existe accesibilidad de bajarlo a cualquier medio interactivo de una forma sencilla, además el uso del programa en sí, es muy fácil tanto para el profesor como para los alumnos. Pero es innegable el aporte, dinamismo e interés por parte de los alumnos del uso de un programa informático en el desarrollo de la resolución de los problemas.

Aun así, si no contáramos con los medios electrónicos para la resolución de los ejercicios, esto no sería un impedimento para llevar la probabilidad geométrica al aula, sus sencillos cálculos los pueden llevar a cabo los estudiantes de secundaria con o sin el uso de una calculadora.

Propuestas de taller

1. Problemas y estrategia de resolución del cálculo de probabilidad de áreas en polígonos.

Guía de la propuesta del problema: Dibuje una región poligonal R y luego otra región poligonal M dentro de R ¿cuál es la probabilidad de que un punto P elegido al azar de la región R esté en la región M a la vez?



Conocimientos a desarrollar:

- Polígonos
- Cálculo de áreas de polígonos
- Cálculo de probabilidad clásica

Guía de estrategia de resolución.

Se identifica el área posible donde se puede elegir el punto P, la región R, utilizando los datos de las longitudes los segmentos que forman la región R, esta región puede ser cualquier polígono al cual los estudiantes puedan obtener el área.

Para calcular la probabilidad $P(X)$ de que un punto P de la región R esté a la vez en la región M debemos calcular el área de ambas regiones y aplicamos el concepto de probabilidad clásica resolviendo:

$$P(x) = \frac{\text{área de éxito, región M}}{\text{área total, región R}}$$

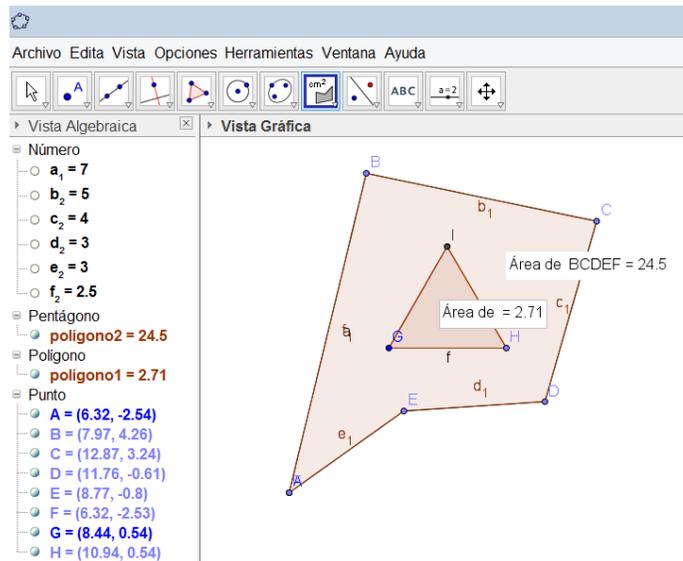
Con este sencillo cálculo podemos obtener la probabilidad de que se elija al azar un punto P dentro de la región R y que este esté contenido en de la región M.

En este tipo de problema se pone en práctica conceptos de cálculo de áreas de polígonos, además de los conceptos de probabilidad, el estudiante debe ser capaz de intuir la aplicación de la fórmula de la probabilidad en la resolución del problema.

Uso de GEOGEBRA

Si contamos con el software GEOGEBRA el problema puede iniciarse con la construcción por parte de los alumnos de los polígonos.

Ejemplo: Usando GEOGEBRA, construya un polígono irregular de 5 lados cuyas medidas son 5,3,3,4 y 7, el que representa la región R, otro polígono de tres lados regular de lado 2,5, y calcule la probabilidad de que un punto escogido al azar de la región del polígono de cinco lados esté dentro de la región del triángulo también.



Sea X el evento que el punto P elegido al azar de la región del polígono de 5 lados, este en la región de triángulo también.

$$P(X) = \frac{2,71}{24,5} \approx 0,1106$$

Respuesta del problema utilizando GEOGEBRA

La respuesta dependerá de cómo se dibujen las regiones R y M. En el caso de las regiones hechas en GEOGEBRA, encontramos la probabilidad 11,06% de que, al elegir un punto al azar P de la región del pentágono irregular este esté en la región delimitada por el triángulo equilátero a la vez.

Variaciones del problema

Algunas modificaciones que se le pueden hacer al problema es trabajar con el área de polígonos irregulares, para los cuales el cálculo del área no es una simple aplicación de una fórmula, o variar el evento éxito; por ejemplo calcular la probabilidad de que el punto elegido esté dentro de la región R pero no en la región M.

También podemos hacer variaciones en los cálculos de probabilidades más complejos como probabilidades conjuntas, unión e intersección de probabilidades. A nivel de 8° y 9° de secundaria del ciclo básico podemos aplicar estos problemas básicos, ya el cálculo de las probabilidades son parte del programa desarrollar. También podemos aplicar los conceptos de evento imposible y evento seguro.

Ejemplo de problema para desarrollar en el aula

El problema lo podemos contextualizar con la realidad, por ejemplo:

“Se sabe que cayó una mancha pequeña de tinta sobre una bandera, la bandera tiene forma rectangular de dimensiones 30 cm y 18 cm, en su interior tiene estampado el símbolo del colegio con forma de rombo de lado 5 cm. ¿cuál es la probabilidad de que la mancha esté sobre el símbolo del colegio?”



2. Problemas y estrategia de resolución del cálculo de probabilidad de círculos.

Guía de la propuesta del problema: Dibuje dos círculos concéntricos, identifique la región de la corona circular R. ¿Cuál es la probabilidad de que un punto P cualquiera dentro del círculo mayor esté en la corona circular R?

Conocimientos a desarrollar:

- Círculos
- Cálculo de áreas círculos
- Cálculo de probabilidad clásica

Guía de estrategia de resolución.

Se identifica el área posible donde se puede elegir el punto P, la región R, utilizando los datos de las longitudes los radios de los círculos y aplicando las fórmula de la corona circular, la región donde definimos el evento como éxito será la corona circular, mientras que la región o área del círculo mayor será la región total de elección del punto al azar.

Aplicamos el concepto de probabilidad clásica en donde

$$P(x) = \frac{\text{área de éxito, región de la corona circular}}{\text{área total del círculo mayor}}$$

Con este sencillo cálculo podemos obtener la probabilidad de que se elija al azar un punto P que esté contenido exclusivamente dentro de la corona circular.

En este tipo de problema se pone en práctica conceptos de cálculo de áreas de círculos, además de los conceptos de probabilidad, el estudiante debe ser capaz de intuir la aplicación de la fórmula de la probabilidad en la resolución del problema.

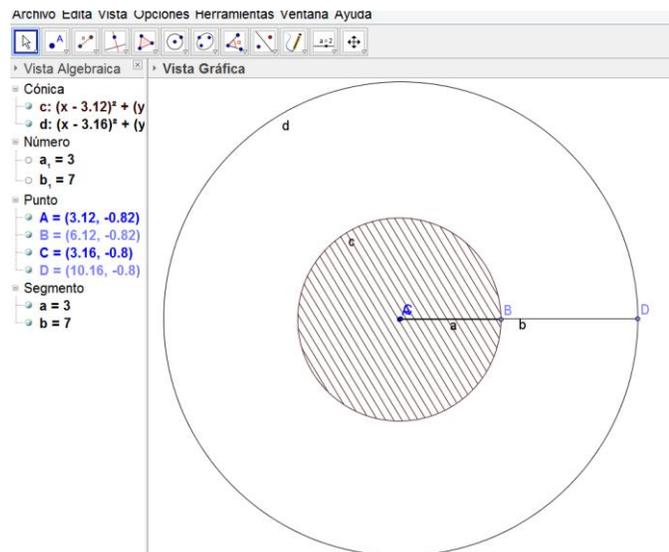
Uso de GEOGEBRA

Si contamos con el software GEOGEBRA el problema puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de dos círculos concéntricos dados los radios para formar la corona circular.

Ejemplo: Usando GEOGEBRA, construya una corona circular donde el radio del círculo mayor es 7 y el radio del círculo menor es 3 y calcule la probabilidad de que al elegir un punto P cualquiera que esté en la corona circular.

Sea X el evento que el punto P elegido al azar de la región de la corona circular.

$$P(X) = \frac{153,94 - 28,27}{153,94} = \frac{125,67}{153,94} \approx 0,816$$



Respuesta del problema utilizando GEOGEBRA

La respuesta dependerá de cómo dibujemos los círculos, en el caso de los círculos dibujados con GEOGEBRA, la probabilidad de que un punto cualquiera dentro del círculo mayor esté en la corona circular R es de 81,6%.

Variaciones del problema

Algunas modificaciones que se le pueden hacer al problema es comparar el cálculo de las probabilidades al variar el radio de uno de los círculos. También podemos hacer variaciones en los cálculos de probabilidades más complejos como probabilidades conjuntas, unión e intersección de probabilidades. A nivel de 8° y 9° de secundaria del ciclo básico podemos aplicar estos problemas básicos, ya el cálculo de las probabilidades son parte del programa desarrollar. También podemos aplicar los conceptos de evento imposible y evento seguro.

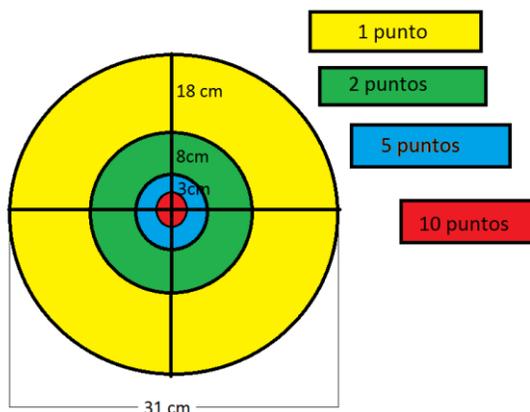
Otra variación que se puede aplicar es la combinación de áreas de polígonos con círculos, lo que se deja a la creatividad del profesor o maestro.

Ejemplo de problemas para desarrollar en el aula

El problema lo podemos contextualizar con la realidad, por ejemplo:

“Se juega tiro al blanco, con el siguiente tablero, ¿Cuál es la probabilidad de obtener

- a) 10 puntos?
- b) 5 puntos?
- c) 2 puntos?
- d) 1 punto?

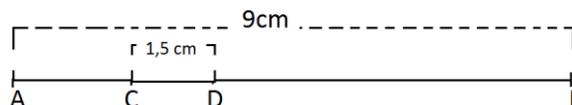


3. Problemas y estrategia de resolución del cálculo de probabilidad de longitudes de segmentos.

Guía de la propuesta del problema: Dibuje un segmento AB, y los puntos C y D que estén contenidos en el segmento AB. ¿Cuál es la probabilidad de que un punto P que pertenece a AB pertenezca al segmento CD?

Conocimientos a desarrollar:

- Conceptos básicos de geometría.
- Cálculo de probabilidad clásica



Guía de estrategia de resolución.

Teniendo la longitud del segmento AB y la del segmento CD, se identifica que el éxito del evento será que el punto P al azar pertenezca al segmento CD por lo que el cálculo de la probabilidad es el cociente entre la longitud del segmento CD y la longitud del segmento AB.

Aplicamos el concepto de probabilidad clásica en donde

$$P(x) = \frac{\text{longitud del segmento } CD}{\text{longitud del segmento } AB}$$

Con este sencillo cálculo podemos obtener la probabilidad de que se elija al azar un punto que pertenezca al segmento AB y que a la vez pertenezca al segmento CD.

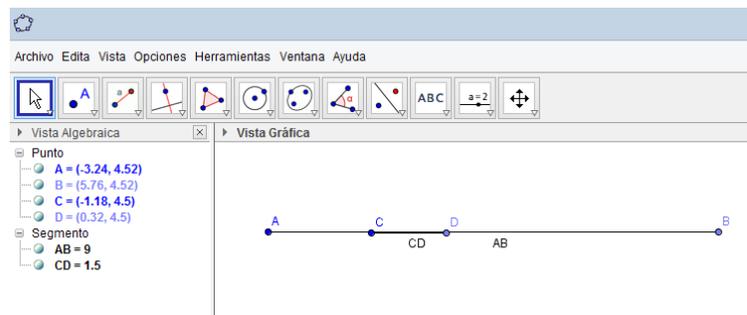
En este tipo de problema se pone en práctica conceptos de geometría, como punto, segmento, pertenencia a un segmento... además de los conceptos de probabilidad, el estudiante debe ser capaz de intuir la aplicación de la fórmula de la probabilidad en la resolución del problema.

Uso de GEOGEBRA

Si contamos con el software GEOGEBRA el problema puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de los segmentos, uno que esté contenido en el otro.

Ejemplo: Usando GEOGEBRA, construya dos segmentos AB con una longitud de 9 unidades lineales y el segmento CD con 1,5 unidades lineales. De forma que el segmento CD esté contenido en el segmento AB y calcule la probabilidad de elegir al azar un punto cualquiera del segmento AB, este esté en el segmento CD a la vez, redondeé la cifra a dos decimales.

El evento éxito del ejercicio es que el punto esté en los 1,5 cm de CD.



$$P(X) = \frac{1,5}{9} \approx 0,17$$

Respuesta del problema utilizando GEOGEBRA

La respuesta dependerá de la longitud del segmento AB construido con GEOGEBRA y la ubicación que se le dé a los puntos C y D, por lo tanto, según la construcción, la probabilidad de que un punto que pertenece al segmento AB pertenezca a la vez al segmento CD es 17% .

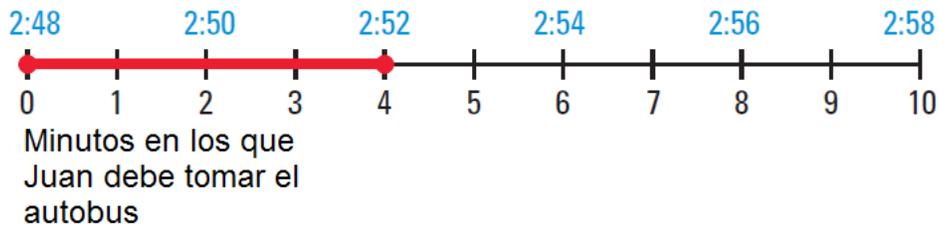
Variaciones del problema

Algunas modificaciones que se le pueden hacer al problema es trabajar con diferentes unidades, también se puede variar la pregunta del ejercicio y cambiar el evento éxito; calcular la probabilidad de que un punto al azar de AB no esté en el segmento CD.

Ejemplo de problema para desarrollar en el aula

El problema lo podemos contextualizar con la realidad, por ejemplo:

“Juan está de visita en la ciudad de Heredia, y toma en autobús para llegar al Universidad Nacional. Se supone que se encuentre con un amigo en la universidad a la 3 p.m. El autobús que le sirve pasa cada 10 minutos y el viaje a la universidad dura 8 minutos. Si Juan llega a la parada del bus a las 2: 48 p.m. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan llegue puntual a ver a su amigo a 3 p.m.?”

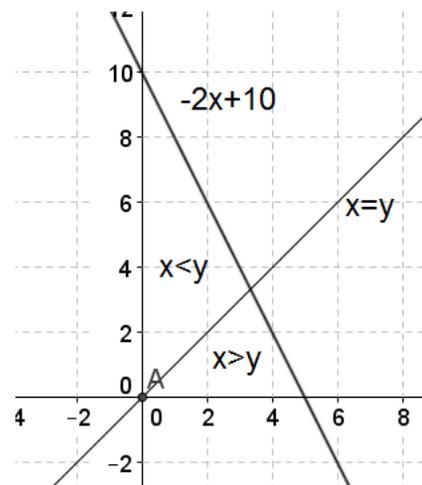


4. Problemas y estrategias de resolución del cálculo de probabilidad de la ubicación de pares ordenados.

Guía de la propuesta del problema: En un plano de coordenadas rectangulares grafique la recta $y = -2x+10$ con $0 < x < 5$ y $0 < y < 10$. Encuentre la probabilidad de que en un punto elegido al azar del plano la coordenada x sea menor que la coordenada y

Conocimientos a desarrollar:

- Conceptos básicos de geometría.
- Concepto de ecuación de la recta.
- Puntos de intersección de rectas.
- Álgebra.
- Gráfica de rectas.
- Cálculo de áreas de polígonos.
- Cálculo de probabilidad clásica.



Guía de estrategia de resolución.

Primero se grafica la recta $y = -2x+10$ y la recta de los pares ordenados donde $x = y$, se identifican los polígonos que se forman para obtener el área y calcular las probabilidades.

Sabemos que los pares ordenados que estén ubicados en la parte superior de la recta $y = x$ tendrán la forma $x < y$, y los pares ordenados que estén ubicados en la parte inferior de la recta $y = x$, tendrán la forma $x > y$.

Aplicamos el concepto de probabilidad clásica en donde

$$P(x) = \frac{\text{área del polígono donde } x > y}{\text{área total debajo de la recta } -2x + 10 \text{ y los ejes}}$$

Con este sencillo cálculo podemos obtener la probabilidad de que se elija al azar un punto que corresponda a un par ordenado en donde $x > y$ que pertenezca a la región delimitada por la recta y los ejes.

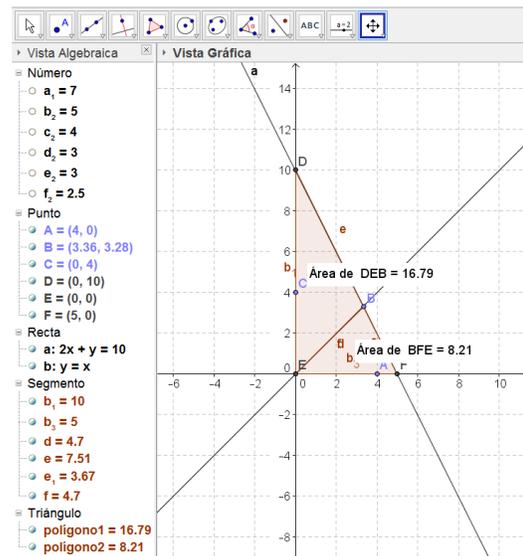
Uso de GEOGEBRA

Si contamos con el software GEOGEBRA el problema puede iniciar con la construcción por parte de los alumnos de la recta del problema y la recta $x = y$ para identificar las áreas de los polígonos en donde la condición $x < y$ se cumple.

Ejemplo: Usando GEOGEBRA: Calcule la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a la región delimitada por la recta $-2x + 10$ y los ejes, con la condición que $x < y$.

El evento éxito del ejercicio es que el punto elegido al azar esté ubicado dentro del área que cumple con la condición del problema.

$$P(X) = \frac{8,21}{16,79 + 8,21} \approx 0,328$$



Respuesta del problema utilizando GEOGEBRA

Según las áreas de los polígonos obtenidos con GEOGEBRA; existe una probabilidad de 0,328 o 32,8% de elegir un punto al azar dentro del área delimitada por la recta $y = -2x+10$ y los ejes de coordenadas que tenga la condición $x < y$.

Variaciones del problema

Algunas modificaciones que se le pueden hacer al problema es trabajar con diferentes ecuaciones de recta, intersección entre rectas y ejes, la estrategia de resolución del problema implica un alto dominio de los temas relacionados.

Ejemplo de problema para desarrollar en el aula

El problema lo podemos contextualizar con la realidad, por ejemplo:

“Una empresa de productora de queso artesanal debe adquirir una combinación de dos tipos de hierbas para la fabricación del queso con hierbas frescas, debe gastar un monto máximo de 10000 colones. El costo en hierbas de la compra se refleja en la ecuación $x + y = 10000$, donde x y y son los dos tipos de hierbas frescas. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa compre más de la hierba x que de la y ? “

Bibliografía

Jose Barraqués F, J. G. (diciembre de 2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. Obtenido de <http://www.redalyc.org/pdf/405/40516671006.pdf>

Marilú Rioseco G, R. R. (n.d.). Retrieved from www.oei.es/equidad/rioseco3.PDF

Pedraza, R. G. (2013). Estadística de la probabilidad o probabilidad estadística. Retrieved from <http://probabilidadimposible.blogspot.com/2013/04/la-naturaleza-estocastica-de-la.html>

Renato Allende O, H. T. (n.d.). Universidad Técnica Federico Santamaría . Retrieved from Departamento de Matemática: <http://hvillalobos.mat.utfsm.cl/Apuntes/A.04%20Apunte%20Cuarto%20M%F3dulo.pdf>

Spiegel, M. (1970). Estadísticas. México: McGraw-Hill.