Reflexiones sobre la enseñanza de la probabilidad

Giovanni Sanabria Brenes[1]

Resumen

El presente trabajo propone algunas reflexiones y un esquema para abordar la enseñanza del concepto probabilidad por medio de diferentes niveles de razonamiento a través de situaciones problema. A partir de un referente teórico se plantea que los conceptos de aleatoriedad y probabilidad deben ser estudiados progresivamente, donde su adquisición va evolucionando desde un nivel intuitivo hasta llegar a un nivel formal.

Palabras clave: didáctica, probabilidad frecuencial, ley de los grandes números, experimentación, simulación, Teoría de Situaciones Didácticas.

Abstract

This paper proposes some reflections and a scheme to address the teaching of probability concept through different levels of reasoning using problem situations. From a theoretical reference is argued that the concepts of randomness and probability should be studied progressively, where acquisition is evolving from an intuitive level to reach a formal level.

Keywords: teaching, frequency probability, law of large numbers, experimentation, simulation, Theory of Didactic Situations.

I. Introducción

Dado un fenómeno aleatorio con distintos resultados, la probabilidad de que ocurra un evento del fenómeno (subconjunto de resultados) se entiende como la medida de la posibilidad de que suceda el evento. En Sanabria (2012) se plantearon cuatro tipos de probabilidad indicados

1. **Probabilidad subjetiva o intuitiva**. Esta carece de fundamento matemático y se basa en la intuición de cada sujeto. Por ejemplo, "Hoy mi madre cumbre 68 años, es muy probable que salga el 68 en el sorteo de lotería".

2. **Probabilidad según criterio de experto**. Aunque puede ser similar a la anterior, en este caso la probabilidad es dada por un sujeto que conoce bien el fenómeno en estudio y se basa en su experiencia. Por ejemplo, "Un experto del Observatorio Vulcanológico y Sismológico señala que la probabilidad de que ocurra otro sismo fuerte es baja".

3. **Probabilidad frecuencial**. En este caso, la probabilidad de un evento será la frecuencia relativa con que se observa el evento al realizar el fenómeno cierto número de veces.

4. **Probabilidad teórica o espacios de probabilidad**. Con base en un sistema de axiomas se define un espacio que asigna una probabilidad a cada evento dentro de una familia de eventos.

---

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, gsanabria@itcr.ac.cr

Algunos espacios de probabilidad son la ley de Laplace y la probabilidad geométrica.

Sin embargo, dicha clasificación y los textos usuales de probabilidad (por ejemplo: Devore (1998) y Walpole et al (1999)) no permite apreciar los distintos niveles de razonamiento que se pueden abordar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. Además, comprender el concepto de probabilidad implica entender el concepto de aleatoriedad.

El presente trabajo propone y justifica un esquema para abordar la enseñanza del concepto de probabilidad de forma progresiva por medio de distintos niveles de razonamiento.

II. Referente teórico

La propuesta a presentar tiene su base en las siguientes teorías, las primeras dos sumamente conocidas y actualmente importantes. La última, es una propuesta de una pequeña pauta que puede guiar la enseñanza de muchos temas en matemática, cuyas deficiencias y bondades deben estudiarse. Ésta se ha denominado De lo cualitativo a lo cuantitativo, y tiene su base en la Estadística Descriptiva. Esta pauta suele estar presente en muchas prácticas educativas tanto por iniciativa del docente como en los programas de estudio, pero no suele ser presentada de forma teórica.

1. Teoría de Situaciones

La Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986) señala que el profesor debe diseñar situaciones problema cuya solución sea el conocimiento que se quiere enseñar. Así, se plantea uno o varios problemas al estudiante (situación a-didáctica), el cual debe ser motivado para que por medio de sus conocimientos previos logre resolverlos y así lograr la devolución de la situación, donde le devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al profesor. Esta situación es a-didáctica, puesto que el docente le oculta al estudiante la intención didáctica de los problemas. Cuando se logra la devolución de la situación, el profesor toma este conocimiento para institucionalizarlo, es decir el profesor relaciona este conocimiento contextualizado adquirido con el saber formal pretendido.

Así, en cada uno de los niveles de la propuesta se proponen situaciones problemas que el estudiante debe resolver a partir de su intuición y conocimientos previos. La resolución satisfactoria de estos problemas permitirá una mayor comprensión del concepto de probabilidad en ese nivel.

Además, otro elemento a considerar en la propuesta de esta teoría es la **paradoja de inadaptación a la exactitud.** En ciertas ocasiones el conocimiento se construye por etapas debido a que no hay suficientes situaciones, en estas etapas hay aproximación y cierta inexactitud entre el aprendizaje logrado y el conocimiento cultural. Esta paradoja se presenta:

- para el profesor: si enseña el saber formal este carece de significado, pero si enseña solo el saber con significado, este es más o menos erróneo y hay reproches de los profesores de niveles superiores.
- para el alumno: para aprender renuncia a comprender (inadaptaciones) o para comprender debe renunciar a no aprender (contradicciones).

En la propuesta se opta por la enseñanza bajo la comprensión, así en cada nivel se escoge enseñar un concepto de probabilidad que si bien funciona a ese nivel, puede ser erróneo según los ojos del matemático. Aquí se considera que iniciar el estudio de probabilidad con la Ley de Laplace no es lo mejor, se considera que el concepto debe ir evolucionando, pasar por la ley de Laplace y seguir a otros niveles. Pues incluso para el matemático quizás pensar en una probabilidad como la Ley de Laplace no es del todo correcto, pues este solo funciona en espacios finitos equiprobables. El concepto de probabilidad va más allá, debe evolucionar conforme el concepto de medida evoluciona.

2. Transposición Didáctica

Chevallard (1991) parte del axioma que considera a la Didáctica de la Matemática como una ciencia, la cual tiene por objeto de estudio el sistema didáctico, formado por el saber, el profesor, el alumno y el ambiente implícito en los componentes anteriores. Los sistemas didácticos conforman un sistema educativo. El fenómeno de transposición didáctica consiste en las transformaciones que sufre el saber, desde el momento en que es concebido por los eruditos (génesis del saber), puesto en texto (texto del saber) e introducido al sistema como el saber sabio, luego es analizado por diversos especialistas (noosfera: didactas, matemáticos, autoridades, entre otros), los cuales determinan el saber que debe ser introducido a los sistemas didácticos (saber a enseñar) y tomado por el profesor para que con su planeamiento lo enseñe (saber enseñado).

De esta teoría se rescatan tres elementos orientadores para la propuesta:

- Creaciones didácticas. El fenómeno de trasposición didáctica existe y es necesario. El docente se vale de creaciones didácticas para lograr que el alumno comprenda el concepto. Estas creaciones didácticas muchas veces son juzgadas por el matemático por su distancia o débil relación con el saber sabio, e incluso pueden tener aspectos erróneos, pero debe pesar también su potencial pedagógico. Este elemento tiene relación con la paradoja de la inadaptación a la exactitud.
- De las nociones protomatemáticas a las paramatemáticas. Para determinado tema de estudio se puede distinguir: **nociones paramatemáticas (**son nociones herramienta en la actividad matemática, son objetos auxiliares, necesarios para la enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos) y **nociones protomatemáticas** (capacidad o habilidad requerida según el contrato didáctico). Por otro lado, en un proceso de enseñanza-aprendizaje se suele pretender que una noción protomatemática evolucione a una noción paramatemática, más concretamente, que las habilidad que tuvo el estudiante para coordinar sus conocimientos previos para resolver con éxito una situación adidáctica inicial evolucione a una noción herramienta que permita resolver situaciones similares.

De lo preconstruido al algoritmo. La historia del estudiante, su intuición y su primer contacto con un saber, genera en él un saber preconstruido, la idea intuitiva de lo que es ese saber. El saber preconstruido es un saber frágil ligado a las situaciones iniciales. Lo preconstruido se aleja del saber científico, porque no es descontextualizable. El proceso de enseñanza-aprendizaje busca que este saber pre-construido evolucione a un saber científico que establece su algoritmización.

Lo anterior concuerda con una teoría de la comprensión en la cual la aprehensión de un concepto es gradual (Godino (1996) citado en Batanero (2005)).

3. Significados de probabilidad

Batanero (2005) brinda los distintos significados históricos de la probabilidad:

- Significado intuitivo. Es producto de ideas intuitivas y se da en personas que no han estudiado probabilidades, pero a través de frases y expresiones logran cuantificar el grado de ocurrencia de un evento.
- Significado laplaciano. La probabilidad es vista como un valor relativo formado por el número de resultados que favorecen el evento, entre el número total de resultados. Este significado es aplicable cuando la cantidad total de resultados es finita y estos son equiprobables.
- Significado frecuencial. La probabilidad es el valor al que se acerca la frecuencia relativa con que es observado el evento cuando la cantidad de veces que se repite un experimento aumenta, suponiendo que ese valor límite existe. En este caso, la frecuencia relativa con que es observado el evento, cuando la experiencia se repite un número grande de veces, es una aproximación a la probabilidad.
- Significado subjetivo. La probabilidad es el grado de ocurrencia del evento basado en el conocimiento y la experiencia personal. Esta puede ser diferente para distintas personas.
- Significado teórico. La probabilidad es una teoría matemática formalizada.

Esta clasificación basada en el desarrollo histórico de la probabilidad nos puede ayudar a abordar la enseñanza de la probabilidad, al respecto Batanero (2005) señala: "… su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidad a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad".

4. De lo cualitativo a lo cuantitativo

Muchos conocimientos matemáticos buscan describir relaciones entre elementos. Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras describe la relación que existe entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Dado este carácter descriptivo de ciertos conocimientos, la estadística descriptiva puede ayudar a abordar su enseñanza.

La estadística descriptiva, de manera general indica que una variable es lo que se observa o mide de una entidad, objeto o individuo del cual se va a obtener la información. Las variables se pueden clasifican en:

- Variable cualitativa. Lo observado es un adjetivo cualitativo (Ejemplo: estado civil, sexo,...).

- Variable cuantitativa. Lo observado es un adjetivo cuantitativo (Ejemplo: estatura en metros, edad en años cumplidos,..). Estas se clasifican en:
  - Variables Discretas o de conteo: si el valor que toma son números enteros.
  - Variables continuas: si el valor que toma puede ser cualquier número real en un determinado intervalo.

Esta clasificación de variables, puede ayudar a modelar la apropiación de ciertos conceptos matemáticos. Así, inicialmente se introduce el concepto a un nivel cualitativo, luego evoluciona a un nivel discreto, hasta llegar a un nivel continuo, en algunos casos.

Por ejemplo, analicemos el concepto de medida. Inicialmente el niño aprende a contar desde una perspectiva cualitativa, donde el número indica la posición que ocupa un dedo de la mano, luego indica la posición de un elemento en el conjunto (cualidad ordinal) y después la cantidad de elementos en un conjunto (cualidad cardinal). Luego, para determinar cual conjunto finito tiene más elementos, desarrolla el nivel de razonamiento discreto de la medida. Este concepto evoluciona cuando se estudia los números racionales, y luego los reales. Incluso a nivel universitario, el concepto de medida evoluciona con el estudio de la integración.

En general, la enseñanza de muchos conocimientos matemáticos pasan de un razonamiento cualitativo a un cuantitativo, sin perder su carácter cualitativo. Por ejemplo:

- El concepto de fracción. Estudio de las fracciones inicialmente es cualitativo, cuando se realizan diagramas para representar las fracciones, luego se pasa a un nivel cuantitativo al pasar las fracciones a representación decimal por ejemplo.

- Teorema de Pitágoras. Inicialmente el estudio de triángulos rectángulos es de tipo cualitativo: cómo son, cómo se construyen, cuáles son los catetos y cuál es la hipotenusa. Posteriormente, se estudia su faceta cuantitativa: el teorema de Pitágoras, que relaciona las medidas de sus lados. Ya este nivel incluso el término cateto se utiliza tanto para indicar cierto lado del triángulo (cualitativo) como para indicar la medida de ese lado (cuantitativo).

Dado que la probabilidad es una medida (medida de la posibilidad de que suceda de un evento), la presente propuesta plantea que su enseñanza se aborde progresivamente, desde una faceta cualitativa del concepto y que evolucione a un concepto cuantitativo continuo para un nivel universitario.

III. Propuesta de niveles de razonamiento en probabilidad

A partir del marco de referencia anterior se plantean 5 niveles de razonamiento para abordar la enseñanza de la probabilidad.

De acuerdo a Batanero (2005), los significados de probabilidad están ligados entre si, razón por la cual no se puede abordar la enseñanza con base en solo uno de ellos. Además, se parte del supuesto que cuando un concepto evoluciona de lo cualitativo a lo cuantitativo, este pasa por una serie de niveles de razonamiento, donde los niveles superiores no anulan los anteriores, por el contrario los enriquecen. Seguidamente se presenta la relación entre los niveles planteados y los significados de probabilidad:

Significado	Nivel cualitativo	Nivel discreto	Nivel relativo	Nivel algebraico	Nivel numérico
Intuitivo	X	X	X	X	X
Laplaciano		X	X	X	X
Frecuencial					X
Subjetivo					X
Teórico				X	X

Observaciones:

- Las marcas indican en qué niveles se desarrolla en cierto grado un significado. Sería ingenuo pensar que se desarrolle un significado en su totalidad en algunos de los niveles.
- El significado laplaciado inicia a un nivel discreto, cuando las probabilidades a hallar son sobre un mismo espacio muestral, por lo tanto no se requiere el denominador (los casos totales).
- Los niveles algebraico y numérico se pueden desarrollar conjuntamente. Incluso el nivel numérico se puede iniciar antes del algebraico.
- En el nivel numérico se pretende desarrollar el concepto de aproximación al valor de una probabilidad. La matemática numérica se dedica a establecer aproximaciones a un valor real, y también a formular sucesiones de aproximaciones cada vez mejores que parten de una o varias aproximaciones dadas a priori (por ejemplo, el Método de Newton Rapson parte de una aproximación inicial y a partir de ella define una sucesión de aproximaciones que se acercarán progresivamente a la solución de una ecuación). Note que lo anterior se encuentra muy ligado con el significado frecuencial y subjetivo. Sin embargo, la propuesta no ha contemplado ejemplos para el significado subjetivo.
- Esta propuesta de niveles está a un nivel indagatorio, requiere ser más robusta, debe ser nutrirla con más referentes teóricos.

Seguidamente se describen los niveles propuestos.

Primer nivel: Cualitativo

En este nivel se abordar intuitivamente los conceptos involucrados en la aleatoriedad y probabilidad.

Contenidos de enseñanza:

- Situaciones aleatorias y deterministas.
- Concepto de espacio muestral.
- Situaciones improbables, poco probables, muy probable.

A. Aleatoriedad

La existencia del azar es un tema controversial que puede despertar la curiosidad de los estudiantes. Para algunos, el azar está presente en una serie de fenómenos de la vida cotidiana, como por ejemplo: lanzar un dado, un sorteo de lotería. Por otro lado, hay quienes creen que el resultado de todo fenómeno está determinado por ciertas condiciones, así se desconoce el resultado que se obtendrá en un dado por la imperfección humana que no puede asociar la altura del lanzamiento y los movimientos realizados con el resultado. Al respecto, Ekeland (1992) señala:

¿Existe realmente el azar o somos víctimas de una ilusión? Tal vez se trate de una noción esencialmente matemática, de una idealización de la realidad, así como la recta infinita y sin espesor del geómetra es una idealización de la línea trazada en el cuaderno de un escolar... Pero ciertas variables se nos ocultan, y es esta ignorancia lo que crea la ilusión del azar; somos como un observador colocado bajo una mesa de vidrio transparente sobre la cual se desarrolla una partida de naipes; el observador sólo verá el dorso de las cartas y no podrá comprender la evolución del juego.

Esta tesis de determinismo excesivo es apoyada por Albert Einstein con su célebre frase "Dios no juega a los dados con el universo". Bajo esta premisa, el azar debe dejar de sorprendernos y ser domado; sin embargo, los defensores de este camino no han logran avanzar significativamente y muchos fenómenos, al ser considerados azarosos, pueden ser descritos mediante la probabilidad, donde por ejemplo, se espera que los resultados con baja probabilidad no sucedan o tenga una baja frecuencia, aunque algunas veces la realidad nos traicione.

En general, se acepta que los fenómenos o experimentos pueden ser de dos tipos:

1. **Deterministas**: en circunstancias normales se sabe su resultado.
2. **Aleatorios**: no se conoce su resultado.

Es importante que el estudiante pueda clasificar los fenómenos en aleatorios y determinista.

Ejemplo. Algunos fenómenos deterministas son:

1.Encender un disco de una cocina. Resultado: el disco se calienta.

2.Abrir la llave de un tubo. Resultado: sale agua.

3.El décimo dígito de la sucesión binaria 1,0,1,1,0,1,1,1,0... Resultado: es un 1. Se puede apreciar que la sucesión va aumentando la cantidad de unos intercalados por un cero.

Ejemplo. Algunos fenómenos aleatorios son:

1.Sorteo de la lotería del próximo domingo.

2.Lanzamiento de un dado.

3.El número de personas que están en una determinada hora en un cajero.

4.La temperatura para mañana en San José en una hora determinada.

Además se pueden plantear actividades donde el estudiante debe plantear condiciones sobre un fenómeno para que sea aleatorio o determinista.

Ejemplo. Considere la experiencia de escoger un helado de la POPS, bajo cuáles condiciones esta experiencia es aleatoria, y bajo cuáles es determinista. Este un problema abierto que puede propiciar la discusión, incluso las respuestas nos pueden asombrar.

No todos los procesos o experimentos aleatorios pueden ser descritos por la probabilidad. Los que sí pueden ser estudiados por la probabilidad tienen las siguientes características:

1. Se conocen todos los posibles resultados (espacio muestral) antes de realizarse el experimento.
2. Es aleatorio, es decir no se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en el experimento.
3. El experimento puede repetirse.

Por otro lado, el estudiante debe analizar cuales fenómenos pueden ser probabilizables.

Ejemplo. Determine cuales de las siguientes experiencias son probabilizables:

1. Lanzar una moneda.

2. Estado del tiempo para mañana.

3. El nombre del primer bebé que nacerá mañana el hospital.

En esta etapa es muy importante la discusión, que los estudiantes expresen sus ideas, incluso es muy rico abordar problemas abiertos, donde se tome una decisión a partir de la discusión. Lo peor que se puede hacer es formalizar demasiado esta etapa que es intuitiva y natural.

El concepto de espacio muestral es muy importante desarrollarlo desde este nivel. Se le pueden presentar situaciones problema al estudiante donde él debe identificar los posibles resultados y definir un posible espacio muestral.

Ejemplo. En una canasta hay 3 bolas azules, 4 rojas y 5 verdes. Se saca una bola sin verla. Describa el espacio muestral.

Ejemplo. En una localidad hay tres colegios: A, B, C. Los padres de Juan eligen un colegio alñ azar para que Juan asista el próximo año. Describa el espacio muestral.

Además interesa que repita experiencias aleatorias y que observe que se puede presentar diferentes resultados. Interesa que pueda idear maneras de modelar situaciones aleatorias. Por ejemplo, se le puede ocurrir, hacer papelitos marcados, donde cada papel represente uno de los objetos a elegir aleatoriamente.

Ejemplo. Realice cada una de las siguientes experiencias aleatorias 10 veces y registre los posibles resultados. Compare los resultados obtenidos con sus compañeros.

1. *Se lanza una moneda.*
2. *Se sacan una bola al azar de una canasta con 3 bolas azules, 4 rojas y 5 verdes.*
3. *Se elige una vocal al azar.*
4. *Se elige una letra al azar de la palabra: PALABRA.*

<u>B. Probabilidad</u>

Interesa que el estudiante pueda calificar la probabilidad en términos cualitativos. Es decir, la probabilidad es la medida de la posibilidad de que ocurra un evento, esta medida se puede introducir de forma cualitativa ordinal: improbable, poco probable y muy probable. La idea es recurrir a la intuición de los estudiantes para que ellos califique de forma adidáctica la probabilidad, es decir, sería un error tratar de definir: improbable, poco probable y muy probable. Dejemos que ellos intuitivamente se enfrente a las situaciones y posteriormente propiciemos la discusión para confrontar sus apreciaciones para afinar el concepto de estos calificativos de probabilidad.

Ejemplo. Determine si las siguientes situaciones son: improbables, poco probables o muy probables:

1. El cielo está oscuro, ¿cuál es la probabilidad de que llueva?

2. Estamos en verano, ¿cuál es la probabilidad de que llueva?

3. Juan se corto el pelo la semana pasada, ¿cuál es la probabilidad de que se lo vuelva a cortar hoy?

4. ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 101 en la lotería?

El objetivo principal de la probabilidad es orientar en los procesos de decisión, esto se puede introducir desde este nivel.

Ejemplo. El cielo está oscuro y voy a salir a caminar, ¿debo llevar sombrilla? La decisión que se toma no siempre es la correcta pero si la más probable.

Ejemplo. Juan elige una letra al azar de la palabra: PALABRA. ¿Cuál letra cree usted que elija Juan? Se puede asegurar que ese será letra que elige Juan.

2. Segundo nivel: Discreto

Contenidos de enseñanza:

- Espacio muestral y eventos
- Calificación de la probabilidad de que ocurra un evento sobre un espacio finito equprobable, a partir de la cantidad de resultados que posee, como: improbable, poco probable, de un 50%, muy probable y 100% probable.
- Comparación de probabilidad de eventos de un mismo espacio muestral.
- Simulación de situaciones de la realidad con objetos concretos.

<u>A. Aletoriedad</u>

Aquí se puede introducir la notación de espacio muestral y eventos.

Ejemplo. Considere la experiencia de lanzar un dado. ¿Esta experiencia puede ser estudiada por la probabilidad? ¿Cuáles son los posibles resultados? ¿Cuáles de esos resultados favorece que el resultado sea par?

A partir del ejemplo anterior, se puede introducir los conceptos a utilizar:

- Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados, este se denota: Ω
- Eventualidad: es un resultado particular, es decir un elemento de Ω.
- Evento: es un conjunto de resultados, es decir un subconjunto de Ω.
- Ocurrencia de un evento. Se dice que un evento ocurre si sucede una y solo una de sus eventualidades.
- Evento casi seguro: Ω
- Evento casi imposible: φ

Ejemplo. Considere el experimento "Tirar un dado".

1. *¿Cuál es espacio muestral Ω?*
2. *Describa como subconjuntos de Ω los eventos*

   A: el resultado del dado es impar

   B: el resultado del dado es mayor a 4
3. *Suponga que el resultado es 3. ¿Ocurre A? ¿Ocurre B?*

   El espacio muestral por 6 resultados $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Observe que 6 es una eventualidad. Note que $A=\{1,3,5\}\subseteq\Omega$, $B=\{5,6\}\subseteq\Omega$. Si el resultado del dado es 3 entonces se dice que el evento A ocurre, el Evento B no ocurre.

También se puede introducir al uso de tablas para representar el espacio muestral.

Ejemplo. Se lanza dos dados distintos y se registra la suma de sus puntos. Describa el espacio muestral y el evento: el resultado es múltiplo de tres.

Dado 2

Dado1

+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

El espacio muestral está conformado por 36 resultados que se aprecian en el cuadro anterior. El evento "el resultado es par es múltiplo de tres" se presenta cuando se dan los resultados:

# de resultado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dado 1	2	1	5	4	3	2	1	6	5	4	3	6
Dado 2	1	2	1	2	3	4	5	3	4	5	6	6

<u>B. Probabilidad</u>.

Se pretende ver a la probabilidad, medida de la posibilidad de que ocurra un evento, como una medida discreta. Así, la probabilidad de un evento se puede ver como la cantidad de elementos del espacio muestral que favorecen ese evento. Pero, ¡eso sería un gran error!

Ejemplo. Se lanza dos dados distintos y se registra la suma de sus puntos. La cantidad de resultados que favorecen que el resultado5 son 4. Entonces, ¿la probabilidad de obtener 5 sería 4?

La intención no es ver a la probabilidad como una medida en términos absolutos, eso sí sería un gran error. La intención es verla en términos relativos donde en veces de recurrir a las fracciones se recurre a valores enteros ligados a un componente cualitativo. La idea es establecer un paso intermedio entre una probabilidad cualitativa (primer nivel) y una probabilidad según la Ley de Laplace (tercer nivel). Se debe aprovechar aún la intuición del estudiante para avanzar en un concepto de probabilidad mejor al del nivel anterior, con la ventaja de que el estudiante puede llegar a este nuevo nivel sin conocer las fracciones.

En concreto, se va a calificar la probabilidad de que ocurra un evento como:

Improbable: si no incluye por lo menos uno de los resultados.

Poco probable: si abarca menos de la mitad de los resultados.

De un 50%: si abarca menos de la mitad de los resultados.

Muy probable : si abarca más de la mitad de los resultados.

100% probable: si abarca más todos resultados.

Se recomienda no dar estas definiciones directamente, sino introducirlas por medio de situaciones problema y su discusión.

Ejemplo. Se lanza un dado. Considere el evento A: obtener un número menor a tres.

1. *¿Cuántos resultados favorecen a A?*
2. *¿Cuántos resultados no favorecen a A?*
3. *Considera que la ocurrencia de A es improbable, poco probable, de un 50%, muy probable, 100% probable. Justifique su respuesta.*

El ejemplo siguiente brinda otras situaciones que se pueden utilizar.

Ejemplo. Se lanza un dado, describa cuál es la probabilidad de:

Sacar un par (50% probable)

Sacar un múltiplo de tres (poco probable)

Sacar un número menor a 5. (muy probable)

Sacar un siete. (improbable)

Sacar un número menor a 10. (100% probable)

No se debe dejar de lado el don que tiene la probabilidad para orientar la toma de decisiones.

Ejemplo. En una fiesta se juega el juego Dado a Cuatro. Consiste en lanzar un dado, si el resultado es menor igual a cuatro, se gana el juego. El costo del juego es de 100 colones y si gana se obtiene 200 colones. ¿Vale la pena jugarlo?

Además, a este nivel, se puede introducir una nueva faceta del concepto de probabilidad: la comparación de eventos de un mismo espacio muestral.

Ejemplo. Se lanza un dado, ¿qué es más probable: sacar un par o sacar un múltiplo de tres? En este caso, sacar par es 50% probable (3 resultados de 6) y sacar un múltiplo de tres es poco probable (2 resultados). Por lo tanto es más probable sacar un par.

Ejemplo. Se lanza dos dados distintos y se registra la suma de sus puntos. ¿qué es más probable: obtener un cinco o un siete?

Ejemplo. Ana lanza dos dados distintos y como resultado se registra la suma de sus puntos.

a. Si tuviera que adivinar el resultado de Ana, ¿Qué resultado escogería?

b. Lanza un par de dados 50 veces y registre los resultados obtenidos, ¿cuántas veces se obtuvo el resultado escogido?

También, se puede retomar la idea de que simule la realidad con objetos concretos.

Ejemplo. Un Cua-dado es un dado de forma de pirámide de cuatro caras. Sus caras tienen marcados los números: 3,5,6,8. Cada una de sus caras tiene la misma posibilidad de salir. Se lanzan dos Cua-dados distintos y como resultado se registra la suma de sus puntos.

a. Describa el espacio muestral

b. Simula el lanzamiento de dos Cua-dados 50 veces y registre los resultados

c. Describa la probabilidad de los siguientes eventos:

Obtener un par

Obtener un 4

Obtener un número menor a 20

Obtener un número menor a 6

d. ¿Qué es más probable: obtener un par o un impar?

Ejemplo. El juego COSTA está formado por cinco fichas cada una con una letra de la palabra COSTA. El jugador toma dos fichas de las cinco de forma secuencial.

a. Describa el espacio muestral.

b. Simula el juego 50 veces y registre los resultados.

b. Describa la probabilidad de los siguientes eventos:

Obtener una vocal y luego una consonante.

Obtener una consonante y luego una vocal.

Obtener dos vocales.

Obtener dos consonantes.

c. ¿Qué es más probable: obtener una vocal y luego una consonante, o obtener una consonante y luego una vocal?

d. Simula el lanzamiento de dos Cua-dados 50 veces y registre los resultados.

Tercer nivel: Relativo

Contenidos de enseñanza:

- Regla de Laplace.
- Comparación de probabilidad de eventos de distinto espacio muestral.

Aquí la probabilidad, medida de la posibilidad de que ocurra un evento, es dada por la ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$

La necesidad de esta medida de probabilidad relativa se puede introducir a través del problema de comparar la probabilidad de eventos de distintos espacios muestrales.

Ejemplo. ¿Qué es más probable: obtener Escudo en una moneda o un múltiplo de tres en un dado? Observe que este ejemplo no es posible continuar con el concepto de probabilidad anterior, esto pues solo hay un resultado de una moneda que es escudo y dos resultados de un dado que son múltiplo de tres, sin embargo es más probable lo primero. Para justificar esto al estudiante, se puede optar en un primer momento por una verificación experimental: lanzar la moneda y el dado 100 veces y mirar la frecuencia con que suceden ambos eventos. En un segundo momento se le puede pedir al estudiante que trate de justificar lo observado en base a los espacios muestrales, con la espera de que logre captar la necesidad de una probabilidad relativa a la cantidad de resultados.

Una vez establecido el nuevo concepto de probabilidad, se puede hablar ya ha este nivel de "calcular la probabilidad". Note que en los ejemplos anteriores tenían un enfoque más cualitativo pues solo pedían describir probabilidades. Este nuevo concepto es más cuantitativo, sin embargo no se debe dejar de lado se carácter cualitativo y orientador en la toma de desiciones.

Ejemplo. Se tiene una canasta con quince bolas numeradas del 1 al 15. Las bolas con número del 1 y 7 son rojas, y las demás son verdes. Se elige una bola al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga número múltiplo de tres?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga número par o múltiplo de tres?

Ejemplo. (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por mil colones se puede jugar "Dados a seis". Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de ambos es menor igual a 6, se gana el juego; si no se pierde. ¿Vale la pena jugar el juego?

Ejemplo. Se sientan en una banca Juan, Ana, Luisa y Pablo de forma aleatoria. Determine la probabilidad de que

a. Juan se siente a los lados de la banca

b. Se siente las mujeres juntas.

c. Las mujeres juntas y los hombres también.

Cuarto nivel: Algebraico

Contenidos de enseñanza:

- Propiedades de las probabilidades

Aquí se introduce la notación algebraica de probabilidad: $P(A)=\frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$. Y se estudian algunas de sus propiedades:

1. $P(\overline{A})=1-P(A)$.
2. $P(\Omega)=1, \quad P(\phi)=0$.
3. Si A y B son disjuntos entonces $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

En este nivel se puede establecer situaciones donde el estudiante deduzca o verifique estas propiedades a partir de cálculos de probabilidades realizados. Luego, se les puede pedir que apliquen estas propiedades.

Ejemplo. Se elige un estudiante de la Universidad Futuro Garantizado, la probabilidad de que él matricule Matemática I es de 35%; Programación, del 25%; Matemática I y Programación, del 20%.

a. Describa el espacio muestral y defina los eventos involucrados.

b. Determine la probabilidad de que el estudiante elegido

1. No matricule Matemática. R/ 65%

2. Matricule Matemática I o Programación. R/ 40%

3. No matricule Matemática I ni Programación. R/ 60%

Para cursos más avanzados se les puede solicitar a los estudiantes que demuestren identidades utilizando estas propiedades.

Ejemplo. Sean A, B y C eventos no nulos tales que: A y C son disjuntos, $P(A\cap B)=\frac{P(A)}{3}$ y $P(B\cup C)=\frac{P(A)}{5}$. *Pruebe que* $P(A\cup B\cup C)=\frac{13}{15}P(A)$.

Quinto nivel: Numérico (Aproximación)

Contenidos de enseñanza:

- Probabilidad frecuencial.

Para que la probabilidad sea útil debe existir una correspondencia entre la probabilidad y la realidad, es decir, si el experimento se repite varias veces, la frecuencia relativa observada con que ocurre un evento debe ser cercana a la medida de la posibilidad de que ocurra. Esta relación debe ser importante desde el primer nivel, y por eso se ha indicado desde el inicio la necesidad de que los estudiantes repitan varias veces una experiencia aleatoria, e incluso que simulen dicha experiencia con elementos concretos (por ejemplo el Cua-dado).

Esta relación entre probabilidad y realidad es necesaria y su puede utilizar en dirección inversa para estimar probabilidades. En efecto, si se desconoce la probabilidad p de que ocurra un evento asociado a un experimento, se espera que al repetir varias veces el experimento la frecuencia relativa observada con que este ocurre sea cercana a p. Esto permite definir la probabilidad frecuencial: Dado un evento asociado a una experiencia aleatoria, la probabilidad frecuencial es la frecuencia relativa observada con que ocurre el evento al repetirse la experiencia varias veces.

Ejemplo. Aproxime la probabilidad de que al lanzar dos monedas se obtengan dos caras

Ejemplo (¿Funciona o no la probabilidad frecuencial?) Se discuten en parejas los siguientes problemas:

- *(¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Karla, Jorge y Anthony desean determinar si vale la pena jugar el juego, para ello deciden que cada uno juegue veinte veces DADOS A SEIS obteniendo los siguientes resultados:*

	# de veces que se ganó	*Probabilidad frecuencial de ganar*	*¿Vale la pena Jugar?*
Karla	*7*	*(7/(20))=35%*	*NO*
Jorge	*10*	*10)/(20))=50%*	*Es indiferente*
Anthony	*12*	*12)/(20= 60%*	*SI*

Se puede apreciar que los resultados obtenidos utilizando la probabilidad frecuencial son muy distintos. Tal parece que algunas probabilidades frecuenciales no se acercan al valor real de la probabilidad. ¿Cuál es realmente la probabilidad de ganar DADOS A SEIS?

- *(¡El falso determinismo!) Un software asegura que detecta el 90% de los fraudes bancarios que ocurren en las tarjetas. Ante esto el Banco de Los Sueños decide adquirir el software para detectar los fraudes que le ocurre a sus clientes en las tarjetas. Sin embargo, en el primer momento de uso, el software no detectó un fraude. El banco decide demandar a la empresa, pero al revisar el software, resulta que los cálculos están bien hechos. ¿Qué está sucediendo entonces?*

La Ley de los Grandes Números establece las condiciones bajo las cuales la probabilidad frecuencial de que ocurra el evento se aproxima a la probabilidad real o teórica: Dado un experimento, sea A un evento, si el experimento se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A será muy cercana al valor real de la probabilidad.

Ejemplo. Considere nuevamente el problema ¿Juegas o no?

a. ¿Cuál es la causa de las distintas respuestas obtenidas por Karla, Anthony y Jorge?

b. Simule 100 veces este juego por medio de Excel.

c. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial observada de ganar el juego?

d. ¿Vale la pena Jugar DADOS A SEIS?

El siguiente ejemplo busca que el estudiante logre refutar el mito de que la Ley de los Grandes Números es en términos absolutos.

Ejemplo. Explore con Excel la siguiente afirmación: De acuerdo a la Ley de los grandes números, entre más veces se tira una moneda, más cerca se estará el número obtenido de escudos de la mitad del total los lanzamientos.

Para un abordaje más detallado de este nivel puede consultar Sanabria & Núñez (2010, 2011).

IV Conclusión

A partir del referente teórico se establecieron cinco niveles para abordar la enseñanza del concepto de probabilidad: cualitativo, discreto, relativo, algebraico y numérico.

En cada uno de los niveles se establecieron pautas generales sobre la enseñanza de la probabilidad y algunos ejemplos. Así, se aborda la comparación entre eventos de un mismo espacio muestral, la comparación de eventos de espacios muestrales distintos, la probabilidad para orientar la toma de decisiones y La ley de los Grandes números como herramienta para aproximar una probabilidad.

La propuesta presentada es una primera aproximación que requiere ser nutrida, pulida y llevada al aula para ser válida.