# La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones

Giovanni Sanabria Brenes[1] & Félix Núñez Vanegas[2]

**Resumen**

La resolución de problemas como metodología de enseñanza actualmente ocupa un lugar privilegiado en la matemática. La enseñanza de la probabilidad, considerada como una disciplina de las matemáticas, no debería estar desligada de esta metodología y sí permear sus procesos de aprendizaje. No obstante, siendo la didáctica de la probabilidad un campo incipiente, las propuestas en torno de su enseñanza son pocas, y encontrar propuestas didácticas basadas en la resolución de problemas, es difícil. Lo anterior plantea entonces interrogantes válidas, tales como, si se considera a la probabilidad como modelo para resolver problemas, ¿cómo resolver con éxito un conjunto de situaciones problema? Por otro lado, ¿Qué limitaciones tiene el modelo probabilístico en la resolución de dichas situaciones? Y desde luego también, es natural preguntarnos, ¿cómo desarrollar en el estudiante el pensamiento probabilístico a través de situaciones problemáticas?

El presente trabajo pretende dar una respuesta parcial a estas interrogantes, recurriendo a los principales referentes teóricos de resolución de problemas: Polya (1965), Schoenfeld (1985) y Brousseau (1986). Y además, se consideran los significados de probabilidad propuestos por Batanero (2005). Así, se propone una clasificación de las situaciones problemas en probabilidad: Aquellas centradas en el cálculo de probabilidades (ampliamente tratadas en los libros de texto), las que tienen que ver con la toma de decisiones y las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

Por otro lado, queremos caracterizar las situaciones problema que tienen que ver con toma de decisiones. Así, se parte de un problema básico de cálculo de probabilidades con dados, y poco a poco a la luz de referentes teóricos, este se va transformado en una situación problema de toma de decisiones que permita abordar la enseñanza de la probabilidad. En este trabajo, solo se diseña la situación problema, esta requiere ser validada en el aula.

Finalmente, producto de la construcción de la situación, se plantean una serie de características y recomendaciones para la formulación de situaciones problema de toma decisiones con fines didácticos.

*Palabras clave*: didáctica, probabilidad, situaciones problema, resolución de problemas.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, gsanabria@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica -- Universidad de Costa Rica, fnunez@itcr.ac.cr

**Abstract**

Solving problems as teaching methodology is nowadays used in math. Teaching of probability, considered as a discipline of mathematics, should not be detached from this methodology and should permeate their learning processes. However, being the teaching of probability an emerging field, proposals around his teaching hardly appear, and find educational proposals based on problem solving, it is difficult. This raises valid questions such as the following: If we consider the probability as a model to solve problems, how to solve successfully a set of problem situations? On the other hand, what limitations does the probabilistic model in resolving such situations? And also, it is natural to ask how the student develop probabilistic thinking through problem situations?

This paper aims to give a partial answer to these questions, taking as base, theoretical referents on solving problems: Polya (1995), Schoenfeld (1985) and Brousseau (1986). Beside of this, we are considering the different meanings of probability proposed by Batanero (2005). Of this way, it is considered in this paper first, a classification of situations problems in probability: Those focused on the calculus of probabilities (widely discussed in textbooks), others which have to do with made decisions and situations beyond random probability using as a model.

On the other hand, we want to characterize problem situations that have to do with made decisions. To do this, we take a basic problem of calculating probability using dices, and little by little, through theoretical referents, our problem is becoming in to a made decision situation problem, which allows to aboard the probability teaching. In this paper it is designed only the situation problem, and it is required to be validated in the classroom.

Then, once it made this classification, we offer a recommendation about of using this situations in different moments of the teaching process.

Finally, as a result of construction situation, a characteristics and recommendation series are posed in order to formulate made decision situation problems with teaching purposes.

*Keywords*: Didactics, probability, situation problems, solving problems.

## I. La resolución de problemas en la enseñanza de la probabilidad

Las teorías en didáctica de las matemáticas actuales se centran en una enseñanza basada en la resolución de problemas. En particular, la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1986), señala que el profesor debe diseñar situaciones problema cuya solución sea el conocimiento que se quiere enseñar. Así, se plantean uno o varios problemas al estudiante (situación a-didáctica), el cual debe ser motivado, para que por medio de sus conocimientos previos, logre resolverlos y así lograr la devolución de la situación, en la que le devuelve la responsabilidad de su aprendizaje al profesor. Cuando se logra la devolución de la situación, el profesor toma este conocimiento para institucionalizarlo, es decir, el profesor relaciona este conocimiento contextualizado adquirido con el saber formal pretendido. Luego este saber debe ser aplicado en la resolución de problemas. El aprendizaje en esta teoría se evidencia, cuando en un medio a-didáctico, en un contexto fuera incluso del ámbito escolar, el estudiante es capaz de aplicarlo para resolver algún problema en el que intervenga dicho conocimiento. Por otro lado, Vérgnaud (1990), en su teoría de Campos Conceptuales establece que, un conocimiento si se precia de ser racional, éste debe ser operatorio, de lo contrario, no es conocimiento.

En ese sentido, la probabilidad no debe ser utilizada con el único fin de medir la posibilidad de ocurrencia de eventos, como se hace en muchos libros de texto, donde los problemas se reducen a “calcule la probabilidad de….”.

De acuerdo a lo anterior, el concepto de probabilidad se adquiere en su aplicación, dándole sentido al concepto.

Así, la resolución de problemas juega un papel importante en la enseñanza de la probabilidad. Sobre esto, Polya (1965) señala la necesidad de educar nuestra intuición para desarrollar una heurística o arte para resolver los problemas. Sin embargo, Schoenfeld (1985) señala que además de las heurísticas planteadas por Polya es necesario agregar tres dimensiones más para tener éxito en la resolución de problemas, éstas son: Recursos (conocimientos previos), Control (habilidad para monitorear y evaluar el proceso de resolución del problema) y el Sistema de Creencias (creencias sobre lo que es conocer y hacer matemática).

La resolución de problemas debe permear el proceso de enseñanza, y debe estar presente no solo al final para aplicar los conceptos adquiridos, sino también, al inicio, para aprehenderlos. El profesor debe diseñar buenas situaciones problema para lograr estos objetivos.

En el caso de probabilidad, ¿Qué es resolver un problema? Al revisar diversos libros de texto, aunque algunos plantean situaciones atractivas y contextualizadas, el problema se reduce al cálculo de la probabilidad de un determinado evento. Esto da la sensación de que se busca calcular probabilidad sin ningún otro fin, más que el de calcular. Así, después de abordar el estudio de un tópico de probabilidad, los problemas a resolver se reducen a calcular probabilidades.

Si bien se puede aprovechar el concepto intuitivo de probabilidad que posee el estudiante, el fin de un ambiente a-didáctico es que el conocimiento a enseñar surja del tratamiento con la situación y no que la misma situación lo mencione.

Entonces, ¿cuáles situaciones problema pueden ser útiles en la enseñanza de la probabilidad? Con base en lo anterior, proponemos las siguientes:

Para la introducción del concepto de probabilidad. Se recomienda utilizar situaciones sobre toma decisiones.

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de probabilidad. En esta etapa debe predominar las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades, pero estás se pueden combinar con situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilicen la probabilidad como modelo.

Para la aplicación de los conocimientos aprendidos. Se recomienda el uso principalmente de situaciones sobre toma de decisiones y situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo.

Así se proponen tres tipos de situaciones: las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades (ampliamente tratadas en los libros de texto), las situaciones sobre toma de decisiones (que serán abordadas en un próximo trabajo) y las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo (a exponer en el presente trabajo).

Las situaciones centradas en el cálculo de probabilidades son ampliamente tratadas en los libros de texto. En cuanto a las situaciones ajenas al azar que utilizan la probabilidad como modelo, éstas fueron descritas en Sanabria & Núñez (2016).

El presente trabajo pretende caracterizar las situaciones problema que tiene que ver con toma de decisiones, de tal manera que, se parta de un problema básico de cálculo de probabilidades con dados, y poco a poco, a la luz de referentes teóricos, el mismo se va transformado en una situación problema de toma de decisiones que permita abordar la enseñanza de la probabilidad.

Finalmente, producto de la construcción de la situación, se plantean una serie de características y recomendaciones para la formulación de situaciones problema de toma decisiones con fines didácticos.

## II. La toma de decisiones y el cálculo de probabilidades

Generalmente en las clases de probabilidad los problemas se reducen al cálculo de la probabilidad de un determinado evento. La resolución de un problema de calcular una probabilidad de un evento, consiste en redactar el evento en términos de matemáticas y proceder a utilizar el algoritmo adecuado para calcular la probabilidad de dicho evento.

Para entender lo que estamos hablando, consideremos la siguiente situación.

*Ejemplo. En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lanzar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. ¿Cuál es la probabilidad de ganar DADOS A SEIS?*

*Solución. El problema tiene como único fin calcular una probabilidad: la probabilidad de que al lanzar dos dados distintos la suma de los resultados sea menor igual a 6. La siguiente tabla muestra los posibles resultados de la suma al lanzar dos dados, se sombrean los resultados menores iguales a seis:*

*Dado 2*

| | + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *Dado1* | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* |
| *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* | *12* |

*Resulta que de los 36 posibles resultados al lanzar dos dados sólo hay 15 en los cuales la suma de los resultados es menor igual a 6. Por lo tanto, la probabilidad de ganar el juego es 15/36.*

Se resolvió el problema. Note que solo se hizo el cálculo pero no interesa utilizarlo para algo. Es más, para el estudiante, no interesa saber cuánto da la probabilidad, solo si lo hizo correcto o no. El único fin del estudiante es que su cálculo concuerde con la respuesta correcta.

Estos tipos de problemas no entran en las situaciones problema de Brousseau (1986) y descontextualizan el concepto de probabilidad. Recordemos que un concepto adquiere sentido en su aplicación. Así se deben plantear situaciones en las cuales el estudiante al involucrarse con el problema, vea como una opción recurrir a la probabilidad para medir la posibilidad de ocurrencia de uno o varios eventos que detecte, y utilice el valor de esas probabilidades para dar una solución al problema. Pero, ¿Cómo serán estas situaciones problema? ¿Qué tipo de solución dan al problema?

Para plantear estas situaciones problemas debemos analizar las aplicaciones del concepto de probabilidad. Una de las principales aplicaciones de la probabilidad es la toma de decisiones. Cambiar un problema como “calcule la probabilidad de ganar el juego” por “¿Jugaría dicho juego?” o “pagaría por jugar dicho juego”, le da sentido al problema e involucra al estudiante.

Replanteemos el ejemplo anterior.

*Ejemplo. En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. ¿Jugarías DADOS A SEIS?*

En esta situación problema el estudiante debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS. Así, para decidir se requiere que el estudiante recurra a un subproblema que le ayudara a decidir, este es: ¿Cuál es la probabilidad de resolver DADOS A SEIS?

De acuerdo al ejemplo anterior, la probabilidad de ganar el juego es de 15/36. Pero la solución del problema no queda ahí, se debe tomar la decisión. Resulta que 15/36 es aproximadamente 41.67%. Así, la probabilidad de ganar DADOS A SEIS es cercana al 42% que es menor al 50%, por lo que la decisión más racional es no jugar el juego, pues es mayor la probabilidad de no ganarlo (cerca del 58%) que la probabilidad de ganarlo (cerca del 42%).

La probabilidad se puede ver como un modelo para resolver problemas de toma de decisiones. Una de las características principales del modelo probabilístico es que no es determinista, es decir la solución brinda al problema de toma de decisiones no es la correcta sino la que probablemente sea más beneficiosa.

El cálculo de probabilidades por sí solo no es atractivo para los estudiantes y erosiona el concepto de probabilidad.

## III. La probabilidad: un insumo para tomar decisiones

Considere de nuevo el juego DADOS A SEIS del ejemplo anterior. En este problema el estudiante debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS. Esta decisión es importante, pues puede perder los 1000 colones que da para jugar o por el contrario, obtener una ganancia de 500 colones en caso de ganar el juego. Así, la probabilidad surge como herramienta que orienta la decisión a tomar.

Polya (1965) menciona que la primera etapa para resolver un problema es entenderlo. De acuerdo al análisis anterior, parte de entender un problema de toma de decisiones es ver las repercusiones de las distintas decisiones que se pueden tomar, y ver lo conveniente de tomar la mejor decisión. El profesor puede limitar esta etapa importante si, por ejemplo, lee el problema e inmediatamente les dice a los estudiantes "¿Cuál probabilidad es la que se debe calcular en este problema?". Es importante darle el tiempo al estudiante para que entienda el problema y educarlo en esto, por ejemplo en los primeros problemas se le puede solicitar como parte inicial del problema que "Describa las repercusiones de las distintas decisiones a tomar".

Como se mencionó antes, una decisión racional en el juego de Dados a SEIS es no jugar, pues la probabilidad de ganar el juego es menor al 50%.

La decisión racional que tomemos con base en la probabilidad no es la que va ocurrir si se repite la experiencia aleatoria, más bien es la más probable que ocurra. En el ejemplo note que en realidad se calcularon las probabilidades de dos eventos: ganar el juego (cerca de 42%) y perder el juego (cerca del 58%). Resultó que la probabilidad de perder es la mayor, por lo tanto una decisión racional es no jugar el juego pues es muy probable perder el dinero que pague por jugar.

Continuando con nuestro ejemplo, una vez que los estudiantes sean conscientes de que, de acuerdo a la probabilidad, se decide jugar o no, simulamos la situación con ellos para ver qué hubiera sucedido si su decisión fuera jugar. Resulta que algunos ganaron, entonces ¿se tomó la mejor decisión?

La probabilidad orienta la toma de decisiones pero no es ella la que toma la decisión. En otras palabras, la probabilidad nos da un insumo para que tomemos la decisión. Nunca nos dirá cuál es la mejor decisión, solo nos dice que es lo más probable que ocurra.

Por ejemplo, don Juan no sabe si debe comprar o no lotería. Para tomar la decisión recurre a la probabilidad y está le dice que es muy muy poco probable que se gane el premio mayor. Así, si decide comprar lotería es muy probable que pierda el dinero. Sin embargo, puede suceder que don Juan, se arriesgue, compre lotería y se gané el premio mayor.

Volviendo al ejemplo DADOS A SEIS,. Ana puede decidir, una vez vista la probabilidad de ganar este juego, pagar por jugar pues aunque la probabilidad de ganar es menor al 50%, no es para nada baja (cerca del 42%), es más, es mucho mayor la probabilidad de ganar DADOS A SEIS que de ganar la lotería. Pero entonces, ¿no sirvió de nada el cálculo de la probabilidad para tomar la decisión?

En realidad, en el caso de Ana, la probabilidad orientó su decisión, pues si esta hubiera sido muy baja (por ejemplo un 1%), Ana quizás no se atreva a tomar el riesgo de jugar.

En resumen, la probabilidad nos brinda un insumo para tomar la decisión, pero la decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar. El riesgo es un concepto muy familiar al ser humano. Algunos constantemente asumimos riesgos en distintas situaciones de nuestra vida.

Lo anterior implica algo que quizás a los docentes de matemática no les agrade, la incertidumbre en la solución de un problema de toma de decisiones. No hay una respuesta única y esto puede chocar con el carácter deductivo de la matemática.

En nuestro ejemplo, de acuerdo a lo anterior, la decisión puede ser jugar el juego o no jugarlo. Ambas decisiones son correctas si justifica bien su respuesta con respecto a la probabilidad y el riesgo que está dispuesto a tomar. Así las posibles respuestas se pueden agrupar en dos tipos:

1. Se decide no jugar pues la probabilidad de perder el juego es mayor a la probabilidad de ganar.
2. Se decide jugar pues pese a que la probabilidad de perder el juego es mayor a la probabilidad de ganar, la probabilidad de ganar no es descartable y hay posibilidades significativas de ganar. Así se decide jugar y asumir el riesgo.

## IV. Los significados de probabilidad y la toma de decisiones

Batanero (2005) brinda los distintos significados históricos de la probabilidad:

- Significado intuitivo. Es producto de ideas intuitivas y se da en personas que no han estudiado probabilidades, pero a través de frases y expresiones logran cuantificar el grado de ocurrencia de un evento.
- Significado laplaciano. La probabilidad es vista como un valor relativo formado por el número de resultados que favorecen el evento, entre el número total de resultados. Este significado es aplicable cuando la cantidad total de resultados es finita y estos son equiprobables.
- Significado frecuencial. La probabilidad es el valor al que se acerca la frecuencia relativa con que es observado el evento cuando la cantidad de veces que se repite un experimento aumenta, suponiendo que ese valor límite existe. En este caso, la frecuencia relativa con que es observado el evento, cuando la experiencia se repite un número grande de veces, es una aproximación a la probabilidad. Para un abordaje más detallado de este nivel puede consultar Sanabria & Núñez (2010, 2011).
- Significado subjetivo. La probabilidad es el grado de ocurrencia del evento basado en el conocimiento y la experiencia personal. Esta puede ser diferente para distintas personas.
- Significado teórico. La probabilidad es una teoría matemática formalizada.

Sobre estos significados de probabilidad, Batanero (2005) indica: "… su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, en razón de que están ligadas dialécticamente. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidad a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad".

Por lo tanto, una buena propuesta sobre la enseñanza de la probabilidad debe integrar los otros significados de probabilidad. Así, es importante que el estudiante confronte la probabilidad obtenida (de forma frecuencial o teórica) con el valor intuitivo que él tenía de esa probabilidad. Así, en la enseñanza de la probabilidad, el docente debe buscar situaciones problema que le permitan recorrer la diversidad semántica del concepto de probabilidad, pues estos distintos significados nutrirán y darán forma al concepto que adquiera en probabilidad. Pero, ¿Cómo introducir los significados de probabilidad en la toma de decisiones?

En los problemas de toma de decisiones se puede rescatar los significados de probabilidad y ver cómo estos influyen en la toma de decisiones. A nivel de secundaria los significados utilizados son: intuitivo, frecuencial y teórico.

El significado intuitivo de probabilidad ayuda a comprender el problema y se puede asociar con una toma de decisión intuitiva para resolver el problema, y que luego se puede contrastar con la decisión final. Además, esto permite ver la existencia de mitos o conceptos erróneos.

*Ejemplo (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS.*

*a) Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.*

*b) Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría? ¿Por qué?*

*En el ejemplo, la parte "a)" corresponde a la sección anterior. La parte b) es importante que el docente analice las respuestas de sus estudiantes.*

Por ejemplo, un estudiante puede decir que tomará la decisión de no jugar, pues los resultados donde la suma es menor a 6 son: 2,3, 4,5 y 6. Estos son 5 de 11 resultados, por lo que no es favorable jugar. Sin embargo esto refleja un obstáculo epistemológico, que traducido a probabilidad, el estudiante está utilizando la Ley de Laplace para calcular la probabilidad a eventualidades no equiprobables. Posiblemente, esto se evidencie más claramente cuando en las partes siguientes del problema se solicite tomar la decisión.

Pero además, el significado intuitivo se puede introducir al solicitarle al estudiante que simule en concreto varias veces la experiencia aleatoria, ver qué decisión tomaría con base en los datos obtenidos y comparar esta decisión con la decisión racional según la probabilidad. Esto permite introducir la importancia de la Ley de los Grandes Números, el significado frecuencial y además favorece el entendimiento del problema.

*Ejemplo (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS*

*A SEIS.*

*a) Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.*

*b) Antes de decidir si se va al puesto a pagar por jugar este juego, juegue DADOS A SEIS en el aula, veinte veces.*

*c) Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría teniendo en cuenta los datos obtenidos en b)? ¿Por qué?*

En este ejemplo, note que la parte b) favorece que el estudiante comprenda bien el problema y vea cuándo gana y cuándo pierde. Veamos las respuestas que pueden obtener tres estudiantes:

| | # de veces que se ganó | Ganó | Decisión intuitiva |
|---|---|---|---|
| Karla | 7 | Menos de la mitad | No jugar |
| Jorge | 10 | La mitad | Es indiferente |
| Anthony | 12 | Más de la mitad | Sí jugar |

Como vimos, la decisión racional utilizando la probabilidad es la de Karla. Pero ¿por qué la decisión intuitiva puede fallar?

Recuerde que la Ley de los Grandes Números establece las condiciones bajo las cuales la probabilidad frecuencial de que ocurra el evento se aproxima a la probabilidad real o teórica: Dada una experiencia aleatoria, sea A un evento, si la experiencia se repite un número suficientemente grande de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A será muy cercana al valor real de la probabilidad.

Así, pocas simulaciones de la situación involucrada puede llevar a tomar una decisión intuitiva incorrecta. Esto es parte de la comprensión correcta del significado frecuencial de probabilidad.

El significado frecuencial de probabilidad se puede introducir en el cálculo de la probabilidad.

*Ejemplo (¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS. Realice un análisis formal de la situación y conteste: ¿Jugaría DADOS A SEIS?*

En este ejemplo, como ya se mencionó, para resolverlo el estudiante debe recurrir a calcular la probabilidad de ganar el juego para orientar su decisión. Este cálculo lo puede realizar utilizando probabilidad frecuencial. Para ello, simulemos este juego cien veces utilizando Excel. Para eso se denota en la hoja de Excel:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Celda | A1 | B1 | C1 |
| Escribir | Dado1 | Dado2 | ¿Ganó? |
| Celda | A2 | B2 | C2 |
| Escribir | =ALEATORIO.ENTRE(1;6) | =ALEATORIO.ENTRE(1;6) | =SI(A2+B2<=6;"SI";"NO") |

Note que si la de los resultados de los dados es menor a seis (A2+B2<=6), entonces se da con respuesta SÍ, pues si se ganó el juego. Hasta el momento se ha simulado sólo un juego, donde un posible resultado es:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Dado 1 | Dado2 | ¿Ganó? |
| 2 | 4 | 1 | SI |
| 3 | | | |

Para simular cien juegos, basta seleccionar las celdas escritas de la fila 2 y con el mouse arrastrar estas fórmulas hasta la fila 101, obteniendo

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Dado 1 | Dado2 | ¿Ganó? |
| 2 | 3 | 4 | NO |
| 3 | 6 | 6 | NO |
| 4 | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 99 | 5 | 6 | NO |
| 100 | 1 | 1 | SI |
| 101 | 2 | 1 | SI |
| 102 | | | |

Para determinar cuántas veces se ganó el juego de las cien partidas, se puede escribir en un celda vacía "=CONTAR.SI(C2:C101;"=SÍ")".

En nuestra simulación, el valor que da esta celda es 44. Por lo tanto, la probabilidad frecuencial de ganar el juego es de 44%. Por lo tanto la decisión racional utilizando probabilidad frecuencial es no jugarlo. Incluso el estudiante puede realizar también el cálculo de la probabilidad teórica de ganar el juego (cerca del 42%) y compararla con la probabilidad frecuencial.

En general, el concepto de probabilidad frecuencial se puede aprovechar de diferentes formas en problemas de toma de decisiones:

a) En algunas situaciones se puede realizar el cálculo de probabilidades tanto de forma frecuencial como de forma teórica. Esto permitirá a los estudiantes valorar la compatibilidad de los significados.

b) En algunas situaciones donde el significado teórico es insuficiente o muy tedioso y es necesario recurrir al significado frecuencial para el cálculo las probabilidades. Un ejemplo de esto, es el problema de Monty Hall donde se debe tomar una decisión: Cambiarse o no de puerta. Y para ello, el cálculo de probabilidad suele ser muy tedioso teóricamente por lo que se recurre al enfoque frecuencial.

c) En la toma de decisiones.

Para esclarecer la última opción. De acuerdo a la Ley de los Grandes Números, la decisión tiende a ser más contundente cuando es mayor la cantidad de veces que decido o no realizar la experiencia aleatoria.

*Ejemplo. Considere el juego DADOS A SEIS y suponga que ahora se pagan 1000 colones por jugar y si gana obtiene 2 000 colones. Manuel tiene 200 mil colones y decide invertirlos y paga 200 juegos de DADOS A SEIS. Él espera recuperar el dinero invertido y obtener algo de ganancia. Apoyaría la decisión de Manuel.*

En este ejemplo, se debe tomar una decisión: apoyar o no a que Manuel invierta su dinero en Dados a SEIS. La probabilidad de ganar dados (ya sea que se halle de forma frecuencial o teórica) es cerca al 42%. Por lo que, de acuerdo al significado frecuencial de probabilidad y a la Ley de los Grandes Números, si de los 200 juegos que juega Manuel gana un número n de veces, entonces

$$\frac{n}{200} \approx 42\%$$

De donde n es aproximadamente 84. Es decir, se espera ganar alrededor de 84 juegos, obteniendo una ganancia aproximada de 168 mil y gasto 200 mil. Por lo tanto, la decisión más racional es no apoyar a Manuel.

Note que en este ejemplo se introduce intuitivamente el concepto de esperanza de variables aleatorias.

## V. Conclusión

En las secciones anteriores se tomó un problema inicial de cálculo de probabilidad y cómo producto del análisis a la luz de los aportes teóricos de Batanero y Polya, este problema se fue transformado en una situación problema de toma de decisiones, diseñada para la enseñanza de la probabilidad. La situación obtenida es:

*(¿Juegas o no?) En las fiestas cívicas de Zapote hay un puesto donde por 1000 colones se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de 1 500 colones. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS.*

*a)Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.*

*b) Antes de decidir si se paga por jugar este juego, juegue DADOS A SEIS en el aula, veinte veces.*

*c) Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría teniendo en cuenta los datos obtenidos en b)? ¿Por qué?*

*d) ¿Jugaría DADOS A SEIS? Fundamente su decisión.*

*e) Compare la decisión obtenida en d) con su decisión inicial.*

*f) Juegue DADOS A SEIS. Que resultado obtuvo y cuál fue el resultado de sus compañeros. La decisión toma en d) fue la correcta.*

*g)Suponga que ahora se pagan 1000 colones por jugar y si gana obtiene 2 000 colones. Manuel tiene 200 mil colones y decide invertirlos y paga 200 juegos de DADOS A SEIS. Él espera recuperar el dinero invertido y obtener algo de ganancia. Apoyaría la decisión de Manuel.*

La situación problema diseñada es un buen acercamiento a lo que Brousseau (1986) llama Situación Didáctica. Esta situación debe ser validada en el aula.

Por otro lado, en el proceso de ir analizando y reformulando el problema, se obtuvieron una serie de recomendaciones para la formulación de los problemas de toma de decisiones en la enseñanza de la probabilidad. Estas recomendaciones son:

a) La probabilidad debe surgir con un modelo para orientar la toma de decisiones. Un problema que solo le pida al estudiante calcular una probabilidad no involucra al estudiante y degrada la aplicación del concepto de probabilidad.

b) la probabilidad nos brinda un insumo para tomar la decisión, no toma la decisión por nosotros. La decisión que se tome es un balance entre la probabilidad y el riesgo que estoy dispuesto a tomar.

c) Es ideal que algunas situaciones iniciales para la enseñanza de la probabilidad involucren, como parte del entendimiento del problema, algunos de los siguientes elementos:

   a. El estudiante pueda simular la experiencia aleatoria involucrada algunas veces.

   b. Describa las diferentes decisiones que se puedan tomar y sus repercusiones.

   c. Que puede tomar una decisión inicial intuitiva con base en la probabilidad intuitiva de los eventos involucrados.

d)Sobre el concepto de probabilidad frecuencial, este se puede utilizar de diferentes formas:

   a) En algunas situaciones se puede realizar el cálculo de probabilidades tanto de forma frecuencial como de forma teórica. Esto permitirá a los estudiantes valorar la compatibilidad de los significados.

   b) En algunas situaciones donde el significado teórico es insuficiente o muy tedioso y es necesario recurrir al significado frecuencial para cálculo las probabilidades.

   c) En la toma de decisiones, de acuerdo a la Ley de los Grandes Números, la decisión tiende a ser más contundente cuando es mayor la cantidad de veces que decido o no realizar la experiencia aleatoria.

En síntesis, se recomienda la utilización de situaciones sobre toma decisiones, con las características indicadas, para la introducción a la enseñanza de la probabilidad.