

El uso de las Situaciones Aleatorias en la Enseñanza de la Probabilidad

Augusta Osorio Gonzales

Resumen:

Se han realizado diversas propuestas que permiten enseñar el concepto de probabilidad. Estas se pueden observar en los distintos textos desde el nivel primario hasta el nivel universitario, pero también se puede evidenciar como casi siempre se deja un poco de lado lo que es el estudio de las situaciones aleatorias y su relación con el concepto de probabilidad. El taller que queremos presentarles mostrara actividades de un proceso de instrucción para la introducción de la probabilidad a nivel universitario y que se basa en el uso de las situaciones aleatorias como elemento básico en el desarrollo del tema de probabilidades. Este proceso ha sido analizado y su idoneidad validada en la tesis de maestría de la autora.

Palabras Claves: Situación aleatoria, probabilidad

Abstract:

There have been various proposals about teaching the concept of probability. These are presented in various texts from elementary school to university studies, but is also noticeable how the study of random situations and their relation to the concept of probability are being kept aside. The workshop will explain the activities, which involve the process of instruction of probability at the college level and its relation with the use of random situations as a basic element in the development of probabilities topic. This process has been analyzed and validated its suitability in the Master's thesis of the author.

Keywords: random situations, probability

Modalidad: Taller

Antecedentes del proceso de instrucción

Si un estudiante universitario no ha tenido la oportunidad de desarrollar su pensamiento aleatorio durante su preparación escolar, es previsible que se le presenten problemas durante su primer curso formal de Estadística en la universidad puesto que debe enfrentarse a una forma de pensar que no ha desarrollado previamente. ¿Cómo debe enfrentar un docente este problema? ¿cómo se puede desarrollar en una persona una forma de concebir la realidad que no ha sido elaborada previamente durante un proceso continuo y progresivo? Estos son algunos de los desafíos que debe enfrentar cualquier profesor de un curso de Estadística básica dentro de casi todas las profesiones actuales.

La enseñanza del concepto de probabilidad esta intrínsecamente ligada con el concepto de situación aleatoria, experimento aleatorio y de posibilidad. Desgraciadamente son pocos los libros de Estadística general que desarrollan esta relación, y cuando lo hacen la muestran de una forma sumamente superficial. Entonces, si se desea hacer llegar a los alumnos ideas sobre las diferencias entre los conceptos de posibilidad y probabilidad, es necesario enfrentarlos a los conceptos y a las diferencias existentes mediante el uso de estos conceptos a ejemplos concretos. Dado que la bibliografía disponible no nos puede servir de apoyo en este tema puntual, el único medio en el que nos podemos apoyar es en la creación de actividades con ese fin. La reunión de las actividades creadas por la autora, forman un proceso de instrucción que dura alrededor de seis semanas y que cuenta con trabajos dentro y fuera de clase.

La propuesta está centrada en el establecimiento de la base necesaria para el entendimiento del concepto de probabilidad y en ese sentido, se trabajó un proceso de instrucción que permite a los estudiantes el manejo adecuado de las situaciones aleatorias. Las actividades de este proceso de instrucción favorecen el entendimiento de lo que es una situación aleatoria, cómo podemos definirla y de qué partes se compone. El proceso de instrucción se aplicó durante más de ocho semestres dentro del curso a cargo de la autora y fue sufriendo las modificaciones necesarias propias de la reflexión docente. Paralelamente fue necesario ir mejorando la visión teórica del proceso de introducción y se fue construyendo una visión de la realidad que permite colocar en ella todos los elementos que se desarrollaron. De esta manera podemos establecer cómo calcular la probabilidad de un suceso en particular de una situación aleatoria previamente definida.

Descripción del proceso de instrucción

Las características del proceso de instrucción se establecieron en base a una propuesta de solución que se procuró frente a cada una de las problemáticas detectadas en la enseñanza del concepto de probabilidad. Las problemáticas trabajadas están conformadas por las presentadas en Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2006) y otras que la autora fue recogiendo durante los años en que aplicó el proceso de instrucción. A continuación alguna de las problemáticas consideradas:

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

PROBLEMÁTICA	PROPUESTA
<p>Bennett (2000, citado en Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2006, página 66) dice: “Las ideas intuitivas sobre el azar pueden preceder a las ideas formales y, si son correctas, pueden ser de gran ayuda en el aprendizaje; pero en caso contrario, pueden llegar a dificultar la correcta comprensión de los conceptos.”</p>	<p>Trabajar los temas relacionados con las situaciones aleatorias antes de formalizar los conceptos mediante el uso de actividades introductorias colaborativas. Para evitar que el manejo de ideas intuitivas sea errado, las actividades deben ser monitoreadas con el suficiente número de docentes.</p>
<p>Fischbein, Nello y Marino (1991, citado en Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2006, página 66), destacan las dificultades de los sujetos en la comprensión de las nociones de suceso simple y compuesto, que puede ser un obstáculo para la posterior comprensión de las nociones de sucesos equiprobables, sucesos contrarios y sucesos independientes.</p>	<p>Presentar desde un inicio situaciones problema donde los alumnos mismos propongan los sucesos simples y compuestos que analizarán para poder evidenciar de forma temprana los problemas que presenten en el entendimiento de los conceptos.</p>
<p>El llamado sesgo de la equiprobabilidad, de acuerdo con Lecoutre y Duran (1988, citado en Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2006, página 66), en el que los sujetos consideran que los posibles resultados de cualquier fenómeno son equiprobables porque son materia del azar.</p>	<p>Evitar utilizar las típicas situaciones aleatorias de espacio muestral equiprobable (lanzamiento de dados, lanzamiento de monedas, juegos de cartas, juegos con ruletas o rifas) como situaciones problema para las actividades del proceso de instrucción.</p>
<p>Batanero y Serrano (1999), nos proponen: “Un tratamiento inadecuado de la forma de contextualizar y referenciar los objetos (acontecimientos, fenómenos, experimentos aleatorios,...) puede ocasionar un obstáculo didáctico en la comprensión de la noción de aleatoriedad y probabilidad.”</p>	<p>Evitar manejar diversos nombres para el mismo concepto o en todo caso hacer referencia siempre a las acepciones que propongamos usar. Por ejemplo, decir suceso o evento simple. Además, es importante que el alumno tenga siempre la oportunidad de analizar por sí mismo los contextos antes que el docente se los clarifique, de manera que pueda interiorizar adecuadamente la situación aleatoria problema y le sea más fácil definir sus componentes.</p>
<p>Los alumnos proponen como posibles situaciones aleatorias a situaciones que en realidad no poseen la característica de incertidumbre.</p>	<p>Por la experiencia que tenemos con el proceso de instrucción conocemos que este problema se genera por dos principales causas: el alumno no identifica adecuadamente la acción a realizar dentro de la situación propuesta y por tanto no puede localizar la fuente de incertidumbre, y el alumno no repara en el hecho de que el ejecutante de la acción y la persona que toma decisiones dentro de la misma es en algunas ocasiones la misma persona.</p>

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

	<p>La solución radica, en el primer caso, en enseñarles a los alumnos a realizar un análisis previo de la situación propuesta de manera que separen adecuadamente el contexto propuesto de la acción que se realiza durante la situación aleatoria.</p> <p>Para el segundo caso, proponerles ejemplos de situaciones problema donde vean que a pesar de haber una acción a realizar también hay una decisión que le quita incertidumbre al resultado de su ejecución.</p>
<p>Para el alumno es difícil establecer las condiciones que se derivan de las restricciones expresadas en el contexto de una situación aleatoria y establecer que las restricciones y condiciones afectan de manera directa a la definición del espacio muestral.</p>	<p>Propiciar que el alumno coloque por separado las restricciones provenientes del contexto de la situación aleatoria problema y defina las condiciones adicionales que tendrá en cuenta para el análisis de los componentes de la situación trabajada.</p> <p>Considerar ejemplos concretos donde variando las condiciones del contexto se observa que cambia la forma de establecer el espacio muestral.</p>
<p>Los alumnos presentan problemas para establecer el espacio muestral de una situación aleatoria, no consideran todos los casos posibles.</p>	<p>Reforzar la idea de que el espacio muestral es todo lo posible y no todo lo que nosotros creemos probable.</p> <p>Usar ejemplos extremos para poder hacer que visualicen el problema.</p>
<p>Los alumnos se complican cuando tienen que trabajar con espacios muestrales muy grandes y no saben cómo representarlos.</p>	<p>Hacer que tengan convenciones para presentar los sucesos simples con el fin de no tener dificultades para organizar los espacios muestrales.</p>

Para el diseño de las actividades del proceso de instrucción se partió del hecho de que una vez que el alumno aprende a reconocer las situaciones aleatorias es cuando el concepto de probabilidad toma sentido y va a procurarles información relevante. También se consideró que es importante que las situaciones aleatorias a trabajar durante todo el proceso de instrucción sean de interés para el alumno, lo mejor fue utilizar siempre situaciones de su entorno inmediato. Además se procuró que los mismos alumnos puedan llegar a plantear situaciones aleatorias a analizar y por eso el proceso de instrucción incluye una actividad de determinación de situaciones aleatorias. Y finalmente, es importante que el proceso apoye al alumno a reconocer los diferentes tipos de situaciones aleatorias que procurarán la existencia de los diversos planteamientos sobre el cálculo de probabilidades.

Las situaciones problema diseñadas para las diferentes actividades del proceso de instrucción tienen como eje central a la situación aleatoria y sus componentes.

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Específicamente, se busca que los alumnos puedan reconocer cuándo una situación propuesta es aleatoria y puedan determinar todos los componentes inherentes a ella. El conseguir este objetivo se evidenciará mediante el alcance de los siguientes objetivos parciales. Se espera que los alumnos:

1. Puedan mencionar algunos posibles resultados de una determinada situación, cuando tienen en consideración determinadas restricciones fijadas de antemano dentro del contexto de la situación que se está analizando.
2. Puedan diferenciar entre una situación de la vida cotidiana que incluye la característica de incertidumbre de una que no la tiene.
3. Puedan dar una posible situación aleatoria cuando se les da un determinado contexto de la realidad.
4. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar un suceso simple por extensión y por comprensión.
5. Puedan definir el espacio muestral de la situación aleatoria presentada.
6. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar un suceso compuesto por extensión y por comprensión.
7. Puedan determinar un suceso o evento compuesto por extensión, cuando les es presentada una determinada situación aleatoria y un suceso o evento compuesto por comprensión perteneciente a dicha situación aleatoria.
8. Puedan, dada una determinada situación aleatoria, determinar de un grupo de sucesos compuestos propuestos, cuál es el suceso compuesto que es componente de la situación aleatoria presentada.
9. Puedan definir apropiadamente un experimento aleatorio de su entorno. Brindado el contexto con sus condiciones o restricciones a tener en cuenta, el espacio muestral y un grupo de sucesos simples compuestos, ambos grupos por extensión y por comprensión.

La aplicación de todo el proceso de instrucción requiere seis semanas de programación de un curso de tres horas teóricas y dos prácticas a la semana. Además, los alumnos utilizaron tiempo fuera de clases: aproximadamente dos horas de práctica y un promedio de doce horas de trabajo para el desarrollo y revisión del trabajo de evaluación individual.

El proceso de instrucción consta de ocho actividades:

1. Actividad colaborativa para la introducción del concepto de situación aleatoria.
2. Actividad colaborativa para aplicar el concepto de situación aleatoria a un contexto dado.
3. Actividad colaborativa para describir los componentes de una situación aleatoria.

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

4. Práctica en línea para repasar los conceptos vistos.
5. Prueba individual de conocimientos adquiridos, conceptos teóricos.
6. Práctica en parejas para poder aplicar el concepto de situación aleatoria y de sus componentes.
7. Desarrollo de trabajo individual de análisis de una situación aleatoria propuesta por el alumno.
8. Evaluación de los conceptos de situación aleatoria y de sus componentes, teórica y de aplicación.

Las actividades 1, 2, 3, 5 y 6 que se desarrollan dentro de las sesiones de clase y práctica del curso, tienen un diseño específico de tiempo para ser desarrolladas. En el caso de las tres primeras actividades, que van en la sesión de clases de la primera semana tomada para el proceso, estas se desarrollan en un lapso de 110 minutos. Se espera que la primera actividad se realice en 40 minutos, la segunda en 20 minutos y la última en 50 minutos. En el caso de las actividades 5 y 6, que se realizan en la sesión de prácticas de la segunda semana, se espera que la parte individual se realice en 15 minutos y la de parejas en 60 minutos.

Valoración de la idoneidad del proceso de instrucción

El análisis de idoneidad tuvo como finalidad establecer si el proceso de instrucción diseñado presentaba los aspectos necesarios para que el alumno integre los significados relacionados al objeto en estudio, la situación aleatoria, a sus significados personales. La valoración de idoneidad se trabajó bajo las concepciones del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y se consideró solo dos facetas: la epistémica y la cognitiva.

Los descriptores o indicadores empíricos que ayudaron a la puesta en funcionamiento de la idoneidad didáctica como herramienta de análisis y valoración del proceso en estudio estuvieron basados en los propuestos por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006). Desde los descriptores de idoneidad propuestos se determinó una serie de desviaciones que muestran los componentes del proceso de instrucción al tener como ideal la configuración epistémica de referencia considerada. Desde los resultados obtenidos nuestras interrogantes finales son ¿el proceso de instrucción cumple su objetivo? ¿Vale la pena invertir recursos en su mejora?

Con respecto al cumplimiento de los objetivos del proceso de instrucción, en Osorio(2012) se estableció que este proceso le permitió a los dos alumnos analizados, a pesar de iniciar el proceso sin ningún conocimiento previo sobre el tema, llegar a identificar, proponer y analizar adecuadamente una situación aleatoria. Esto nos da pie para indicar que el proceso cumple con su finalidad y por lo tanto, pensar que una mejora del proceso de instrucción es factible y válida.

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Debemos reconocer que a pesar de las desviaciones encontradas con referencia a los indicadores de idoneidad considerados, los alumnos pueden enfrentar los problemas propuestos, aunque en algunos casos requieren más tiempo para poder manejar los significados. Tenemos que uno de los alumnos analizados pudo manejar los significados casi desde un inicio del proceso de instrucción, mientras que el otro lo hizo recién al final del proceso.

Podemos también indicar que muchas de las desviaciones encontradas son consecuencia de la falta de presentación de los procedimientos y argumentos asociados a los significados pretendidos en el proceso de instrucción. Esta es la desviación más importante encontrada en el análisis, que fue más consecuencia de nuestro desconocimiento en materia de didáctica que en un desconocimiento del tema. ¿Cómo afecta esta falta de información a los alumnos? Por ejemplo, cuando un alumno tiene que decidir cuáles de las situaciones presentadas corresponden a un experimento aleatorio. En ese momento, el alumno tiene que concluir cuáles son los pasos del procedimiento que le llevan a establecer si la situación es o no un experimento aleatorio. Hemos observado durante el análisis de respuestas, que uno de los alumnos solo busca la característica de reproducibilidad dejando de lado el análisis de la incertidumbre. Esta deficiencia se puede subsanar si es que el alumno tiene a su disposición el procedimiento para establecer experimentos aleatorios.

Finalmente, no pensamos que este análisis es suficiente para poder terminar de elaborar un proceso de instrucción que nos lleve a lograr un cambio total en el pensamiento de los alumnos y los dirija a una nueva forma de ver la realidad. Este es solo un primer paso, que ayuda pero que por sí solo no hará todo el trabajo. Con este proceso hemos logrado que los alumnos se introduzcan a un entendimiento sobre de donde surgen la probabilidades, pero aún nos faltan hacer que trabajen con ellas y que además lleguen a construir los famosos modelos probabilísticos. Esto hace que tengamos que pensar en la elaboración de problemas que les permitan manejar la parte conceptual de los planteamientos de cálculo y procedimientos que los lleven a entender de donde surgen las variables aleatorias, tema fundamental para el trabajo en Inferencia estadística, y que está íntimamente ligado con el tema de experimentos aleatorios y modelos probabilísticos. Algunas de estas problemáticas ya las hemos ido trabajando y tenemos algunas ideas de cómo enfrentarlas, pero ahora viene el trabajo difícil, la elaboración de nuevos procesos de instrucción. Esta son algunas de las ideas que tenemos y que trabajaremos en el futuro. Nuestro propósito es llegar a establecer un mecanismo de enseñanza con el que un alumno pueda entender porque es necesario llegar a establecer modelos probabilísticos y como es que estos se determinan.

Actividades a realizar durante el taller a presentar en el IV EDEPA

Durante las tres horas que se trabajará este taller se desarrollarán las tres primeras actividades del proceso de instrucción, las que están vinculadas con el concepto de

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

situación aleatoria y el reconocimiento de sus componentes. Se espera que los participantes desarrollen estas actividades y puedan probar su efectividad.

Los alumnos desarrollarán la primera actividad (Anexo 1) en los primeros 40 minutos del taller, durante ella se les presentará una posible situación real que analizarán para proponer algunos posibles resultados bajo las restricciones dadas. Posteriormente variarán dichas restricciones para que se analice el cambio que sufrirán los resultados de la nueva situación presentada. Estos análisis producirán el descubrimiento de los que caracteriza al tipo de situación presentada. Una vez ubicada esta caracterización se solicitará que brinden una situación que no posea dichas características.

Durante la segunda actividad (Anexo 2), que tomara aproximadamente 20 minutos, los participantes tendrán la oportunidad de definir otras situaciones de la realidad que cumpla con ser similares a la situación trabajada en el actividad 1. Este ejercicio busca que el participante establezca las diferencia entre las diferentes partes que compone la descripción de una situación aleatoria.

Durante la tercera actividad (Anexo 3), que tomara aproximadamente 50 minutos, los participantes tendrán la oportunidad de trabajar en la determinación de los componentes que conforman a una situación aleatoria. Tendrán la oportunidad de explicitar algunos de los sucesos de la situación y determinar su espacio muestral.

El tiempo restante del taller serán para poder presentar el resto de actividades del proceso de instrucción. Se revisarán ejemplos de dichas actividades y se revisará su importancia dentro del proceso. Finalmente, se podrá revisar el marco epistemológico que se tomó para la creación de todo el proceso de instrucción.

Referencias bibliográficas

- [1] Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, Volumen XXVII, N° 2, 221-252
- [2] Osorio, A. (2012). Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior. Tesis para optar el grado de Magister en Enseñanza de las Matemáticas. PUCP. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/123456789/4658>

- [3] Serradó,A. Cardeñoso,J. y Azcarate,P (2006). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. TARBIYA, Revista de Investigación e Innovación Educativa del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación Universidad Autónoma de Madrid N°38.

Anexo 1 - Ficha actividad 1 - Actividad colaborativa para la introducción del concepto de situación aleatoria.

Situación Propuesta

Julia se encuentra conversando con su amiga Susana sobre la celebración de su primer año de casada. Julia le cuenta a Susana que su esposo Orlando le ha comentado que lo celebrarán el próximo jueves de una manera muy especial. Ella está tratando de imaginarse la sorpresa conociendo lo poco romántico que es Orlando y el poco tiempo que tienen para la celebración, con las justas contarán con unas tres o cuatro horas, puesto que Orlando está “full” con sus estudios para recibirse como médico.

Converse con su pareja de trabajo y juntos preparen una pequeña lista que considere las posibles formas de celebración que Julia podría imaginar, considerando que los recursos de la pareja no son muchos ya que Julia trabaja como secretaria en una pequeña oficina y Orlando recibe solo 1000 Nuevos soles por el trabajo que realiza.

- A. Que nos faltaría conocer para poder poner un límite a las posibles formas de celebración? _____
- B. Tomando en cuenta el punto A y pensando que solo tendrán tiempo para realizar una actividad de celebración, considere algunas posibles formas de celebración:
1. _____
 2. _____
 3. _____
 4. _____
- C. Consideren que en el tiempo que disponen para celebrar Julia y Orlando, van a realizar **dos** actividades.

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

D. Tomando en cuenta el punto A y C, considere algunas posibles formas de celebración:

Posibilidad 1. _____

Posibilidad 2. _____

Posibilidad 3. _____

Posibilidad 4. _____

E. ¿Cuál será el número total de posibilidades distintas que creen ustedes que puedan realizar Julia y Orlando para poder celebrar su aniversario?

F. ¿Qué cualidad posee la situación propuesta que impide que se conozca la forma de celebración?

Detalle una posible situación donde sí se pueda conocer el resultado de antemano.

Anexo 2 - Ficha actividad 2 - Actividad colaborativa para aplicar el concepto de situación aleatoria a un contexto dado.

Detalle una posible situación aleatoria que se dé, cuando se va a un paseo a la playa.

Anexo 3 - Ficha actividad 3 - Actividad colaborativa para describir los componentes de una situación aleatoria.

Usted tiene que localizar a uno de sus compañeros de trabajo para coordinar una reunión y por tanto debe de llamar al número de celular que le ha proporcionado su jefe. Si usted cuenta con un celular recientemente cargado y con suficiente saldo, una vez que termina de digitar los números del teléfono que puede suceder con la llamada?

Trate de describir a continuación:

A. El contexto de la situación presentada

B. La acción implicada en la situación presentada

C. Las restricciones de la situación presentada

D. ¿Es esta una situación a la que se le puede denominar Experimento aleatorio?

Considerando que al conjunto de todos los resultados posibles se le denomina espacio muestral, determine el espacio muestral de la situación propuesta

Espacio muestral={

IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos

Considerando que a cada posible resultado se le denomina suceso o evento simple, determine 2 sucesos simples de esta situación.

Evento 1: {

Evento 2: {

Ahora, defina nuevamente cada suceso simple, pero hágalo por comprensión (es decir, utilice una oración para definirlo)

Evento 1: _____

Evento 2: _____

Considerando que a cada subconjunto del conjunto potencia del espacio muestral que no es un suceso o evento simple se le denomina suceso o evento compuesto, determine el suceso definido por

- Llegue a coordinar mi reunión.