

UNA ACTIVIDAD DIDÁCTICA COMO INTRODUCCIÓN A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Danna Cruz Reyes *Luis Alejandro Másmela †Luis Villarreal ‡

Resumen

Se reconoce el uso de los computadores como un recursos en los procesos de educación. En el área de la probabilidad y la estadística, la hoja electrónica se convierte en una herramienta para la exploración de conceptos propios, específicamente usado como generador de números aleatorios y mediante sus herramientas propias para el análisis de datos. Se presenta a los profesores y estudiantes el diseño de una actividad de aula como innovación didáctica, para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área de la probabilidad soportado en la hoja de calculo EXCEL, como una experiencia de aula realizada con estudiantes de la Universidad Autónoma de Colombia. Se desarrolla una actividad con los estudiantes para que puedan fortalecer el aprendizaje de los conceptos fundamentales de probabilidad por medio de problemas interesantes simulados a través de dicha hoja de cálculo y una actividad para ello denominada *Caminata Aleatoria de Mónica*. Esta actividades permiten a los estudiantes trabajar con conceptos fundamentales de probabilidad, como son: el concepto de aleatoriedad, la diferencia entre los experimentos aleatorios y deterministas, el enfoque de probabilidad frecuentista y los modelos de probabilidad.

Palabras clave: Enseñanza-aprendizaje de probabilidad, simulación, secuencias didácticas.

It recognizes the use of computers as a resource in the process of education. In the area of probability and statistics, the spreadsheet becomes a tool for the exploration of concepts themselves, specifically used as a random number generator and using their own tools for data analysis. It introduces teachers and students to design a classroom activity and innovation in teaching, to support teaching and learning processes in the area of probability supported on the EXCEL spreadsheet as a classroom experience with students on University Autónoma de Colombia. It develops an activity with students in order to strengthen the learning of basic concepts of probability through simulated interesting problems through this spreadsheet and do an activity called textit Monica Random Walk. The activities allow students to work with basic concepts of probability, such as: the concept of randomness, the difference between random and deterministic experiments , the focus of frequentist probability and probability models.

Keywords: Teaching and learning of probability, simulation, sequences.

*Universidad Autónoma de Colombia, Universidad El Bosque, dcruzreyes@unbosque.edu.co.

†Universidad Autónoma de Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, lmasmela@udistrital.edu.co.

‡Universidad Autónoma de Colombia, luavi 07@yahoo.com.

1 Introducción

Para el entendimiento de los fenómenos aleatorios en la vida cotidiana, se debe aprender algunos de los conceptos de probabilidad. Sin embargo, según Kataoka et al. (2008), no todos los conceptos de probabilidad son fáciles de entender en un primer momento, ya que muchos de ellos son del tipo abstracto, lo que requiere prudencia y habilidad por parte del profesor durante el proceso de aprendizaje, con el fin de proporcionar a los alumnos el desarrollo adecuado de su razonamiento sobre probabilidad.

Según Batanero y Godino (2003), la construcción de los conceptos de probabilidad debe partir de la comprensión de los tres conceptos básicos: la percepción de la casualidad, la idea de experiencia al azar y una noción de probabilidad. Asimismo, señala que es deseable que el maestro se acerque a estos conceptos a través de actividades en las que promuevan su idea intuitiva del azar y la incertidumbre, la construcción de eventos y espacio muestral y los métodos matemáticos para el estudio de estos fenómenos.

Algunos autores concuerdan con la teoría de que los estudiantes aprenden construyendo activamente su conocimiento, es decir, transformando, organizando y reorganizando el conocimiento adquirido a través de sus propias experiencias, lo que se conoce como un enfoque constructivista, donde el conocimiento no se adquiere a través de clases magistrales, sino mediante la interacción con los recursos informáticos que les permite visualizar conceptos, manejar objetos y tener una interacción social, esto puede ser posible utilizando objetos de aprendizaje en el aula de clase.

Lopez (2009) en sus investigaciones sobre didáctica y objetos de aprendizaje enfocados a la estadística, afirma que los estudiantes al trabajar con los objetos de aprendizaje mejoraron la visualización de los problemas, permitiendo desarrollar habilidad para representar, comunicar y reflejar información visual a través de las representaciones institucionales registradas en sus hojas de trabajo, en este mismo trabajo recomienda que es interesante continuar con la construcción de otros objetos de aprendizaje realizando combinaciones de diferentes recursos tecnológicos.

En este sentido y con el objetivo de diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la probabilidad, se realizaron consultas de tipo bibliográfico en donde se encontró una actividad denominada *Caminata Aleatoria de Mónica*. Esta actividad fue propuesta por Fernández et. al. (1999), con el fin de enseñar la distribución binomial a estudiantes universitarios y fue adaptada por Cazorla et. al. (2006) para ser utilizada en la escuela primaria.

Dicha secuencia didáctica es adaptada para su aplicación en cursos de probabilidad en la Universidad Autónoma de Colombia, con el objetivo de verificar si la secuencia podría apoyar a los docentes en la enseñanza de conceptos básicos de probabilidad.

Marco teórico

2 La simulación como instrumento de modelización en probabilidad

Como afirma Batanero (2003), la probabilidad es un campo donde los modelos simples se componen entre sí de una manera muy potente partiendo de unas pocas ideas estocásticas fundamentales. El soporte matemático

requerido para fundamentar estas ideas tiene un alto grado de complejidad, resulta de esta forma poco intuitivo. En muchas situaciones con estudiantes, tratar de mejorar las intuiciones sobre aleatoriedad se convierte en una tarea difícil en el desarrollo de las clases, mucho más si se trata de hacerlo desde la matemática como soporte del área de la probabilidad y la estadística. Es así que la simulación o sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente, permite prescindir de la matemática para analizar este tipo de situaciones y de esta manera poder aproximar al estudiante a la idea de aleatoriedad a través de lo que Batanero denomina modelo pseudo-concreto de la situación objeto de estudio.

3 Modelización y enseñanza de la probabilidad

“Un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad”. (Henry, 1997, citado por Batanero, (2003)). La modelización hace parte fundamental de la actividad en probabilidad y estadística, sin embargo en muchas ocasiones se hace poco énfasis en este proceso.

Los docentes de probabilidad y estadística en su proceso de enseñanza-aprendizaje, se enfocan directamente en la construcción y trabajo de un modelo matemático, pero por simplicidad pueden estar evitando pasos que según Dantal (1997), son fundamentales para la enseñanza de la probabilidad en secundaria. Los pasos en los que hace énfasis Dantal (1997) y que propone como esenciales en el proceso de enseñanza de la probabilidad son los siguientes:

1. Observación de la realidad.
2. Descripción simplificada de la realidad.
3. Construcción de un modelo.
4. Trabajo matemático con el modelo.
5. Interpretación de resultados en la realidad.

El autor enfatiza en que, como docentes, el afán radica en llegar rápidamente a los pasos 3 y 4 dejando a un lado o haciendo el mínimo esfuerzo en trabajar con los estudiantes, en los dos primeros pasos. Considerar los cinco pasos como un proceso completo permite enseñar la probabilidad como una actividad de modelización, tratando de no centrarse absolutamente en una estructura matemática, entendida como un conjunto de teoremas obtenidos a partir de una serie de axiomas.

En esta breve descripción de los pasos esenciales en el proceso de modelización reconocemos el funcionamiento de la actividad de investigación y también de la forma en que aprendemos en la vida diaria. Nuestro conocimiento científico (y también el obtenido en la vida diaria) se compone de datos o hechos (la parte observable de nuestro universo) y teorías o modelos que tratan de explicar y relacionar estos hechos entre sí, Batanero (2003).

3.0.1 La simulación: modelo matemático versus realidad

Girard (1997) citado por Batanero (2003), afirma que cuando se trabaja mediante simulación ya se está realizando un proceso de modelización, se trata de un procedimiento en donde se intenta simplificar la realidad, además de fijar los aspectos de la misma que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre

el fenómeno estudiado.

Afirma que la ventaja de la simulación permite condensar el experimento en un tiempo y espacio concretos, simplifica la propia realidad y supone un trabajo de abstracción sobre ella. El uso de simulación a través de computadores, permite reproducir el experimento y observarlo permitiendo realizar un trabajo de tipo intuitivo sobre el modelo prescindiendo así del aparato matemático.

Adicionalmente, la simulación proporciona un método universal para obtener estimaciones a soluciones de problemas probabilísticos, este tipo de procedimientos no tiene paralelo en otras ramas de la matemática.

4 Metodología

La secuencia didáctica “*La caminata aleatoria de Mónica*” permite trabajar con conceptos de probabilidad, tales como eventos, espacio muestral, la probabilidad de eventos individuales. Permite además explorar explorando la diferencia entre experimentos aleatorios y deterministas e induce el cálculo de probabilidades teóricas a partir del enfoque frecuentista de probabilidad.

La actividad completa consta de cuatro secciones diferentes. En cada sección, las preguntas deben responderse sobre la base de una acción anterior. En la primera sección los estudiantes deben, soportados en el mapa que describe el cuadrante de Mónica (Figura 1), familiarizarse con la situación descrita a continuación:

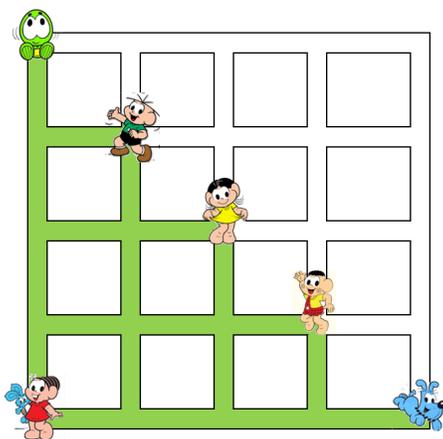


Figura 1

Mónica (la chica en la esquina izquierda abajo) y sus amigos viven en el mismo cuadrante. La casa de Mónica está a cuatro cuadras de la casa de Horacio (dinosaurio), Cebolinha (niño de tres de cabellos), Magali (niña en el centro), Cascao (el niño con los frenos) y Bidu (el perro), de acuerdo a la Figura 1. Mónica solía visitar a sus amigos a lo largo de los días de semana en un orden preestablecido: lunes, Horacio; martes, Cebolinha; miércoles, Magali; jueves, Cascao y viernes, Bidu, ella solo puede hacer recorridos a la derecha o hacia arriba (nunca puede moverse a izquierda o hacia abajo). Llamaremos a esta forma de visitas: Modelo 1.

Para convertir las visitas en algo más emocionante, el grupo decide que al azar debe escoger el amigo que visita. Para ello, al salir de casa y en cada cruce, Mónica tiene que lanzar una moneda al aire, si se obtiene cara (C), va a caminar una cuadra hacia arriba y cuando ocurre sello (S), va a caminar una cuadra a la derecha. Cada lanzamiento representa una cuadra de recorrido en su ruta. Mónica tiene que lanzar la moneda cuatro veces con el fin de llegar a casa de alguno de sus o amigos. Llamaremos a esta forma de visitas: Modelo 2.

En la sección II, los estudiantes llevarán a cabo el experimento lanzando la moneda y registrando los resultados. En la sección III se propone construir el diagrama de árbol, y en la sección IV, se comparan las probabilidades teóricas y frecuentistas, entre el experimento aleatorio y determinista. La secuencia completa consta de 13 preguntas.

Después de desarrollar la actividad en lápiz y papel, se les ofrece a los estudiantes la oportunidad de interactuar con algunos objetos diseñados en la hoja de cálculo EXCEL, con el propósito de institucionalizar el trabajo realizado en la primera parte. Por ejemplo, mediante el objeto presentado en la Figura 2, el docente guía la construcción de la simulación del lanzamiento de una moneda.

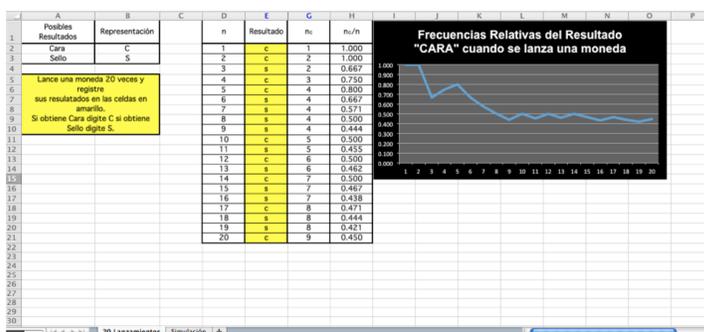


Figura 2.

El objeto presenta una tabla donde el estudiante puede registrar los resultados del lanzamiento de una moneda 20 veces. A partir de esta actividad Excel calcula las frecuencias relativas y genera el gráfico de línea. La pestaña “Simulación” permite construir el experimento del lanzamiento de una moneda 500 veces por medio de la generación de números aleatorios de Excel. En el gráfico generado se observa como converge la frecuencia relativa a la probabilidad teórica, a medida que aumenta el número de lanzamientos. Figura 2.

El siguiente objeto proporciona dos tablas, una con 32 filas y otra con 160 filas, en donde el estudiante puede replicar tantas veces como filas haya, el lanzamiento de cuatro veces una moneda y que permite determinar, en cada caso, al amiguito que visita Mónica. El objeto genera automáticamente la tabla de frecuencia de tal forma que se pueda discutir respecto a cómo cambian dichas frecuencias de visita para cada amiguito. Figura 3.



Figura 3.

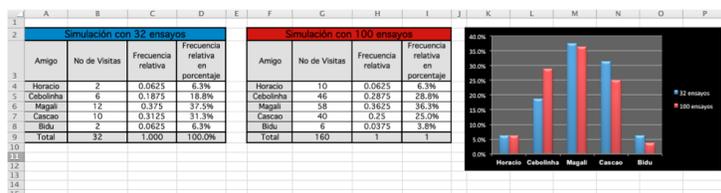


Figura 4.

El anterior objeto, además que registra la secuencia de caras y sellos y el amigo visitado, permite generar tablas de frecuencias con las 32 y 160 repeticiones del experimento e ilustra las frecuencias en un gráfico de barras como lo presenta la Figura 4.

La Figura 5, muestra un objeto que genera un gráfico de barras y que permite comparar el modelo frecuentista basado en la simulación del experimento y el modelo teórico; el docente debe hacer énfasis en la ley de los grandes números, en el concepto de probabilidad y en el desarrollo empírico que logra finalmente formalizar este cálculo en lo que se conoce como medida de probabilidad laplaciana.

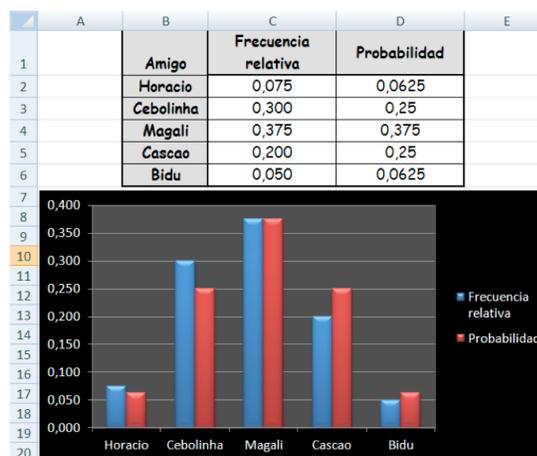


Figura 5.

5 Generalización de la caminata: distribución binomial

Suponga que la moneda que lanza Mónica esta cargada, de tal forma, que la probabilidad de que ocurra sello es de 0.3 y la probabilidad de que ocurra cara es de 0.7. ¿Cómo cambia el modelo en que Mónica visita a sus amigos?. Para responder esta pregunta, primero considere las características de este experimento:

- El experimento consta de un número determinado de ensayos idénticos.
- Cada ensayo tiene dos resultados posibles. En particular, se llama éxito si ocurre cara y fracaso si ocurre sello.
- La probabilidad de tener éxito es igual a un valor $p = 0.3$ que permanece constante para todos los ensayos.
- Los ensayos son independientes.

De la misma actividad, se conoce que la variable $X =$ número de caras en los 4 lanzamientos, es la variable que determina que amigo visita Mónica, (Si se obtiene 4 caras visita a Horacio, si obtiene 3 visita a Cebolinha, si obtiene 2 visita a Magali, si obtiene 1 visita a Cascao y si no obtiene caras, visita a Bidu). Como ejemplo,

centramos nuestro interés en calcular la probabilidad del evento, **Mónica visita a Cascao**, es decir, obtener 1 cara, que puede darse a partir de cuatro eventos mutuamente excluyentes, cuyas probabilidades son:

$$\left. \begin{aligned} P(CSSS) &= (0.3)(0,7)(0,7)(0,7) \\ P(SCSS) &= (0.7)(0,3)(0,7)(0,7) \\ P(SSCS) &= (0.7)(0,7)(0,3)(0,7) \\ P(SSSC) &= (0.7)(0,7)(0,7)(0,3) \end{aligned} \right\} = (0.3)^1(1 - 0.3)^3$$

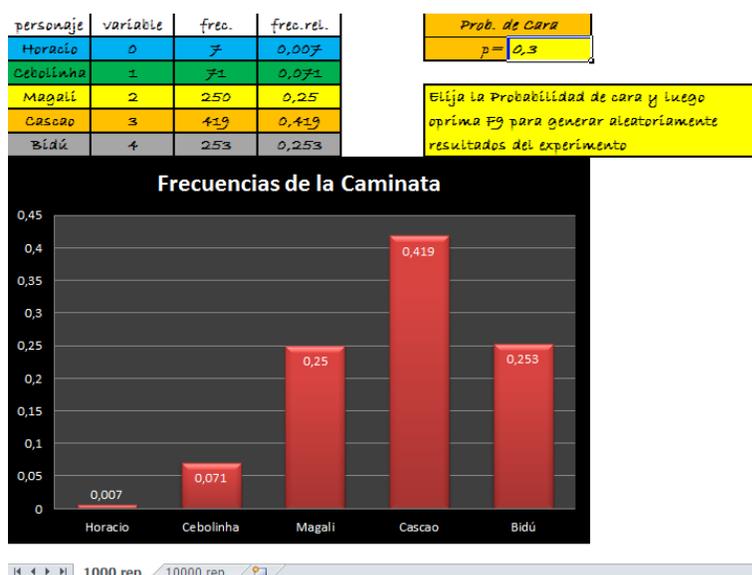
Como son cuatro resultados mutuamente excluyentes que satisface el interés específico del evento, **Mónica visita a Cascao**, entonces la probabilidad del evento es:

$$P(X = 1) = \binom{4}{1}(0.3)^1(1 - 0.3)^3$$

Si se generaliza este resultado, se tiene que:

$$P(X = x) = \binom{4}{x}(0.3)^x(1 - 0.3)^{4-x}$$

Lo que corresponde a la distribución Binomial.



El objeto presentado en la Figura 6, simula el experimento cuando Mónica utiliza una moneda cargada, suministrando la probabilidad p de que ocurra el evento cara, realizando una simulación con 1000 y 10000 repeticiones del experimento, de tal forma que genera automáticamente las frecuencias relativas de visita a cada amigo y la gráfica de barras correspondiente, la cual, se aproxima a la gráfica de la distribución binomial.

Figura 6.

Conclusiones

La investigación nos ha permitido identificar las dificultades y ventajas que se presentan en la actualidad debido a los cambios ocurridos en la tecnología y la comunicación, generando cambios en la forma de enseñanza-aprendizaje de conceptos básicos en probabilidad, tales como:

- El uso de entornos virtuales que podrían motivar al estudiante en sus procesos de aprendizaje.
- La forma en cómo el enfoque frecuentista de probabilidad puede ser utilizado por medio de simulaciones para que los estudiantes se apropien del concepto de probabilidad teórica.

Se puede ver que el proyecto aborda una temática poco desarrollada en Colombia ya que en la consulta bibliográfica no es muy usual encontrar autores colombianos. De igual manera, a nivel mundial no se realiza este tipo de investigación con frecuencia considerando esta investigación como innovación en la didáctica de la estadística.

A pesar de que es interés particular utilizar herramientas virtuales, siempre se presenta la necesidad de un entorno que involucre papel y lápiz, de esta forma se refuerza la importancia de los resultados obtenidos mediante simulación con la hoja de calculo.

Los resultados de las aplicaciones muestran que los estudiantes muestran una gran motivación durante la ejecución del experimento, aunque se presentan inconvenientes en la utilización de la hoja de calculo, en el calculo de frecuencias y probabilidades y en algunos conceptos en torno a eventos y espacio muestral, en general, se cumple el objetivo de demostrar la importancia del concepto de aleatoriedad y la ley de los grandes números, lo que mejora la viabilidad de su uso y la importancia del profesor para discutir los conceptos involucrados.

Bibliografía

Batanero, C. Didáctica de la estadística, Granada, España: Grupo de investigación en Educación estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2001.

Batanero, C., La simulación como instrumento de modelización en probabilidad, Revista Educación y Pedagogía, 2003.

Batanero, C., Godino, J.. Estocástica y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, 2003

Cazorla, I. M.; Gusmao, T. C. Uma analise semiotica dos passeios aleatorios da Monica: atividade para ensinar conceitos basicos de Probabilidade. IV SIPEM. Brasilia, 2009.

Dantal, B. Les enjeux de la modelisation en probabilite. In Enseigner les probabilites au lycee, 1997.

Fernandez, D. W. X., Fernandez, D. X. (1999). O prazer de aprender probabilidade atraves de jogos: descobrindo a distribuicao Binomial. Anais da Conferencia Internacional "Experiencias e Expectativas do Ensino de Estatistica – Desafios para o Seculo XXI. Florianopolis, SC (in Portuguese).

Kataoka, Y., Passeios Aleatorios da Carlinha: Uma Atividade Didatica para o Ensino de Probabilidade, Programa de Pos-Graduacao em Educacao Matematica Universidade Bandeirante de Sao Paulo. 2010.

Lopez, A. Objetos de Aprendizaje para relacionar circulo y estadística, unión revista iberoamericana de educación matemática, nmero 20 - página 67. 2009