La integración de habilidades en la resolución de problemas de Probabilidad y Estadística

Edwin Chaves Esquivel[1], Ricardo Poveda Vásquez[2], Jonathan Espinoza González[3], Claudia Martínez Pacheco[4] y Miguel González Ortega[5]

Resumen

Se propone realizar un taller, en donde se plantean algunos problemas para la implementación de tópicos de probabilidad y estadística en secundaria, siguiendo lo propuesto en los programas de estudio de Matemáticas. El propósito básico de este taller consiste en ejemplificar el tipo de problemas que el docente puede implementar en el aula, para lograr un trabajo estudiantil exitoso, de modo que se involucran paralelamente diferentes conocimientos probabilísticos o estadísticos, mediante la integración de diferentes habilidades. Pero además, se analiza la puesta en práctica de los fundamentos teóricos estructurados en estos programas, por medio del método de los cuatro pasos para resolución de los problemas, la implementación de los diferentes procesos matemáticos y de las diferentes etapas metodológicas.

Los problemas planteados, por su estructura y nivel de dificultad, son susceptibles para que los profesores puedan utilizarlos en sus aulas con las adecuaciones del caso.

Palabras clave: Resolución de problemas matemáticos, enseñanza de la estadística y probabilidad, programas oficiales de matemáticas en Costa Rica

1. Introducción

Los programas vigentes del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012), propone al docente aprovechar el potencial de las Matemáticas como herramienta fundamental para el desarrollo de las diferentes disciplinas científicas. En este currículo se plantea como objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de las capacidades cognoscitivas para enfrentar los retos de la sociedad moderna, donde el conocimiento, la información, y la demanda de habilidades y capacidades de razonamiento lógico y de toma de decisiones basadas en evidencia concreta tienen especial relevancia.

Para lograr este objetivo, se plantean dos propósitos básicos: primeramente que cada estudiante asuma la responsabilidad de participar activamente en la construcción del

[1] Escuela de Matemática-UNA, Escuela de Estadística-UCR. echavese@gmail.com
[2] Escuela de Matemática-UNA. ricardopovedav@gmail.com
[3] Escuela de Matemática-UNA. espinozaj25@gmail.com
[4] Escuela de Matemática-UNA. claudia.martinez.pacheco@una.cr
[5] Escuela de Matemática-UNA. Ministerio de Educación Pública. mago1310@gmail.com

aprendizaje, y en segundo lugar que la acción docente se enfoque a la generación de suficientes situaciones de aprendizaje tanto en cantidad y calidad que faciliten el logro del primer propósito en forma motivadora.

Se promueve una acción de aula centrada en la resolución de problemas vinculados con contextos reales, físicos, sociales y culturales. Por medio de esta estrategia se promueve una identificación de cada estudiante con el entorno y el uso de las Matemáticas como herramienta para comprender y modelar las situaciones de la cotidianidad estudiantil. En este sentido, la mediación pedagógica adopta premisas fundamentales constructivistas, tal como lo establece la política educativa vigente para el país, la cual propicia construcción activa de los aprendizajes por parte del mismo estudiante.

Con este enfoque, se promueve el desarrollo de habilidades vinculadas directamente a las áreas matemáticas. El aprendizaje de los conceptos o conocimientos disciplinares por medio de la resolución de problemas debe ser concentrada en cuatro pasos básicos:

(1) propuesta de un problema,
(2) trabajo estudiantil independiente,
(3) discusión interactiva y comunicativa,
(4) clausura o cierre. (MEP, 2012; p.14)

El desarrollo de un problema por parte de los estudiantes, puede ocupar una o más lecciones. Esta propuesta se contrapone con la enseñanza tradicional que ha estado centrada en el desarrollo de los tópicos matemáticos en abstracto por parte del docente, con el planteo de ejemplos y prácticas rutinarias y mecánicas. El planteo y resolución de problemas constituye una constante durante todo el proceso educativo, lo que incluye *el reforzamiento, movilización y aplicación de los conocimientos aprendidos*. (MEP, 2012; p.15)

Aunque se promueve el empleo de problemas vinculados con contextos reales; no obstante, la implementación de problemas abstractos para situaciones particulares constituyen también una importante herramienta del proceso educativo. Con esto se pretende *la construcción de capacidades para la manipulación de los objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta*. *La estrategia asumida se propone fundamentar pedagógicamente el paso desde lo concreto a lo abstracto*. (MEP, 2012; p.15)

Una de las principales críticas que señalan los docentes sobre la implementación de esta estrategia didáctica, consiste en la cantidad de tiempo que se requiere para lograr cada una de las habilidades planteadas en el programa. Aseguran que la cantidad de problemas que deben ser propuestos, y el tiempo que se debe destinar para cada uno de ellos superan las posibilidades reales en cuanto al tiempo que se destina a las lecciones de Matemáticas actualmente.

En este sentido, el taller que se propone realizar con docentes de Matemáticas, viene a contrarrestar estas críticas. Para ello, se presentan actividades académicas que evidencian que por medio de un solo problema es posible integrar diferentes conocimientos matemáticos, que posibilitan en los estudiantes la adquisición de varias habilidades al mismo tiempo.

Esta propuesta se desarrolla en el área de Estadística y Probabilidad, cuya implementación también ha causado zozobra en los docentes, debido a que en los nuevos programas de estudio, estas áreas tienen un mayor peso del que se les había venido dando en los programas anteriores.

2. Proceso de mediación pedagógica para desarrollar capacidades cognitivas superiores

Para las diferentes áreas matemáticas, en los programas de estudio, por un lado, se proponen habilidades vinculadas con las áreas matemáticas, y por otro lado, se plantean procesos que favorecen la reproducción de capacidades cognitivas transversales. *Estas dimensiones están íntimamente asociadas: los procesos matemáticos adoptados se introducen a partir de tareas para el aprendizaje en las que se persigue el desarrollo de habilidades específicas*. (MEP, 2012; p. 26). Sin embargo, las el proceso que vincula el desarrollo de las habilidades específicas, las capacidades cognitivas y la competencia matemática es complejo, y de difícil identificación; pero aún más difícil es evaluar.

Producto de lo anterior, en el documento se aclara que ni los conocimientos matemáticos ni las habilidades específicas generan por sí solas, capacidades cognitivas más amplias que puedan encaminar hacia la competencia matemática. Para ello se requiere una acción de aula capaz de favorecer dicho propósito. Para ello se requiere diseñar lecciones con situaciones de aprendizaje que permitan la realización de los procesos matemáticos.

Sin embargo, no solamente el diseño de situaciones de aprendizaje es importante, sino también la labor docente durante la ejecución de estas situaciones. En este sentido, el docente deber ser un apoyo y el complemento ideal para la labor que realizan los estudiantes.

Por lo anterior, el diseño de las actividades didácticas y la labor docente en el aula son elementos claves para la realización de los procesos matemáticos. Esta labor requiere de un proceso de planificación de las lecciones, para poder generar una mediación pedagógica dirigida a la obtención de habilidades específicas y, por ende, se desarrollen capacidades básicas y la competencia matemática.

Para lograr este fin, tal como se ha citado previamente, la estrategia didáctica propuesta es la resolución de problemas, la cual se adapta plenamente a los propósitos previos. Al respecto se indica:

> *Colocada ya en contexto educativo, la resolución de problemas debe integrar al menos dos propósitos:*
>
> - *aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas,*
> - *aprendizaje de los contenidos matemáticos (conceptos y procedimientos) a través de la resolución de problemas*. (MEP, 2012; p. 32)

Por medio del primer propósito se hace énfasis en los medios (heurísticas, estrategias y métodos) que requiere un problema para ser exitoso en la acción educativa. Mientras que con el segundo propósito se propone generar una acción de aula que posibilite generar un aprendizaje matemático vinculado con un contexto específico. Se incorporan, preferiblemente, problemas reales, en entornos físicos y socioculturales.

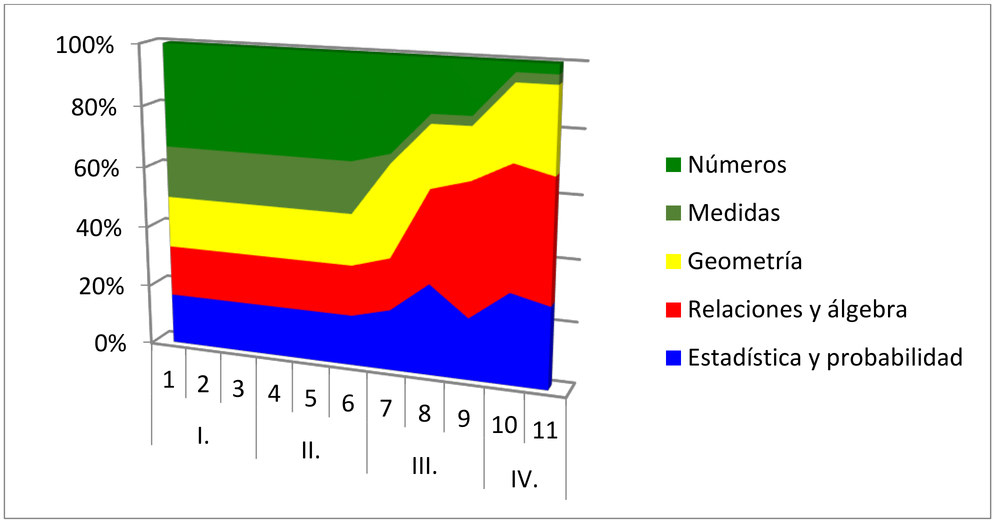
> *En el enfoque que se beneficia aquí, la escogencia de un problema para el desarrollo de una lección debe estar establecida por los propósitos de aprendizaje de un conocimiento matemático y el desarrollo educativo que se realiza, y no, por ejemplo, por las estrategias o técnicas que supone para su solución. Aunque, sin duda, existe relación entre un problema rico en posibilidades de solución y los fines de un buen aprendizaje.*
>
> *(...)*
>
> *Los contextos donde un problema puede emerger pueden ser diversos. Una situación de salud en el país, asuntos económicos, ambientales, culturales. Contextos escolares, familiares, comunitarios, profesionales, científicos. Pero también un problema puede diseñarse a partir de pasajes de la historia de las Matemáticas, de una representación artística donde es posible encontrar matemáticas, incluso un juego, un rompecabezas, un video, etc.*
>
> *Un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos, implicando al menos tres cosas:*
>
> - *que se piense sobre ideas matemáticas sin que ellas tengan que haber sido detalladamente explicadas con anterioridad,*
> - *que se enfrenten a los problemas sin que se hayan mostrado soluciones similares,*
> - *que los conceptos o procedimientos matemáticos a enseñar estén íntimamente asociados a ese contexto.* (MEP, 2012; p. 34)

Además, se indica en el documento que la complejidad de un problema debe posibilitar una acción cognitiva, no pueden ser simples acciones rutinarias. *Se puede poner en los siguientes términos: una tarea matemática constituye un problema si para resolverla el sujeto debe usar información de una manera novedosa. En el caso que el individuo pueda identificar inmediatamente las acciones necesarias se trata de una tarea rutinaria.* (MEP, 2012; p. 34)

3. Estadística y Probabilidad en los programas de estudio

En los programas actuales, el área de *Estadística y Probabilidad* adquiere un mayor relieve del que se le había venido dando en los planes de estudio previos. Desde su inclusión en los programas de Matemáticas de 1995, estos temas se incluyeron parcialmente en Primaria; pero además no se le dio continuidad en la secundaria.

Programas oficiales de Matemáticas, peso relativo de las diferentes áreas por año y ciclo



Fuente: Ruiz, A. Fundamentos Teóricos de los Programas de Estudio de Matemática. Conferencia impartida en II Encuentro Provincial de Educación Matemática, Filadelfia, Guanacaste, 2012.

Con la inclusión de una mayor cantidad de conceptos de Estadística y Probabilidad dentro de los programas vigentes, se ha pretendido favorecer el pensamiento aleatorio y el desarrollo de habilidades dirigidas a abordar situaciones de incertidumbre en la vida cotidiana. Pero también la generación de habilidades para utilizar evidencia estadística en la resolución de problemas contextuales. Con esto se propicia lograr una cultura estadística en los jóvenes, tal como ha sido resaltado por Batanero (2004), al fundamentar la necesidad de incluir el razonamiento estocástico en la educación primaria y secundaria.

La importancia de los análisis estadísticos se fundamenta en la resolución de problemas vinculados con datos, en donde el principio de variabilidad es el eje conductor que visualiza la importancia de empleo de diferentes técnicas para el manejo de información. Desde este punto de vista, se atribuye como principal función de la Estadística la de identificar, describir e interpretar el patrón de variación de grupos de datos, con el propósito de descubrir el mensaje que proporcionan en función del problema que les dio origen. Para ello, se discute la implementación de diferentes técnicas de recolección y resumen de información, así como la presentación por medio de cuadros, diagramas o gráficos, cálculo y uso de medidas estadísticas de posición y variabilidad. En esta etapa, se promueve la adquisición del razonamiento estadístico que trasciende lo procedimental, tal como lo señalaron Wild y Pfannkuch (1999), los cuales establecieron que para la promoción del razonamiento estadístico deben tomarse en cuenta cinco componentes básicos:

i. *Reconocer la necesidad de los datos*: una gran cantidad de problemas de la cotidianidad deben ser analizados considerando información pertinente y válida, que otorga evidencia concreta para decidir.

ii. *Transnumeración*: básicamente consiste en cambiar las representaciones de los datos para favorecer una mejor comprensión en relación con el mensaje que transmiten. En esta etapa, se pasa de datos brutos a diferentes representaciones, en busca de aquella que pueda dar un mejor significado para el análisis que se realiza.
iii. *Variación*: resulta de vital importancia que los estudiantes puedan percibir la variabilidad que se presenta en los datos, la cual genera la incertidumbre sobre el mensaje que comunican. La función principal de la Estadística consiste establecer estrategias para explicar esta variabilidad y el impacto que provoca en cada caso.
iv. *La Estadística como un conjunto de modelos:* los diferentes objetos estadísticos, sea un cuadro, un gráfico, una medida u otros más elaborados, tienen como propósito utilizar los datos para modelar su patrón de variabilidad. Se requiere lograr la sensibilidad para diferenciar los modelos de acuerdo con el tipo de dato, pero guardando las diferencias entre cada modelo y los datos mismos.
v. *Contexto, Estadística y Síntesis*: se indica que el razonamiento estadístico se establece al momento en que se vincula el problema generado de un contexto particular con el modelaje estadístico para realizar la síntesis de los hallazgos. Al momento de hacer estadística se puede estudiar detalladamente el comportamiento de los datos para determinar los patrones, pero dichos patrones deben responder al contexto de los datos.

Aunque son conceptos globales, resulta de fundamental importancia tomarlos en cuenta al momento de formular problemas para la enseñanza de la disciplina.

Por su parte, para el estudio de la probabilidad, además de la valoración de los conceptos anteriores vinculados con el razonamiento estadístico, se propone iniciar con las ideas primarias que los estudiantes pueden tener sobre la disciplina y los diferentes conceptos que se relacionan con ella. En este sentido, la construcción del concepto de probabilidad se promueve a partir de las ideas intuitivas (denominadas intuiciones primarias) con que los niños ingresan a la escuela a partir de ciertos juegos. Con el análisis de estas intuiciones primarias, la acción educativa debe favorecer intuiciones secundarias mejor articuladas y más fundamentadas. Esta propuesta se fundamenta en los estudios de Fischbein (1975) en este campo. De esta manera, se procura que paulatinamente se vayan incorporando conceptos más elaborados tales como eventos más y menos probables, eventos equiprobables, resultados simples a favor de un evento, con los cuales sirven de base para construir el concepto clásico o laplaciano de probabilidad. Estos conocimientos básicos, deben permitir que hacia la secundaria se formalicen otros conocimientos como, la definición frecuencista de probabilidad, la ley de los grandes números, los axiomas de Kolmogorov y algunas propiedades que se desligan de ellos. En síntesis, por medio del estudio de las probabilidades se pretende modelar las situaciones aleatorias con el propósito de favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

4. Propuesta de taller:

Mediante el trabajo en grupos se plantean los siguientes problemas

PROBLEMA 1

A) *Debido a los problemas de infraestructura vial que aquejan nuestro país, una organización internacional decidió brindar apoyo a uno de los cantones para que invierta en la construcción de carreteras, puentes peatonales, pasos a desnivel, entre otros. Para ello brindará una donación de $500 millones. Pero para hacer más justa la escogencia, decidió seleccionar aleatoriamente al cantón que iba a ser beneficiado con dicha donación mediante el siguiente procedimiento.*

En una tómbola se incluyen 81 bolitas idénticas en tamaño y peso. Cada una tiene el nombre de uno de los cantones de Costa Rica. Se selecciona una bolita al azar y el cantón seleccionado será aquel cuyo nombre está escrito en la bolita.

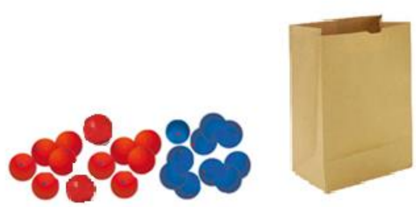
De acuerdo con la información anterior:

a) ¿Cuál cantón tiene más posibilidades de recibir la donación, el cantón de San José que actualmente cuenta con 287 619 habitantes o el cantón de Dota en el cuál viven 6946 personas?
b) ¿Es posible que sea seleccionado el cantón de Flores ubicado en Heredia si éste es el cantón del país que posee la menor cantidad de km^2 de territorio?
c) ¿Cuál cantón de Costa Rica tiene menos probabilidad de ser elegido para recibir la donación? ¿Cuál tiene más posibilidades?
d) ¿Cuál es la justificación que fundamenta las respuestas dadas a las preguntas a), b) y c)?

B) *Se ha decidido donar el dinero a una de las provincias de Costa Rica, para ello se selecciona aleatoriamente una de las 81 bolitas (cada bolita contiene el nombre de un cantón), y la provincia beneficiada será aquella a la que pertenece el cantón seleccionado. ¿Es equitativa esta forma de seleccionar una de las provincias? Justifique su respuesta.*

C) Tomando como referencia el análisis efectuado en los problemas anteriores, proceda a resolver las siguientes situaciones*:*

a) Suponga que las siguientes bolas se incluyen en la bolsa de papel:



Si se extrae al azar una de las bolas, *a1) ¿Cuál color es más probable? Justifique su respuesta.*

a2) ¿Qué cambios realizarías para que los eventos: extraer una bola azul y extraer una bola roja sean igualmente probables?

b) Considere ahora cinco bolsas como las que se muestran a continuación (todas las bolas son del mismo tamaño).

Caso 1

Caso 2

Caso 3

caso 4

Caso 5

b1) ¿En cuál de los cinco casos es más probable seleccionar una bola roja? Justifique su respuesta.

b2) Si se consideran únicamente los casos 1, 2 y 3 ¿En Cuál de los tres es más probable obtener una bola roja?

Análisis del problema 1

Propósito de la actividad: Esta actividad se ideó para introducir la definición clásica o Laplaciana de Probabilidad. Mediante la solución de tres problemas, el lector estableció una estrategia para determinar la posibilidad de ocurrencia de un evento y su comparación con otros.

Conocimientos y habilidades: octavo año

Conocimientos	**Habilidades**
Eventos Resultados favorables a un evento Eventos simples y compuestos Evento seguro, evento probable, evento imposible.	Determinar eventos y sus resultados a favor dentro de una situación aleatoria. Clasificar eventos en simples o compuestos. Identificar eventos seguros, probables e imposibles en una situación aleatoria determinada.

Probabilidad Eventos más probables, menos probables e igualmente probables Definición clásica (o laplaciana)	Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento. Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resulta- dos. Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la teoría de probabilidad.

En los problemas A) y B) el total de casos posibles es el mismo (81 cantones), por lo que el criterio empleado para resolverlos consiste en determinar el número de resultados a favor de cada evento. Éste es el principio básico que establece cuáles sucesos son más o menos probables en diferentes situaciones -juegos y situaciones aleatorios- de la vida real. Sin embargo, el problema C) propone situaciones en las que el total de casos no es el mismo. Para resolver este problema debe calcularse la razón entre la cantidad de resultados a favor de cada evento y el total de casos posibles. Éste es precisamente el principio que fundamenta el concepto clásico de probabilidad.

Ejes disciplinares incluidos en los programas de estudio: A través de este problema se integran los siguientes ejes disciplinares:

- *Resolución de Problemas*. Los estudiantes deben idear estrategias para resolverlo. No es un problema cuya solución es inmediata.
- *Uso de la tecnología*. Podría emplearse la calculadora como una herramienta para simplificar los cálculos.
- *Contextualización activa*. El problema está relacionado con situaciones de la vida cotidiana como los problemas de infraestructura que tiene el país o bien la selección de un cantón de Costa Rica, es decir, se utilizan elementos del contexto.
- *Actitudes y creencias*, particularmente:
    - Perseverancia
    - Confianza en la utilidad de las matemáticas
    - Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas
    - Participación activa y colaborativa
- *El uso de la historia de las matemáticas*. En este caso se utiliza la historia para justificar la importancia del concepto de equiprobabilidad.

Procesos

En la resolución de los tres problemas pueden activarse los cinco procesos matemáticos que se proponen en los programas de estudio. *Razonar y argumentar* se manifiesta al momento de argumentar los resultados obtenidos. *Plantear y resolver problemas* pues su resolución no es trivial y se debe diseñar una estrategia y métodos adecuados para resolverlo. Por ejemplo hay que valorar si la estrategia de determinar los resultados simples favorables de cada evento les permitirá resolver el problema. *Comunicar* se activa cuando se expresan de forma oral las estrategias que les permitieron resolver el problema así como los resultados y argumentos matemáticos que justifican la solución.*Conectar* debido a que en los problemas se emplean habilidades de las áreas *Números* (comparar fracciones propias utilizando los símbolos <, > o = o mediante su expansión decimal) y *Relaciones y Álgebra* (analizar la proporción entre dos cantidades numéricas). Por último, *Representar* se evidencia pues se debe idear una forma de representar la noción matemática "12 de las 22 bolas son rojas" la cual puede representarse mediante la fracción propia 12/22 o mediante el número decimal 0,54.

Elementos de la organización de la lección

Etapa 1: El aprendizaje de conocimientos

Este problema se emplea para la generación de nuevo conocimiento, mediante su implementación se pretende que los estudiantes adquieran las habilidades vinculadas con la identificación de eventos más y menos probables, o eventos equiprobables; mediante la identificación del número de resultados a favor de cada evento. Del mismo modo, se posibilita la identificación de la probabilidad de un evento como la razón de resultados a favor entre el total de resultados, siempre que dichos resultados sean equiprobables, concepto que tradicionalmente se conoce como definición clásica o laplaciana de probabilidad.

1. **Propuesta de un problema**

Se recomienda presentar los tres problemas de forma independiente, es decir, hacer un cierre del problema A) antes de presentar el B). De la misma forma resolver el problema C) después de presentar una solución al B). Esto permitirá guiar al estudiante a la construcción de la definición clásica de probabilidad.

2. **Trabajo estudiantil independiente**

Se espera que los estudiantes identifiquen estrategias para resolver los problemas. Por ejemplo en el problema A) deben identificar que en la selección del cantón no importa su extensión o la cantidad de habitantes que poseen, sino que todos tienen la misma posibilidad de ser elegidos. Es decir los eventos son equiprobables.

En el caso del problema B), los eventos no son equiprobables pues el número de cantones por provincia no es el mismo. La siguiente tabla muestra la cantidad de cantones por provincia.

Costa Rica: Número de Cantones por provincia. 2014

Provincia	No. de cantones
San José	20
Alajuela	15
Cartago	8
Heredia	10
Puntarenas	11
Guanacaste	11
Limón	6
Total	**81**

Es evidente que la provincia de San José tiene más posibilidades de ser elegida pues es la que tiene mayor cantidad de cantones (20) y la que menos tiene es Limón, ya que es la que tiene menor cantidad (6).

En el tercer problema, se espera que los estudiantes, después de reflexionar pueden deducir que para realizar un análisis comparativo entre los diferentes casos, se debe considerar no solamente la cantidad de bolas rojas, sino también el total de bolas rojas y azules en cada caso. Para ello se espera que puedan establecer la relación entre estos dos datos, es decir la razón de bolas rojas entre el total de bolas por bolsa, de modo que la mayor probabilidad de bola roja se obtiene en el caso en que dicha razón tome el mayor valor numérico. Así, aunque en los casos 1 y 3 las bolsas tienen la misma cantidad de bolas rojas (12), la posibilidad de seleccionar una bola roja en estos casos no es la misma, pues la cantidad total de bolas es diferente (22 y 25 respectivamente). La bolsa del segundo caso tiene menos bolas rojas (10), pero el total de bolas también es menor que en los casos 1 y 3 (18). En el cuarto caso hay la misma cantidad de bolas rojas que azules (es decir es igualmente probable seleccionar una bola roja que una azul) y en el quinto no hay bolas rojas, en este caso específico, se espera que el estudiante identifique que es imposible seleccionar una bola roja.

Para determinar en cuál de los casos es más probable seleccionar una bola roja los estudiantes deben buscar la proporción de bolas rojas en cada uno de ellos, la cual se muestra a continuación:

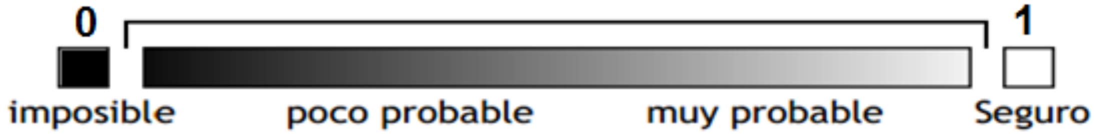
Caso	**Proporción**
1	12/22=0,55
2	12/25=0,48
3	10/18=0,56
4	12/12=1
5	0/15=0

De acuerdo a los datos de la tabla anterior

a1) Si se consideran los cinco casos es más posible seleccionar una bola roja en el cuarto caso

b2) Si se consideran los casos 1, 2 y 3 en el tercer caso es más posible seleccionar una bola roja.

Los casos 4 y 5, permiten deducir también que la probabilidad del evento seguro es uno y la probabilidad del evento imposible es cero. Con ello, se deduce también que la probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre cero y uno.



3. Discusión interactiva y comunicativa

Se espera que los estudiantes compartan con sus compañeros los hallazgos obtenidos. Se debe prestar atención a las estrategias utilizadas y a posibles errores que puedan surgir

4. Clausura o cierre

El docente enuncia el concepto de probabilidad clásica. Puede emplearse el problema para enunciar las reglas básicas de probabilidad.

PROBLEMA 2

Ante las sequías reiteradas que se han venido presentando en diferentes zonas del país, se hace necesario propiciar un proceso de ahorro de este líquido. Proceda a leer el siguiente artículo:

EL CONSUMO DE AGUA POR PERSONA EN LOS PAÍSES DESARROLLADOS ALCANZA LOS 300 LITROS FRENTE LOS 80 QUE RECOMIENDA LA ORGANIZACIÓN MUNDIAL DE LA SALUD (OMS)

El consumo de agua por persona en los países desarrollados puede alcanzar los 300 litros diarios, ante los 25 que se consumen en zonas subdesarrolladas y los 80 litros que recomienda la Organización Mundial de la Salud (OMS) para las necesidades vitales e higiene personal. No obstante, el consumo medio mundial de litros de agua por persona es de 1 800 litros diarios si se suman las actividades en las que se utiliza el agua para la agricultura y ganadería un 75 por ciento, e industria un 8 por ciento.

Para concienciar a los ciudadanos de la necesidad de adoptar una serie de hábitos de ahorro de agua, el grupo Eroski y la organización mundial de conservación WWF/Adena han puesto en marcha la campaña "El agua, un recurso escaso, natural e imprescindible".
Eroski pretende sensibilizar a la población hacia una cultura respetuosa con el agua, posibilitando un ahorro efectivo de un recurso tan escaso a través de acciones de sensibilización para prevenir el derroche del agua y mostrando medidas que optimicen su aprovechamiento, con el propósito de que la población también se implique en el proyecto.

AHORRO DEL AGUA
Los estudios revelan que los seres humanos pueden llegar a desperdiciar una considerable cantidad de agua sin consumirla. Uno de los casos más alarmantes es el de los grifos deteriorados que permiten fugas de hasta10 gotas por minuto provocando un desperdicio anual de 2 000 litros de agua.

El uso diario de la ducha[6], en vez del baño[7], contribuye también de sobremanera a cimentar el ahorro de agua, pues pueden ahorrarse hasta 7 300 litros de agua por persona al año. Además, si la ducha cuenta con economizadores de agua, la cifra de litros ahorrados asciende hasta los 14 600. Otro de los casos en los que se pueden ofrecer datos es en el capítulo de las cisternas, pues la instalación de

El agua es un recurso escaso, cada dos minutos muere un ser humano por falta de agua potable, algo difícil de comprender desde el mundo civilizado, que obtiene el líquido elemento sólo con abrir el grifo. Además, 20 por ciento de las especies de agua dulce corren peligro de extinción, víctimas de la contaminación o de la disminución de reservas.
La sequía que afecta a España no sólo se debe a una desigual distribución de precipitaciones entre la zona atlántica y la mediterránea, sino también al consumo desequilibrado que se realiza. España es el tercer país del mundo con mayor consumo por habitante, aunque en los últimos 75 años se ha producido una reducción del 30 por ciento del caudal circulante en los ríos, sólo 5 por ciento es atribuible a causas naturales.

HÁBITOS DE CONSUMO RESPONSABLE
La representante de WWF/Adena, Lucía De Stefano, señaló que "muchas veces no somos conscientes del impacto al medio ambiente que tienen nuestras acciones diarias". Por ello, se hace una serie de recomendaciones que según De Stefano "deben convertirse en hábitos diarios e interiorizarlos".

Entre ellos destacan evitar verter productos de limpieza por el desagüe, ya que dificultan la posterior depuración de las aguas; en el jardín regar al amanecer o al anochecer, ya que es cuando el agua tarda más en evaporarse, y escoger plantas autóctonas que consumen menos agua; cerrar el grifo al lavarse los dientes o los platos; tirar de la cadena del inodoro sólo cuando sea necesario y no utilizarlo como papelera; reparar los grifos que gotean con urgencia; ducharse en vez de bañarse; lavar la fruta y la verdura en un cuenco; o utilizar el lavavajillas y la lavadora sólo a plena carga.
Lucía De Stefano indicó que "el agua tenemos que utilizarla bien y sólo si la necesitamos", e incidió en la importancia de no abusar de jabones y detergentes, ya que estos "contaminan el agua", y aunque pase por la depuradora "nunca la devuelve a los ríos en las mismas condiciones en que salieron de ellos".

De Stefano concluyó recordando que "el agua viene de ríos y vuelve a ellos, son arterias de vida en las que viven muchos organismos que participan en una cadena de vida que tenemos que conservar y transmitir a generaciones futuras".

Tomado de la página Web

[6] Tomar un baño en la ducha.
[7] Tomar un baño en la tina.

dispositivos de ahorro pueden lograr a que no se tiren 7 600 litros de agua por persona. *En la actualidad, 26 países sufren la escasez de agua, pero la previsión es que para el 2 025 sean 41 los países que presenten un déficit crónico de agua, afectando a 2 800 millones de personas, 35 por ciento de los 8 000 que para entonces habitarán el planeta.*	*http://terranoticias.terra.es/articulo/html/av2860416.htm*

En dos ciudades de Costa Rica, se seleccionaron muestras aleatorias de 26 personas cada una, de distintos estratos sociales y se midió la cantidad de agua que consumieron en un día cualquiera (en hectolitros). A continuación se presenta dicha información.

Ciudad 1: Consumo de agua por persona en hectolitros, para una muestra de 26 personas

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Consumo	0,69	0,71	0,76	0,76	0,81	1,00	1,03	1,17	1,17	1,31	1,35	1,35	1,57
Persona	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Consumo	1,93	1,93	1,99	2,09	2,62	2,66	3,27	3,29	3,37	3,47	3,69	4,05	4,15

Ciudad 2: Consumo de agua por persona en hectolitros, para una muestra de 26 personas

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Consumo	0,89	0,90	0,92	0,93	1,03	1,22	1,29	1,36	1,36	1,41	1,53	1,55	1,71
Persona	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Consumo	1,80	2,00	2,12	2,22	2,31	2,39	2,45	2,78	3,12	3,14	3,22	4,99	6,20

De acuerdo con dicha información, resuelva lo siguiente:

1) *Construya un polígono de frecuencia porcentual, en cada caso, utilizando la siguiente distribución, que debe ser completada previamente*

Consumo diario de agua por persona para una muestra aleatoria de las ciudades 1 y 2(en hectolitros)

	Ciudad A		Ciudad B	
Consumo de agua	**Número de personas**	**Porcentaje de personas**	**Número de personas**	**Porcentaje de personas**
De 0,50 a menos de 1,00	5			
De 1,00 a menos de 1,50	7			
De 1,50 a menos de 2,00	4			
De 2,00 a menos de 2,50	1			
De 2,50 a menos de 3,00	2			
De 3,00 a menos de 3,50	4			
De 3,50 a menos de 4,00	1			
De 4,00 a menos de 5,00	2			
Más de 5,00	0			
Total	**26**			

2) *Utilice diferentes medidas estadísticas y el gráfico anterior, para argumentar en cuál de las muestras se presentó un consumo de agua que se aleja en mayor medida de lo recomendado por la Organización Mundial de la Salud.*

3) *¿Constituye la media aritmética o promedio una medida estadística de tendencia central adecuada para resumir estos datos? Razone su respuesta. En caso negativo, ¿cuál sería una mejor medida de tendencia central y por qué?*

4) *Construya un diagrama de cajas y con base en toda la información recolectada responda ¿En cuál de las muestras fue más homogéneo el consumo de agua? ¿Por qué? Analice nuevamente el resultado dado en la pregunta 2).*

5) *De acuerdo con la lectura realizada, ¿qué tan adecuado es el consumo de agua en estas dos ciudades, basados en las muestras observadas? Qué recomendaciones daría usted para mejorar esta condición.*

Análisis del problema 2

Propósito de la actividad: Su propósito fue no sólo utilizar las medidas estadísticas de posición y variabilidad para caracterizar un conjunto de datos, si no destacar la importancia que tiene el combinar estas medidas y utilizar representaciones gráficas para analizar integralmente un conjunto de datos vinculados con un problema particular.

Conocimientos y habilidades: décimo año

Conocimientos	Habilidades específicas
Medidas de posición • Moda • Media aritmética • Mediana • Cuartiles • Extremos - Máximo - Mínimo	2. Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas. 3. Identificar la ubicación aproximada de las medidas de posición de acuerdo con el tipo de asimetría de la distribución de los datos. 4. Utilizar la calculadora o la computadora para calcular las medidas estadísticas correspondientes de un grupo de datos.

Conocimientos y habilidades: undécimo año

Conocimientos	Habilidades específicas
Medidas de variabilidad • Recorrido • Recorrido intercuartílico • Variancia • Desviación estándar **Representación gráfica** • Diagrama de cajas	1. Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos. 2. Reconocer la importancia de la variabilidad de los datos dentro de los análisis estadísticos y la necesidad de cuantificarla. 3. Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido, el recorrido intercuartílico, la variancia o la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan. 5. Emplear la calculadora o la computadora para simplificar los cálculos matemáticos en la determinación de las medidas de variabilidad. 6. Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos. 7. Resolver problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de variabilidad.

Ejes disciplinares incluidos en los programas de estudio: A través de este problema se integran los siguientes ejes disciplinares

- *Resolución de Problemas*. Los estudiantes deben aplicar sus conocimientos en medidas estadísticas para la resolución de este ejercicio y dado que no es trivial los argumentos que justifican las respuestas a cada una de las preguntas, puede ser ubicado en un nivel de *Reflexión*.
- *Uso de la tecnología*. Para el cálculo de las medidas podría emplearse la calculadora o una hoja de cálculo como una herramienta para simplificar los cálculos y hacer énfasis en el análisis.
- *Contextualización activa*. El ejercicio está relacionado con una problemática que no es ajeno al país: el consumo responsable del agua. El ejercicio en sí a parte de permitir la apropiación del conocimiento que se estipula, pretende crear conciencia sobre el uso racional de nuestros recursos naturales (el agua).
- *Actitudes y creencias*, particularmente:
    - *Perseverancia*. Durante el análisis y la argumentación que cada estudiante propone para dar respuesta a las interrogantes planteadas.
    - *Confianza en la utilidad de las matemáticas*. Viendo en ellas un medio que nos permite interpretar, caracterizar y modelar la realidad para la toma de decisiones a futuro.
    - *Participación activa y colaborativa*. A la hora en que los estudiantes se organizan para la realización de cálculos, la confrontación de ideas, etc.

Procesos

En la resolución de este problema se activaron los cinco procesos matemáticos que se proponen en los programas de estudio.

- *Razonar y argumentar*. Se manifiesta en la resolución de las preguntas 2, 3,4, y 5, donde se solicita al estudiante una justificación de sus respuestas.
- *Plantear y resolver problemas*. Es inherente dada la naturaleza de este ejercicio.
- *Comunicar:* Se activa cuando los estudiantes comunican los resultados o respuestas, esto bajo el supuesto de que el docente habilite un espacio para dicha discusión.
- *Conectar*. Algunas áreas presentes son *Números* y *Relaciones y Álgebra* (uso de fórmulas).
- *Representar*. Se evidencia al utilizar representaciones gráficas y tabulares para argumentar y justificar los resultados o respuestas a las interrogantes planteadas.

Elementos de la organización de la lección

Movilización y aplicación de los conocimientos: Este problema-ejercicio corresponde a esta etapa pues se pide la aplicación directa de las medidas estadísticas para su resolución. No se pretende introducir un nuevo conocimiento.

Sin embargo, el Programa de Matemáticas es flexible en cuanto a que el docente puede organizar su lección de acuerdo a la etapa 1 (aunque se esté en la etapa 2). De ahí que a continuación se presenta una propuesta para desarrollar esta actividad siguiendo los cuatro momentos que se proponen en la etapa 1.

Se recomienda al docente estar pendiente de que el estudiante realiza la lectura del artículo pues es conocido el poco hábito de lectura presente en ellos. Motivarlos a que se tomen su tiempo para entender la problemática que ahí se describe. Realizarle preguntas que permitan diagnosticar su comprensión sobre las ideas centrales presentes en ellas.

Con este problema se procura aplicar los conocimientos concernientes al uso de medidas de tendencia central y de variabilidad para caracterizar un conjunto de datos en un contexto cercano al estudiante. Se procura que los estudiantes se organicen en subgrupos para poder generar espacios de discusión en torno a la resolución del problema.

Se espera que los estudiantes puedan discriminar cuál o cuáles medidas estadísticas permiten responder de manera eficiente a cada uno de los planteamientos propuestos. A continuación se presentan los detalles que se esperan observar durante la etapa de resolución:

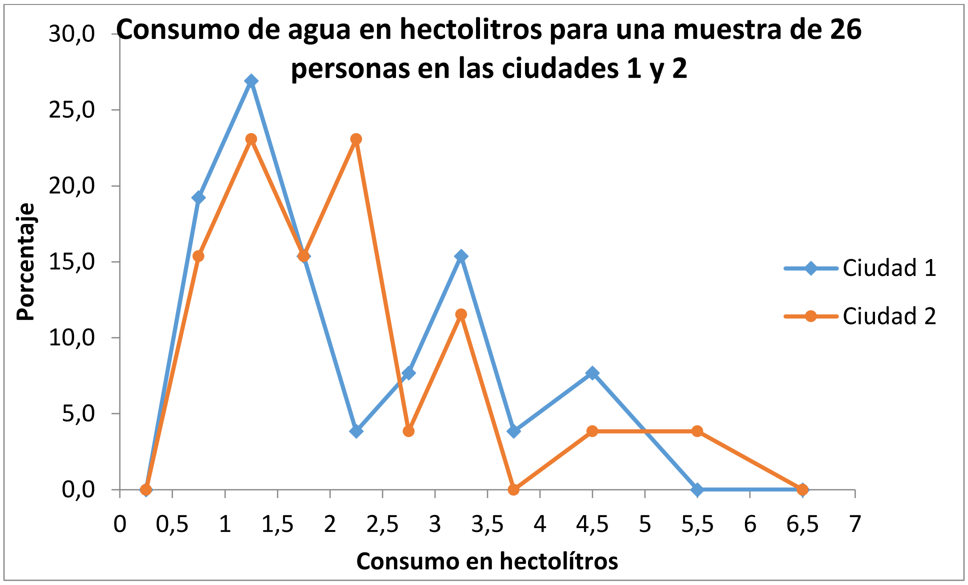
Pregunta 1

Cuando los estudiantes completan la distribución suministrada, se obtiene:

Consumo diario de agua por persona para una muestra aleatoria de las ciudades A y B (en hectolitros)

	Ciudad A		**Ciudad B**	
Consumo de agua	**Número de personas**	**Porcentaje de personas**	**Número de personas**	**Porcentaje de personas**
De 0,50 a menos de 1,00	5	19,2	4	15,4
De 1,00 a menos de 1,50	7	26,9	6	23,1
De 1,50 a menos de 2,00	4	15,4	4	15,4
De 2,00 a menos de 2,50	1	3,8	6	23,1
De 2,50 a menos de 3,00	2	7,7	1	3,8
De 3,00 a menos de 3,50	4	15,4	3	11,5
De 3,50 a menos de 4,00	1	3,8	0	0,0
Más de 4,00	2	7,7	1	3,8
Total	0	0,0	1	3,8
	26	**100**	**26**	**100**

Se puede confeccionar previamente plantillas que permitan a los estudiantes agilizar la elaboración de los polígonos de frecuencia y que ellos se enfoquen necesariamente en el trazo y la obtención de las marcas de clase (puntos medios). Cuando los estudiantes las elaboren, se obtendría una representación como la siguiente:



Pregunta 2

Para el cálculo de algunas medidas estadísticas, los estudiantes podrán hacer uso de la calculadora científica o una hoja de cálculo cuando sea posible. Lo importante es el análisis de dichas cantidades y la discusión que de ellas se pueda generar. No hay que valorar mayoritariamente la labor de cálculo. A continuación se detallan dichas medidas:

CIUDAD 1	
MÍNIMO	0,69
MÁXIMO	4,15
RANGO	3,46
PROMEDIO	2,01
MEDIANA	1,750
DESV	1,14
Cuartil 1	1,02
Cualtil 3	2,96

CIUDAD 2	
MÍNIMO	0,89
MÁXIMO	6,20
RANGO	5,31
PROMEDIO	2,11
MEDIANA	1,755
DESV	1,26
Cuartil 1	1,26
Cualtil 3	2,42

Si se considera el consumo medio o mejor denominado el consumo promedio, se tiene que en la ciudad 2 se produjo un mayor consumo. No obstante, al analizar el consumo mediano los resultados son prácticamente idénticos. Por esta razón se hace necesario realizar un análisis más integral, pues las representaciones gráficas generadas en el inciso anterior, tampoco evidenciaron un patrón claro. Pues tanto el mínimo consumo como el consumo máximo son mayores en la ciudad 2. Pero el cuartil 3 es mucho menor, por lo que la confusión se mantiene.Ante esta situación, los estudiantes pueden ofrecer diferentes respuestas muchas de ellas antagónicas entre sí, por lo que el docente debe estar atento para ofrecer la recomendaciones pertinentes.

Pregunta 3

En los casos en que existen importantes diferencias entre la mediana y el promedio, es una evidencia que existen valores extremos que provocan que el promedio se sesgue hacia esos valores extremos. En el problema planteado, existen valores de consumo de agua de unas pocas personas que sobrepasa el consumo de las demás personas, por ello, la media aritmética o promedio no es una medida adecuada de la tendencia central de los datos. En estos casos la mejor medida de tendencia central es la mediana, dado que indica el valor central, pues el 50% de las personas tiene un consumo inferior o igual y el otro 50% un consumo mayor o igual a dicho valor.

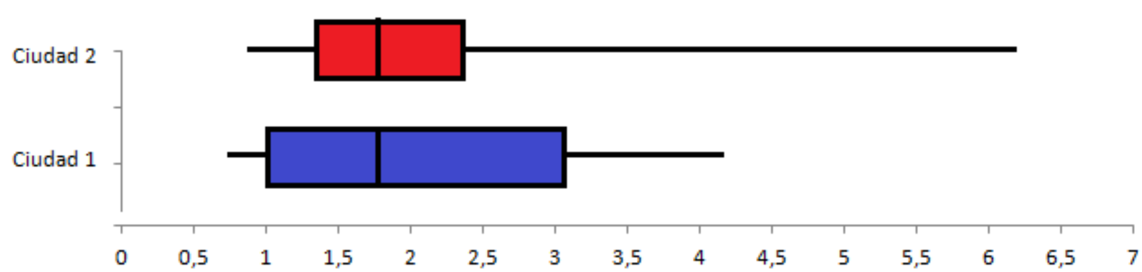
Por otro lado, la moda no es una medida que permita realizar comparaciones, en el sentido que en la ciudad 1 hay varias modas, mientras que en la ciudad 2 solamente una. Al agruparlos datos, pareciera evidenciarse que los datos presenta más de una moda.

Pregunta 4

Desde el punto de vista de la variabilidad, si se analizan los polígonos de frecuencias, el rango y la desviación estándar, todas muestran una mayor variabilidad en el consumo de la ciudad 2.

No obstante, para analizar la homogeneidad de los datos, resulta de relevancia analizar el diagrama de cajas, el cual se presenta a continuación:

Consumo de agua en hectolitros para una muestra de 26 personas en las ciudades 1 y 2

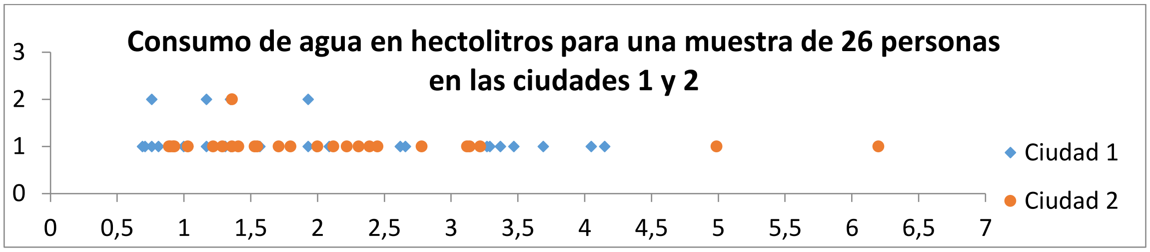


Puede notarse que a pesar de los resultados anteriores, el gráfico es contundente en indicar que la mayor variabilidad producida en la ciudad 2, obedece al 25% de la familias que más consumen agua, mientras que si se considera el 75% de las familias que menos consumen agua, los datos son más homogéneos en la ciudad 2.

Este resultado es relevante para efectos del análisis integral del problema, pues se evidencia que, aunque en ambas muestras el consumo de agua está muy por encima de lo que recomienda la Organización Mundial de la Salud, en la ciudad 2,para una gran mayoría de personas el consumo es inferior al de la ciudad 1, pero existen algunas personas que tienen un consumo mucho más alto, que afecta drásticamente las mediadas estadísticas, especialmente el promedio y la desviación estándar.

Lo anterior refleja, que dentro de los análisis estadísticos, no es suficiente analizar una única medida, sino que se requiere llevar a cabo un análisis integral.

El análisis anterior, puede ser visualizado más simplemente con un diagrama de puntos, el cual refleja lo que se ha indicado previamente.



Pregunta 5

Si consideramos el consumo diario de agua propio de un país subdesarrollado como el nuestro y el consumo que recomienda la OMS, se puede observar que ambas muestras evidencian un uso inadecuado de este preciado líquido. El consumo mínimo de agua en la muestra de la ciudad B (0,89 hl) supera a lo recomendado por esta organización (0,80 hl) y que para el caso de la muestra de la ciudad A no está muy lejos. En otros términos, casi la totalidad de las personas entrevistadas en una u otra ciudad consumen más de lo que recomienda la OMS y de lo que corresponde a un país subdesarrollado.Al mismo tiempo, se espera que los estudiantes puedan ofrecer algunas recomendaciones tendientes a disminuir el consumo de agua.

Se espera que los estudiantes compartan con sus compañeros los hallazgos obtenidos. Se debe prestar atención a la forma en que los estudiantes justifican sus respuestas para garantizar que todas ellas están bien fundamentadas. Aquí, las representaciones gráficas les permitirán comprender más globalmente la situación.

Al final, el docente rescata las siguientes ideas:

- La utilidad de las medidas estadísticas en la caracterización de un conjunto de datos.
- Es importante considerar la distribución de los datos para garantizar que las medidas utilizadas son realmente representativas.
- Un análisis estadístico comparativo debe considerar las medidas de posición, de variabilidad y su relación con el patrón de variabilidad de los datos
- La mediaaritmética y la desviación estándar son muy sensibles a la presencia de valores extremos atípicos, pero puede compensarse observando la mediana, los cuartiles y un diagrama de cajas.
- La moda suela ser volátil y no representa bien al conjunto de datos
- Además de lo que se ha indicado previamente.

Conclusión

Con el taller planteado, se ha pretendido ejemplificar a los docentes de Matemáticas que en la implementación de los programas de estudio de esta área es posible integrar diversas habilidades mediante un solo problema. De este modo, con la aplicación de unos pocos problemas es factible abarcar varios conocimientos y habilidades específicas. Pero además, también se querido dejar en evidencia que si esta integración no se lleva a cabo, se estaría provocando una desarticulación del currículo, lo que implicaría un análisis aislado de conocimientos, y difícilmente se logren las habilidades generales propuestas en dicho programa.

En los dos problemas propuestos para el taller, se logró evidenciar la riqueza conceptual y didáctica que conlleva el planteamiento de situaciones didácticas que articulen diferentes conocimientos y habilidades. En el caso del problema vinculado con probabilidades, se ejemplificó la construcción de concepto clásico de probabilidad, desde la identificación de eventos más y menos probables, y de eventos equiprobables. La posibilidad de articular dichos conceptos, permite tener un conocimiento más integral de la disciplina, lo cual no se logra si los conocimientos se desarrollan en forma desarticulada. Esto también quedó en evidencia, con el segundo problema, en donde fue necesario realizar un análisis integral de representaciones gráficas con la identificación de medidas de posición y variabilidad para responder las interrogantes que generó el problema.

Aunque el primer problema estaba estructurado para generar conocimiento, mientras que el segundo estaba direccionado a la movilización y aplicación de conocimientos adquiridos, ambos dejan claramente evidenciado la puesta en práctica de los fundamentos teóricos establecidos en los programas de estudio. Además de la integración de habilidades que fue discutida previamente, entre otros componentes, se observa la presencia de los procesos matemáticos y de los ejes curriculares debidamente identificados en cada caso.

Finalmente, en relación con la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, los problemas han sido ilustrativos en relación con la flexibilidad que tiene el área para implementar los programas vigentes. Es importante rescatar la forma en que estos problemas, promueven el razonamiento estocástico, desde la perspectiva de los componentes básicos de sus componentes básicos, tal como se discutió en la sección 3. del presente documento.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*. 1 (04), 27-37

Wild, C. and Pfannkuch, M. (1999). International Statistical Review, 67,3, 223-265.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel, Holanda.

MEP, (2012). *Programas de Estudio en Matemáticas*. Ministerio de Educación Pública. San José, Costa Rica