Combinatoria: ¿Por Qué Es Tan Difícil Para Algunos?

Víctor Hugo Vázquez Guevara[1], Hugo Adán Cruz Suárez[2] , Francisco Solano Tajonar Sanabria[3], Fernando Velasco Luna[4] y Hortensia Reyes Cervantes[5]

Resumen

La combinatoria es una rama de la matemática muy útil cuando se trabaja con variables aleatorias discretas en el curso inicial de Probabilidad. En este trabajo se discutirá su campo de estudio, así como algunos problemas clásicos que pueden resolverse gracias a ella. Además, se presenta una discusión de algunas causas que pueden contribuir a que las técnicas y metodologías de la combinatoria no sean tan asimilables al primer contacto para algunos estudiantes tales como los son la falta de madurez matemática, la ausencia de una verdadera asimilación de los principios básicos de conteo, falta de imaginación y la insistencia de tratar de hallar reglas mecánicas para resolver problemas enumerativos; por citar algunas.

Palabras clave: Combinatoria, Probabilidad, Variable aleatoria discreta..

Abstract.

Combinatorics is a very useful field of mathematics when one works with discrete random variable in the initial course of Probability. In this paper its range of action will be discussed as well as some classical problems which can be solved thanks to it. In addition, a discussion about some causes which may contribute to the hard assimilation of its techniques and methodologies such as lack of mathematical maturity, the absence of a true assimilation of the counting principles, lack of imagination and the insistence of finding mechanical rules for solving enumerative problems, is presented.

Keywords: Combinatorics, Probability, Discrete Random Variable

Modalidad: Ponencia.

[1] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México, vvazquez@fcfm.buap.mx
[2] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México, hcs@fcfm.buap.mx
[3] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México, ftajonar@fcfm.buap.mx
[4] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México, fvelasco@fcfm.buap.mx
[5] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México, hreyes@fcfm.buap.mx

1. Introducción.

La combinatoria es una rama de las matemática cuyo nacimiento y desarrollo ha estado vinculado al de otras ramas tales como el Álgebra, Teoría de números y Probabilidad. Pertenece al área de las Matemáticas Discretas y estudia le enumeración, construcción y existencia de propiedades de configuraciones que satisfacen ciertas condiciones establecidas. En particular, la combinatoria enumerativa ó enumeración estudia los métodos para contar las distintas configuraciones de los elementos de un conjunto que cumplan ciertos criterios especificados. Ésta fue una de las primeras áreas de la combinatoria en ser desarrollada, quizás es por esto que cuando se habla de la combinatoria enumerativa se hace por medio del término combinatoria. Otras sub áreas de la combinatoria son: Teoría de particiones, Teoría de Gráficas, Teoría del diseño, Geometría finita, Teoría del orden por citar algunas.

1.1 Un poco de Historia.

Posiblemente el antecedente más antiguo de un problema de enumeración es el ofrecido por el libro *I Ching* que es el antiguo libro chino de las mutaciones (1200 a.C.) [1], se cree que describe la situación presente de quien lo consulta y predice el modo en que se reoslverá el futuro se adopta ante ella la posición correcta. Los símbolos que se consultan en este libro son llamados hexagramas y son formados por 6 líneas cada una de las cuales puede contener a algunos de dos símbolos; yin (línea interrumpida) y yang (línea sólida), el problema en este caso es el de saber el número de símbolos diferentes que pueden escribirse. En la siguiente figura se encuentran los 64 hexagramas posibles:

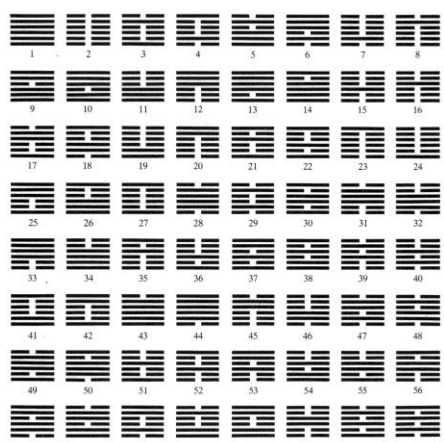

Figura 1. Hexagramas del I Ching

Otro antecedente procedente del mundo antiguo se encuentra en el problema 79 del papiro de Rhind (s. VII a.C.): Había un propiedad compuesta por 7 casa, cada casa tiene 7 gatos, cada gato se come 7 ratones, cada ratón se come 7 gramos de cebada, cada grano de cebada produce 7 medidas. ¿Cuánto suma todo?.

En el siglo VI a.C. el médico hindú Sushruta afirmaba que podía hacer 63 combinaciones con 6 ingredientes diferentes al tomar uno a la vez, dos a la vez, tres a la vez, etc.

Existen otros problemas del mundo antiguo y del Medioevo sobre todo de índole religioso cuya solución está relacionada con conteo pueden hallarse en la literatura, en particular en el libro de Robin Wilson.

El filósofo y astrónomo Rabbi Abraham Ezra en 1140 estableció la simetría de los coeficientes binomiales pero fue Levu ben Gerson quien obtuvo una formula cerrada para éstos en 1321.

Ya en el siglo XVII, Frans van Schooten, Blaise Pascal y Marin Mersenne trabajaron en el llamado triángulo de Pascal de manera formal desde distintos puntos de vista; combinatorio, algebraico, musical. Sin embrago, se conocen versiones anteriores de este triángulo; por ejemplo, Al-Kraji en 1007, Zhu Shijie en 1303, Ibn Munim en 1303, Cardano en 1570, Tartaglia en 1556.

Es en este periodo que la palabra combinatoria hace su aparición con el trabajo Dissertatio de Arte Combinatoria de Wihem Leibniz en el que aborda entre otras cosas los problemas de permutaciones y combinaciones.

Jacob Bernoulli, al establecer las nociones básicas de Probabilidad en su Ars Conjectandi estableció y extendió el estudio muchas nociones combinatorias entre ellas; al igual que Leibniz, las combinaciones y las permutaciones.

En 1718 De Moivre en su libro Doctrine of Chances introduce el principio de inclusión-exclusión al analizar las probabilidades de ganar en juegos de azar, además expandió los coeficientes binomiales al caso multinomial.

Esta breve sección contiene así, un breve (y por supuesto incompleto) panorama del desarrollo de la combinatoria. Una discusión mas completa sobre la historia de la combinatoria puede encontrarse en [2].

2. Principios de Conteo

Gran parte de la Combinatoria Enumerativa se basa en dos principios de conteo: el aditivo y el multiplicativo, mismo que a continuación describiremos:

A grandes rasgos, el Principio Aditivo de Conteo establece que si se desea llevar a efecto una actividad, la cual tiene n formas alternativas para ser realizada (obviamente diferentes), donde la primera de tales alternativas puede ser realizada de N_1 maneras, la segunda alternativa puede realizarse de N_2 formas, la tercera de ellas puede ser realizada de N_3 maneras, etc. Entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de: $N_1+N_2+\ldots+N_n$ maneras.

Desde luego, este principio puede enunciarse sólo para dos actividades y extenderse por inducción a cualquier número finito de actividades.

El principio multiplicativo es complemento del aditivo. Puede pensarse que este principio es utilizado cuando más de una actividad va a ser realizada una a continuación de la otra, un enunciado simple de este principio es el siguiente:

Si dos actividades se llevarán a cabo una después de la otra y si la primera de éllas puede realizarse de N_1 formas y para cada una de éllas la segunda actividad puede realizarse de N_2 maneras (hipótesis de homogeneidad) entonces, el número total de formas en que las dos actividades pueden realizarse es N_1*N_2.

Este principio puede ser generalizado a más de dos actividades por inducción pero es muy importante el cerciorarse que la hipótesis de homogeneidad se cumple.

Es usual que el abordaje del principio multiplicativo hallado en muchos libros de texto sea a través de diagramas de tipo de árbol ya que son una herramienta natural

Es con la correcta aplicación de estos principios que durante los cursos se llega a las fórmulas correspondientes al cálculo de permutaciones y combinaciones:

Problema 1. ¿De cuántas formas pueden acomodarse *n* personas en una fila?
Observamos que es el principio multiplicativo la herramienta que debe ser utilizada pero en su versión generalizada ya que tenemos en total *n* actividades (una por cada persona que será acomodada en la fila). La primer actividad (persona a ser acomodada) puede realizarse de *n* formas distintas, para cada una de estas alternativas tenemos $n-1$ formas de realizar la segunda actividad, así que tenemos en total $n*(n-1)$ formas de realizar el acomodo de las dos primeras personas en la fila. Posteriormente, para cada una de estas $n*(n-1)$ formas de realizar las primeras dos actividades tenemos $n-2$ formas de realizar la tercera y por tanto tenemos $n*(n-1)*(n-2)$ formas de acomodar a las primeras tres personas en una fila. Continuando con este razonamiento tenemos que en total podemos acomodar a *n* personas en una fila de $n!$ formas y a cada una de estos acomodos se le suele llamar permutación.

Problema 2. ¿De cuántas formas podemos seleccionar un subconjunto de tamaño *k* de un grupo de *n* objetos (sin que el orden de selección importe, sólo la pertenencia o no de los objetos al subconjunto)?

La respuesta "inocente" a este problema usando el principio multiplicativo siguiendo los mismos argumentos de la solución del Problema 1 es $n*(n-1)*\ldots*(n-k+1)$, sin embargo esta respuesta cuenta más formas de las que en realidad existen ya que si consideramos un conjunto fijo de *k* objetos la solución recientemente ofrecida considera como distintas a las $k!$ permutaciones que pueden formarse con estos objetos; es decir, cada selección de *k* elementos es considerada $k!$ veces. Por tanto, la respuesta a este problema es

$$n*(n-1)*\ldots*(n-k+1)/k!$$

o en su forma más familiar

$$n!/k!(n-k)!.$$

que denotaremos por nCk, y a cada uno de estos subconjuntos se le llamará una combinación de tamaño *k*.

Nota 1. Con estas fórmulas a la mano, pueden resolverse muchos problemas típicos de la combinatoria enumerativa tales como: la fabricación de placas de automóviles, el sentado de personas en una línea y en una mesa circular, el acomodo de libros en un estante, la selección de comités, la enumeración de manos en el pókar, la distribución de pelotas en urnas, el cálculo del número de soluciones naturales (o enteras no negativas) de una ecuación lineal con coeficientes unitarios (por ejemplo $x+y+z=12$), la demostración de algunas propiedades de los coeficientes binomiales.

Una de las dificultades más comunes al resolver algunos problemas de combinatoria enumerativa es decidir si el orden de selección es o no relevante como puede evidenciarse en el siguiente problema de comités:

Problema 3. Supongamos que en un salón de clases tenemos 10 alumnos y un comité de tres personas debe ser formado. ¿Cuántos comités distintos pueden formarse si las responsabilidades de los tres miembros serán las mismas?

Este problema es resuelto con una combinación ya que en este caso el orden de selección no es importante; dicho de otra manera dado que las responsabilidades son las mismas para los tres miembros del comité, el comité Juan, Pedro y María es en esencia el mismo que el comité María, Juan y Pedro. Así, el número de comités bajo las condiciones establecidas es 10C3=120.

Problema 4. Bajo las mismas condiciones del Problema 3. ¿Cuántos comités pueden formarse si el comité debe tener un Presidente, un Secretario y un Tesorero?

En este caso, es claro que dos comités formados con las mismas personas pero arreglados en forma diferente son distintos; por ejemplo el comité Juan, Pedro y María afirma que Juan es el Presidente, Pedro el Secretario y María la Tesorera mientras que el comité María, Juan y Pedro afirma que María es la Presidente, Juan el Secretario y Pedro el Tesorero. Con esto, tenemos que el número de comités es $10*9*8=720$=3!* 10C3.

3. Conteo y Probabilidad

Es posible introducir de manera natural los contextos en los cuáles algunas variables aleatorias discretas pueden ser empleadas y deducir así su función de masa de probabilidad a través de un conteo, por ejemplo la variable aleatoria Bernoulli, la Binomial, la Geométrica, la Hipergeomètrica y la Binomial Negativa.

A modo ilustrativo, exploremos los siguientes ejemplos:

Problema 5. Si lanzamos una moneda n veces y nos preguntamos por el número de formas en que k soles (en México las monedas tienen por un lado una figura a la que llamamos sol y por el otro lado un águila); y por tanto $n-k$ águilas, pueden ocurrir tenemos que la solución es nCk. En este caso, tenemos k objetos iguales entre sí (los soles) y $n-k$ objetos iguales entre sí (las águilas) pero diferentes de los anteriores. Si dispusiéramos las formas en que estos n objetos pueden acomodarse tendríamos como respuesta $n!$, sin embargo los soles pueden permutarse entre sí de $k!$ formas y las águilas de $(n-k)!$ formas. Es por ésto que la respuesta es *nCk*. Lo cual al introducir la variable aleatoria binomial puede ayudarnos para deducir su función de masa de probabilidad.

Problema 6. Si lanzamos una moneda hasta que un número fijo de soles; digamos *r*, ocurran. ¿De cuántas formas pueden ocurrir los resultados de modo que sean necesarios *k* lanzamientos?

Dada la naturaleza del problema, el *k*-ésimo lanzamiento necesariamente es un sol, es por esto que debemos contar el número de formas en que podemos arreglar *r-1* soles y *k-r* águilas (como en el caso del Problema 5, tenemos que tomar en cuenta que todos los soles son iguales entre sí al igual que las águilas). Así, tenemos que existen *(k-1)C(k-r)* formas en que son necesarios *k* lanzamientos para que ocurran *r* soles. Este pequeño razonamiento puede llevarnos a la deducción de la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria binomial negativa.

El caso de la variable aleatoria geométrica es un caso particular de la binomial negativa con *r=1*. Además, es fácil convencerse de que si lanzamos una moneda hasta que caiga sol sólo existe una forma en que esto ocurrirá en *k* lanzamientos (para cada *k* natural).

De manera similar se abordan problemas de probabilidad en los que el transfondo es un problema de combinatoria enumerativa así por ejemplo, los problemas señalados en la Nota 1 pueden trasladarse a problemas de probabilidad (muchas veces en problemas de resultados equiprobables) como lo muestran los siguientes ejemplos:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que una placa de automóvil de 3 letras y 4 números tal que la primer letra siempre es “T” y los números son mayores que 1000 fabricada al azar de modo que cada placa es igualmente probable sea múltiplo de dos (en la parte numérica) y tenga una “X” (en la parte literal)?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que en un comité de 3 personas tomadas de un grupo de 10 tenga entre sus miembros a alguna persona en particular considerando que hay tres cargos distintos y que todas las selecciones son igualmente probables?

3. ¿Cuál es la probabilidad de que en una mano de pókar de 5 cartas se tenga alguna mano en particular: un par, dos pares, una tercia, un “full house”, un pókar, etc.?

4. Si repartimos *k* pelotas en *r* urnas. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las pelotas caigan en la primer urna?

Con lo expuesto anteriormente, se remarca el hecho de que la combinatoria enumerativa es una importante aliada de la probabilidad en el caso discreto y que su relación es totalmente natural.

4. Conclusiones Finales

Dentro del primer curso de Probabilidad a nivel Licenciatura vale mucho la pena dedicar algún tiempo al tratado de algunos problemas básicos de combinatoria enumerativa así como a sus técnicas y sobre todo a esa forma de pensar; a nuestro juicio, tan particular que vincula tanto cierto grado de madurez matemática como de imaginación en situaciones cotidianas.

En la sección anterior, a través de ejemplos muy sencillos se mostró la intimidad que existe entre la combinatoria y la probabilidad. Pero, ¿Cuán bien asimilados están los principios básicos de conteo y sus alcances por parte de los estudiantes en el primer curso de Probabilidad?.

En la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, los estudiantes de las Licenciaturas de Matemáticas, Matemáticas Aplicadas y Acturía deben llevar su primer curso de Probabilidad después de aprobar por lo menos los cursos de: Matemáticas Básicas, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Teoría de Ecuaciones. Es decir, son estudiantes que llevan al menos un año y medio en el nivel Licenciatura.

Sin embargo; en la experiencia de los autores de este trabajo, la proporción de estudiantes con vicios matemáticos que reflejan su inmadurez académica no es pequeña. Este hecho se ve reflejado en algunos casos por su búsqueda de una fórmula o estrategia que evite el tener que realizar una reflexión mas profunda del problema que se esté resolviendo, mientras que en otros ésto queda de manifiesto en cuestiones tan primordiales como el uso del sentido común para decidir cuál de los principios básicos de conteo ha de emplearse o bien, si ha de utilizarse una estrategia en la que el orden sea relevante.

Otra de las resistencias detectadas por parte de los estudiantes es el que, una vez "traducido" el enunciado al contexto de la combinatoria, pretenden resolverlo dentro de la teoría y no volver al contexto del problema hasta exponer su solución. Sin embrago, algunos problemas de combinatoria exigen que se acuda al enunciado del problema en cuestión en distintos puntos del desarrollo de su solución para efecto de ir incluyendo sus condiciones y restricciones.

Otro problema frecuente es el de no ser capaces de imaginar el contexto físico del problema para llevar a cabo la "traducción" señalada en el párrafo anterior. Lo cuál puede resultar particularmente grave dado que el estudio de la Probabilidad es importante en función de sus aplicaciones en situaciones prácticas.

Finalmente, debe tomarse en cuenta que es precisamente en el citado primer curso de Probabilidad que los estudiantes tienen su primer contacto con los problemas básicos de la combinatoria enumerativa, es por esto que quizá previo a este curso sea necesario uno de Matemática Discreta a fin de poder discutir con mayor detalle estos problemas y sobre todo adquirir de manera más pausada la sensibilidad requerida para encarar problemas de Probabilidad en el caso discreto.