Algunos aspectos relacionados con la didáctica de la probabilidad y de la estadística en secundaria en Costa Rica.

Título

Félix Núñez Vanegas [1]

Resumen

En los últimos programas de matemática de secundaria en Costa Rica, se incluyeron contenidos de probabilidad y estadística, y además una metodología nueva para el abordaje de tales temas, en la que el estudiante es protagónico en este enfoque, pues se espera que él descubra el conocimiento a partir de la solución a una situación problema que se le propone. Es importante por tanto que el docente cuente con ideas teóricas acerca de cómo un estudiante piensa una vez enfrentado a una situación. Con el fin de comentar los cambios que se han generado en los programas de estudio en secundaria, comentar los resultados en bachillerato en estos temas de estocástica de los años 2016 y 2017 y de generar conocimiento teórico acerca de cómo un estudiante procede una vez que se enfrenta a una situación problema, se ha realizado este trabajo. Concretamente, se presentarán algunas ideas de la Teoría de Campos Conceptuales explicadas en el contexto de la probabilidad y de la estadística. Veremos que los resultados en bachillerato en estos temas no son los deseados en general, por lo que es importante conocer propuestas que aporten en la mejora de esta problemática, y es por ello que también se comentan algunos trabajos realizados recientemente en Costa Rica sobre la didáctica de la probabilidad y la estadística.

Palabras clave: *Didáctica estadística, probabilidad, bachillerato, esquema, significado.*

Abstract

In the most recent mathematics programs for Costarrican high schools, probability and statistics contents were included, as well as a new methodology for dealing with such topics, in which the student is the protagonist in this approach, since he is expected to discover the knowledge from the solution oproblem situation that is proposed. It is important therefore that the teacher has theoretical ideas about how a student thinks once faced with a situation. Specifically, some ideas of the Theory of Conceptual Fields explained in the context of probability and statistics are given. This work has been done in order to comment on the changes that have been introduced in high school programs and analyze the results in 2016 – 2017 national tests related to these stochastic topics, generating theoretical knowledge about how a student should proceed in a problem situation.
We will see that the results in national tests on these issues are not the desired in general, so it is important to know proposals that contribute to the improvement of this problem, and that is why some current works developed in Costa Rica on the didactics of probability and statistics are discussed.

Keywords: *Statistical didactics, probability, national tests, scheme, meaning.*

Modalidad: Ponencia.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica-Universidad de Costa Rica, Costa Rica. fnunez@itcr.ac.cr

I. Introducción

Las preocupaciones acerca de la educación en estocástica han generado, entre otros aspectos, que en los programas de matemáticas de la mayoría de países desarrollados, España por ejemplo, se hayan incorporado temas de estadística y de probabilidad. Tales preocupaciones hicieron eco en las autoridades del Ministerio de Educación Pública de nuestro país y realizaron lo propio al proponer nuevos programas para la enseñanza de la matemática. En ellos se plantean significativos cambios, tanto en contenidos (introducción a la estadística y a la probabilidad) como en la forma de abordarlos (metodología).

En Núñez (2008) se señala que una deficiencia de los programas de matemática en secundaria era que los temas de estadística no estaban distribuidos a lo largo de todos los años de estudio y que ese hecho provocaba que los estudiantes no contaran con un tiempo significativo para madurar cada concepto. En la propuesta nueva, los temas de probabilidad y estadística están diseminados holgadamente en todos los años de la enseñanza primaria y secundaria, estando más a tono con las recomendaciones que se sugieren para el abordaje de tales temas, lo anterior permite, de acuerdo con Núñez (2008) "desarrollar los temas mucho más despacio e irlos introduciendo poco a poco, de modo que los estudiantes se vayan familiarizando con ellos, iniciando con lo más básico."

Pero también, se introduce una nueva metodología en el establecimiento de dichos contenidos, basada en la resolución de problemas. De tal manera que el docente debe tener dominio de la disciplina misma y también de la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), sobre la cual se basa la metodología de enseñanza y en la que la resolución de problemas, como medio para lograr el aprendizaje, es medular. Más concretamente, en ellos se señala que:

"Este estilo propone una secuencia de cuatro momentos pedagógicos centrales en la enseñanza de las matemáticas: presentación de situaciones problema por parte del educador, solución o aporte de ideas por parte del estudiante (en varias modalidades: individualmente, parejas, subgrupos,...), comunicación de resultados por el estudiante y, finalmente, la institucionalización por parte del educador" (Programas de estudio matemáticas, 2012).

Lo anterior nos indica que los docentes deben tener, no sólo un dominio disciplinar, específicamente en probabilidad y estadística, sino también en esta metodología de enseñanza, de la cual ya hemos hablado con detalle en Núñez (2013).

Revisemos los resultados de las pruebas de bachillerato de los años 2016 y 2017, con el fin de valorar, a la luz de estos datos, si se ha logrado que los jóvenes cuenten con un conocimiento aceptable en estocástica.

1. Habilidades generales de los programas de estudio evaluadas en 2017.

De acuerdo con el informe de la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGEC, 2018), en el examen de bachillerato de matemática aplicado en 2017, modalidad académica diurna, se evaluaron 19 habilidades, de las cuales, siete corresponden a habilidades en probabilidad y estadística, las cuales se detallan a continuación, de acuerdo con la numeración establecida por la DGEC:

13. Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos. (3 ítems).
14. Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos. (2 ítems).
15. Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística. (2 ítems).
16. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información. (2 ítems).
17. Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas. (3 ítems).
18. Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (2 ítems).
19. Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil. (2 ítems).

El total de ítems de esta prueba fue de 60, de los cuales 16 (26,66 %) correspondieron a estadística y probabilidad. Como vemos, son habilidades en estocástica que requieren por parte del docente un dominio pleno y además se les proporciona a estas habilidades bastante peso en esta prueba estandarizada.

Por otro lado, en este informe se establecen cinco categorías, acerca del nivel de dificultad de los ítems, según la proporción de estudiantes evaluados que respondieron correctamente la habilidad evaluada en dicha prueba, a lo que denominan dificultad del ítem:

Tabla 1 Categoría de dificultad por habilidad general

Nivel de dificultad	Porcentaje P de estudiantes que responden correctamente
Muy fácil	$P \geq 90$.
Fácil	$60 \leq P < 90$
Intermedio	$40 \leq P < 60$
Difícil	$10 \leq P < 40$
Muy difícil	$P < 10$

Fuente: Elaboración propia de acuerdo con datos de DGEC (2018)

De acuerdo con los resultados obtenidos en esta prueba, tomados de la DGEC (2018), se confeccionó la siguiente tabla, el total evaluados fue de 23479:

Tabla 2 Nivel de dificultad según habilidad, prueba diurna modalidad académica.

Habilidad en estadística y Probabilidad	Porcentaje P de estudiantes que respondieron correctamente en ítems de Estadística y probabilidad.	Nivel de dificultad
14	87,2	Fácil
13	53,3	Intermedio
15	57,8	
16	50,7	
17	54,5	
18	43,5	
19	26,2	Difícil

Fuente: Elaboración propia, con base en datos de la DGEC, 2018.

De la tabla vemos que no hay habilidades evaluadas clasificadas con dificultad muy fácil o muy difícil. La clasificación de las habilidades en probabilidad y estadística de acuerdo al nivel de dificultad se brinda a continuación:

Habilidad con nivel de dificultad Fácil

- Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos. (14)

Habilidad con nivel de dificultad Intermedio

- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos. (13)
- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información. (15)
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas. (16)
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (17)
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (18)

Habilidad con nivel de dificultad Difícil

- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil. (19)

A pesar de que la mayoría de habilidades se clasifican con nivel de dificultad intermedio, no deja de ser preocupante que un alto porcentaje responde incorrectamente los ítems correspondientes a estas habilidades. Por ejemplo, para los dos ítems correspondiente a la habilidad **utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre**, tan sólo un 26,2% respondió correctamente. A excepción de los ítems correspondiente a la habilidad **utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos**, que un 87,2% los respondió correctamente, los ítems de las otras habilidades, en promedio, alrededor del 51% del total de estudiantes evaluados respondió correctamente, por lo que alrededor del 49% no.

Según el informe de la DEGCE (2017), el promedio general en esta prueba fue de 58,8, con desviación estándar de 16,8. La cantidad de evaluados fue de 23479.

Es importante señalar también que en la prueba de bachillerato de 2016, modalidad académica diurna, en probabilidad y estadística, se evaluaron las mismas habilidades con la misma cantidad de ítems. Los resultados fueron muy parecidos. En la tabla siguiente se dan los detalles de estos resultados:

Tabla 3 Nivel de dificultad según habilidad, prueba diurna modalidad académica.

Habilidad en estadística y Probabilidad	Porcentaje P de estudiantes que respondieron correctamente en ítems de Estadística y probabilidad. (2016)	Nivel de dificultad
14	69,5	Fácil
19	76,8	Fácil
13	47,9	Intermedio
15	56,8	
16	40,6	
18	41,2	
17	32,0	Difícil

Fuente: Elaboración propia, con base en datos de la DGEC, 2017.

En este caso se tiene los siguiente:

Habilidad con nivel de dificultad Fácil

- Utilizar las principales medidas de variabilidad para evaluar y comparar la dispersión de los datos. (14).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil. (19)

Habilidad con nivel de dificultad Intermedio

- Utilizar las medidas de posición para resumir y analizar la información proveniente de un grupo de datos cuantitativos. (13)
- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos. Valorar la importancia de las medidas de resumen (posición y variabilidad) para el análisis de la información estadística. Analizar la importancia del uso de medidas relativas de tendencia central y variabilidad dentro de los análisis comparativos de información. (15)
- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas. (16)
- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (18)

Habilidad con nivel de dificultad Difícil

- Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. (17)

De acuerdo con el informe de la DEGCE (2017), el promedio general en esta prueba de matemática fue de 61,1, con desviación estándar de 16,1. La cantidad de evaluados fue de 23566.

Al igual que en la prueba académica diurna de bachillerato de 2017, un alto porcentaje de estudiantes no responde correctamente en esta prueba, en la misma modalidad, alrededor del 48%.

No es una novedad que los resultados de los estudiantes en las pruebas de matemática en estos temas no son los deseados. Concretamente, cuando se aplicaban las pruebas estandarizadas de matemática a los estudiantes del noveno grado y se incluyó el tema de estadística, los bajos porcentajes generaron preocupación en la sociedad costarricense. En el año 2005, el Departamento de Pruebas Nacionales del Ministerio de Educación Pública, ventiló los resultados deficitarios que ostentaron los estudiantes y las estudiantes en las pruebas estandarizadas de noveno año y el bachillerato. En particular los dos contenidos del tema de estadística evaluados, a saber, conceptos básicos y medidas de tendencia central, arrojaron serias preocupaciones. De hecho, tan sólo un 31,23% y un 36.33% obtuvieron respuestas correctas en tales contenidos respectivamente. Al respecto, en dicho informe se afirma que:

“En estadística, ninguno de los dos contenidos muestra un buen rendimiento” (M.E.P., 2005).

Lo anterior plantea retos importantes en aras de incidir positivamente en este proceso de enseñanza y aprendizaje de la estocástica, a nivel de secundaria, sobre todo porque, en este enfoque metodológico, el estudiante es protagónico en la construcción de su propio conocimiento, particularmente, en aquellos atinentes a probabilidad y estadística, por lo que es de suma importancia contar con una referencia teórica acerca de cómo es que el estudiante aprende, cómo es que es que aborda un determinado problema, cómo es que se dan las filiaciones y rupturas una vez enfrentado a una situación problema. Vale la pena, entonces, tener una referencia y una posición teórica acerca de cómo es que, un estudiante enfrentado a una situación problema, piensa.

Insertar esos temas de probabilidad y estadística en los programas de estudio de matemática, además de toda una nueva metodología basada en la Teoría de Situaciones, planteada por Brousseau (1986), ha provocado en el sector docente de la enseñanza primaria y secundaria de este país, una cierta preocupación, sobre todo en aquellos profesores en los que sus programas de estudio no contemplaron cursos de probabilidad y de estadística y mucho menos de su didáctica.

Es por tanto la intención de este trabajo aportar conocimiento acerca de algunas ideas concernientes a la didáctica de la matemática, que podrían orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los temas de estadística y de probabilidad. Específicamente se quiere que los docentes involucrados, conozcan algunas de las ideas de la Teoría de Campos Conceptuales ligadas a conceptos en didáctica de la estadística y de la probabilidad.

2. Esfuerzos didácticos en el abordaje de la enseñanza de la estadística y de la probabilidad en Costa Rica.

En Núñez (2013), ya habíamos mencionado algunas de las razones acerca de la importancia que tiene la enseñanza de la estadística, específicamente decíamos que la estadística es una parte de la educación general, deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.

También apuntábamos que the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) establece una serie de estándares y principios para la educación matemática para primaria y secundaria en el año 2000, propuesta planteada por docentes estadounidenses.

En Costa Rica desde hace varios años se le viene dando relativa importancia a temas de estadística y de probabilidad. En los programas de estudios de matemática de 1995, por ejemplo, en primaria y secundaria, se incorporan contenidos de estas disciplinas.

Por otro lado, ya para 1999 tres estudiantes de licenciatura en Educación Primaria con énfasis en primero y segundo ciclos, desarrollaron una tesis en la que proponen cómo tratar la estadística y probabilidad en primer y segundo ciclos (Carvajal, et al, 1999). Adicionalmente, un trabajo de graduación de la Maestría Profesional en Planificación Curricular, una propuesta metodológica de la enseñanza de la estadística, en la que se brinda una guía metodológica que motive al docente de matemática de octavo año a enseñar la estadística, incluyendo actividades innovadoras desde la correlación interdisciplinaria (Espeleta, 2000).

En el 2007 se elaboró una Memoria de Seminario de Graduación en la Universidad de Costa Rica, específicamente en la Escuela de Matemática, titulado "Diseño de una unidad didáctica que oriente el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de estadística de tercer ciclo del programa del Ministerio de Educación Pública". En ese trabajo, se aborda la enseñanza de la estadística desde una perspectiva dinámica, en la que el estudiante tiene una participación activa, y al profesor se les dan las definiciones y conceptos, para que pueda llevarlos al aula (Navarro, 2007).

En 2008 se elaboró una tesis en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica titulada, "La Enseñanza y el aprendizaje de la estadística en secundaria: situación actual, aproximación metodológica". En esta propuesta se realiza un aporte didáctico para abordar algunos temas de estadística en secundaria (Núñez, 2008).

Más recientemente, en 2010 se elaboró una Memoria de Seminario de Graduación en la Universidad Nacional, específicamente en la Escuela de Matemática, titulada "Estado Actual de la Enseñanza y Aprendizaje de Probabilidad y Estadística, en I y II Ciclo, en la Educación Costarricense en las Direcciones Regionales Educativas de Heredia y Pérez Zeledón", en la que se investiga la situación actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de Probabilidad y Estadística en I y II Ciclo de la Educación pública Costarricense, con el afán de describir lo propuesto en los Programas de Estudio de Matemáticas de I y II Ciclo de la Educación General Básica y conocer la percepción de docentes de esos ciclos respecto a lo que se plantea en esos programas y de analizar el grado de cumplimiento de dicha propuesta. Además, se investiga la opinión de estos docentes respecto a la necesidad e importancia de impartir los contenidos en esos niveles, métodos, técnicas y recursos empleados, con mayor frecuencia, al desarrollar los contenidos. También se analizan los libros de texto que se utilizan con más frecuencia, así como el rol que cumplen.

Por otro lado, los esfuerzos realizados por la Escuela de Matemática del Tecnológico de Costa Rica a través de la organización de los congresos EDEPA (Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos), constituyen un significativo aporte en la difusión de trabajos y propuestas en líneas temáticas concernientes a la didáctica de la estadística y de la probabilidad. A la fecha han tenido suceso cinco ediciones del mismo y en cada uno se ha contado con la participación de destacados académicos en el área de la matemática y de la estadística y sus aportes han sido realmente importantes en la culturalización de la estadística y probabilidad.

Cabe mencionar también que, en diciembre de 2012, la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de costa Rica organizó la Primera Escuela de Verano, como una actividad pre-congreso del III EDEPA. En ella se impartieron, desde una perspectiva didáctica, minicursos sobre combinatoria, estadística (descriptiva e inferencial), probabilidad, ponencias sobre análisis de datos, actividades desarrolladas desde un enfoque didáctico. Además, se han realizado dos ediciones más de las Escuelas de Verano, la segunda en la sede del Tecnológico, ubicada Santa

Clara, San Carlos, en 2015, y la otra, en la Universidad de Costa Rica, en la Sede del Atlántico, en 2017.

Como un aporte adicional, en el año 2013, la Revista digital Matemática, Educación e Internet, publica el libro “Contribuciones 2011-2013 en estadística y probabilidad: Su Didáctica, Aplicaciones y Tecnología” que constituye un compendio de los extensos expuestos en el II EDEPA, con trabajos ligados a la didáctica de la probabilidad y la estadística, así como también con propuestas de aplicaciones de estas disciplinas y el uso de paquetes computacionales para la aproximación de algunas probabilidades.

3. Algunos conceptos de la teoría de campos conceptuales ejemplificados en probabilidad y estadística.

Como dijimos anteriormente, en este enfoque metodológico adoptado en los programas de matemática, el estudiante es protagónico, porque debe construir su propio conocimiento, a partir de una situación problema que se le plantea. Es importante entonces tener una posición teórica acerca de cómo es que procede una vez que ha aceptado el problema. La teoría de Campos Conceptuales, de Vergnaud (1990) es un aporte teórico que tiene como objetivo permitir el análisis del aprendizaje de conceptos científicos y técnicos. Es un trabajo muy ligado a la psicología cognitiva y busca ofrecer un marco teórico que intenta dilucidar cómo el adolescente y el niño aprenden, cómo es que se entremezclan los conceptos, proceso que el autor llama filiaciones, así como también cómo es que se dan las rupturas entre unos y otros.

El concepto de situación no es la misma idea de Brousseau (1986) de situación didáctica, sino más bien, la concepción de los psicólogos que corresponde a aquélla en la que un individuo es confrontado a alguna circunstancia. Si se quiere buscar una relación con las situaciones didácticas de Brousseau (1986), se diría que el concepto de situación de Vergnaud se asemeja con la etapa adidáctica. Recuérdese que toda situación didáctica tiene una etapa adidáctica en la que al estudiante se le pone a distancia con la intencionalidad didáctica.

Con esta idea de situación, se pueden distinguir dos clases:

- Aquéllas de las cuales tiene capacidad para resolver inmediatamente.
- Aquéllas para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias.

Aquí entra a jugar el concepto de esquema, que es la manera invariante de organizar la conducta del niño. En ambas clases de situaciones, los esquemas son distintos. Para la primera, se recurre a un esquema único y se procede de manera más o menos automatizada.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea X la variable que indica el número de partes defectuosas de una máquina cuando se muestrean tres partes de una línea de producción y se prueban. La distribución de probabilidad de X es

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

Se quiere calcular la esperanza de X. En una situación de la clase uno, se procede de la siguiente manera:

$$E(X) = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 2 \times 0.10 + 3 \times 0.01 = 0.61$$

Mientras que para las situaciones de la clase dos, aparecen variados esquemas. Una vez enfrentado a una situación de este tipo, el individuo procede a buscar en el acervo de esquemas, alguna semejanza que le permita resolver la situación. El autor dice que esta semejanza es, en muchas ocasiones, ficticia. Por ejemplo, al pedirle al estudiante que determine la cantidad de palabras que se obtienen al permutar las letras de la palabra ADELA, el estudiante puede recurrir al esquema que usó para resolver problemas de conteo de permutaciones de objetos distintos, e indicar que el número es $5! = 120$, lo cual no es cierto, dado que las dos letras A son la misma.

El funcionamiento cognitivo, sin embargo, tiene dos componentes: una automatizada y otra de decisiones conscientes. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema de probabilidad:

Una empresa diseña un juego con una cierta probabilidad de ganarlo, la cual se puede ajustar. ¿A qué valor se debe ajustar dicha probabilidad de tal manera que, la probabilidad de que al menos diez de cien jugadores lo ganen, sea aproximadamente del 15%?

La solución es más o menos mecánica:

Sea X el número de veces que se gana el juego de 100 y p la probabilidad buscada

$X \sim B(100, p)$

Como se quiere que la que la probabilidad de que al menos 10 ganen el juego, de los 100, sea de 15%, entonces tenemos lo siguiente

$P(X \geq 10) = 0.15 \leftrightarrow P(X < 10) = 0.85 \leftrightarrow P(X \leq 9) = 0.85$

Ahora si se supone que $100p \geq 5$ y $100(1-p) \geq 5$, entonces se tendría que

$X \underset{aprox}{\sim} N(100p, 100p(1-p))$

Por lo que $P(X \leq 9) = P(X < 9.5)$ (Observando que la variable la estamos considerando continua). Aquí hay una componente del funcionamiento cognitivo, la decisión consciente.

Ahora, $P(X < 9.5) = P(Z < \frac{9.5-100p}{\sqrt{100p(1-p)}}) = 0.85$

Utilizando la tabla de la distribución normal, se obtiene que

$$\frac{9.5 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} = 1.04$$

Al elevar al cuadrado para resolver la ecuación, obtiene dos valores para p: 0.068695 y 0.1299.

La solución de la ecuación anterior muestra la componente del funcionamiento cognitivo que correspondería a la automatizada, no obstante, ahora se debe de dar la respuesta, y debe descartarse 0.1299, puesto que no satisface la ecuación original. Se tiene entonces la componente de decisión consciente. Por tanto $p = 0.068695$.

Falta verificar que $100 \times 0.068685 \geq 5$ y $100(1 - 0.068695) \geq 5$, lo cual es correcto.

De ahí que la probabilidad a la que se debe ajustar el juego es de 6.8685%

Detrás de cualquier esquema, subyace una conceptualización, la cual se refiere a todos aquellos conceptos que el individuo asume para evocar esos esquemas, y son esos conceptos los que hacen que se obtenga estabilidad en el esquema. Ese conocimiento implícito, que comprende no sólo conceptos en acto sino también teoremas en acto, es lo que Vergnaud llama invariantes operatorios. Son los conocimientos contenidos en los esquemas y los que hacen que frente a una situación dada, funcione igual.

Volviendo al ejemplo anterior del número de partes defectuosas de una máquina, cuando se calcula la varianza de la variable aleatoria X se puede recurrir a la definición, de la siguiente manera:

$$Var(X) = E((X - \mu)^2)$$

Para luego proceder de forma más o menos automatizada así

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) = E((X - 0.61)^2)$$
$$= 0.51 \times (0 - 0.61)^2 + 0.38 \times (1 - 0.61)^2 + 0.1 \times (2 - 0.61)^2 + 0.01 \times (3 - 0.61)^2$$
$$= 0.4979$$

Así que la varianza de la variable X es 0.4979.

Pero el proceso es más tedioso y hay más cálculos, por ende, más posibilidades de equivocarse. En lugar de eso, podría procederse de la siguiente manera:

$$E(X) = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 2 \times 0.10 + 3 \times 0.01 = 0.61$$

$$E(X^2) = 0 \times 0.51 + 1 \times 0.38 + 4 \times 0.10 + 9 \times 0.01 = 0.87$$

Finalmente,

$$\sigma^2 = Var(X) = 0.87 - 0.61^2 = 0.4979$$

La segunda forma de proceder se justifica gracias a que hay un teorema que establece que la varianza de una variable aleatoria X es $\sigma^2 = VarX = E(X) - \mu^2$ y corresponde a una parte de los invariantes operatorios: Los teoremas en acto.

En esta teoría se habla de procesos de generalización y de restricción de un esquema. En efecto, para un determinado paquete de situaciones, siempre es posible aplicar un determinado esquema a una clase más baja y probablemente pueda funcionar en una clase más amplia, con ciertas modificaciones. El reconocimiento de invariantes es la clave de la generalización del esquema. Pero es probable que se quiera aplicar el esquema a una clase demasiado amplia, por lo que hay una situación de fallo y debe por tanto restringirse el alcance del esquema. Por ejemplo, para calcular el promedio final de un estudiante en una materia cuyas notas en el I Trimestre, II Trimestre y III Trimestre son 80, 90, 85, el alumno sumará y dividirá por tres. En cambio, ese conocimiento implícito que utiliza el estudiante no es válido cuando se tiene una situación como la siguiente: Si el primer trimestre tiene un peso de un 20%, el segundo un 30% y el tercero un 50% de la nota final, entonces, la nota final ya no se podrá obtener de simplemente sumar y dividir por tres. Se debe obtener un promedio ponderado y por ende, se debe variar el esquema, para que pueda resolverse el problema correctamente.

Cuando se habla de un concepto, debe referirse a él con dos componentes: Una que tiene que ver con la definición y otra con el sentido.

Desde la perspectiva de un didacta, Vergnaud dice que no se concibe creer que con sólo la definición un estudiante adquiere un conocimiento. Debe ir ligado al sentido, y que es sólo a través de los problemas que se le presenten al estudiante que se logrará. Todo ello está asociado con la primera etapa de la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), específicamente con la etapa de la devolución de la situación adidáctica, que consiste en que el estudiante se apropie del problema que se le asigna, que lo haga suyo, que se interese por él y que la responsabilidad sobre el conocimiento que va a descubrir recaiga Vsobre él.

Es importante entender que un concepto tiene esas dos dimensiones, puesto que esto hace que el conocimiento sea operatorio. Es decir, que cuando un sujeto es puesto en situación, él pueda recurrir al conocimiento que guarda en su estructura cognitiva para resolver dicha situación. Vergnaud considera que un conocimiento, si se precia de ser racional, debe ser operatorio, de lo contrario, no es conocimiento.

Por ejemplo, pensemos que a un estudiante se le propone el siguiente problema: Cinco personas piden café con leche, uno para cada uno, tres quieren su café con leche descremada y dos con leche normal. Cuando el mesero lleva los cafés, se le confunden, y da al azar un café con leche a cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que a cada persona le corresponda el café que pidió?

Aquí, el conocimiento adquirido acerca del número de permutaciones de objetos, no necesariamente distintos, debe de ser operatorio y al resolver el problema, debería verse la operatoriedad de dicho conocimiento si se precia de ser racional:

Los cafés con leche normal se pueden considerar de un mismo tipo y los cafés con leche descremada de otro tipo. Así tenemos dos tipos de objetos. El número de permutaciones posibles sería

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

Del total de maneras, sólo hay una en la que a cada uno le toca el café con leche que pidió. De ahí que la probabilidad buscada es

$$\frac{1}{\frac{5!}{3! \times 2!}} = \frac{1}{10}$$

Por otro lado, los conceptos en acto no son de hecho conceptos, ni un teorema en acto es un teorema. En efecto, muchos estudiantes cometen el error de asumir que la raíz cuadrada de una suma es la suma de las raíces cuadradas. Por ejemplo, con frecuencia se observa que algunos estudiantes consideran correcta la igualdad$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$, y muchas veces utilizan ese resultado erróneo para resolver problemas que involucran esos tópicos. Por ejemplo, en la fórmula para la desviación estándar muestral $S = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}$, existe la tentación de algunos estudiantes de escribir

$$S = \frac{(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})}{\sqrt{n-1}},$$

lo cual es claramente incorrecto.

Se dice que toda esta acción operatoria que abarca el proceso de conceptualización, no lo es todo. En efecto, no se juzga la veracidad o falsedad de un conocimiento totalmente implícito sin la ayuda de palabras, enunciados, símbolos y signos. Es por ello que se aclara que los significantes juegan un papel crucial en el proceso de conceptualización, por lo que un concepto es considerado como una tripleta de tres conjuntos: Situaciones, invariantes y significantes y sostiene que no se puede estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto, ya sea en el proceso de su aprendizaje o su utilización, sin considerar esos tres planos simultáneamente.

Campos conceptuales.

En una primera aproximación, Vergnaud dice que un campo conceptual es un conjunto de situaciones. Así, por ejemplo, dice que el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones que requieren de una adición, una sustracción o una combinación de éstas. Concebir así un campo conceptual dice el autor, da como ventaja, generar una clasificación que reposa sobre el análisis de tareas cognitivas y en los procedimientos que pueden ser utilizados en cada una de ellas. Aquí el concepto de situación tiene el sentido de tarea, y una situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas. El fracaso en una subtarea lleva necesariamente al fracaso global.

La Lógica, dice el autor, no es un cuadro suficientemente operatorio que identifique la complejidad relativa de las tareas y subtareas, de los procedimientos, etc. Es muy reductora y ubica en el mismo nivel aquellos objetos matemáticos que tienen el mismo status lógico, lo cual no quiere decir que planteen los mismos problemas de conceptualización.

Él destaca ese aspecto negativo de la Lógica para afirmar que la teoría de campos conceptuales no es una teoría basada en las estructuras lógicas, como la psicología cognitiva de Piaget, sino más bien, es una psicología de los conceptos.

Por tal razón, un campo conceptual debe ser visto como un conjunto de situaciones y el conjunto de invariantes operatorios que permitan analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

Situaciones

El concepto de situación aquí coincide con la del psicólogo: Los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que ha sido confrontado.

El autor retiene dos ideas principales: Variedad e historia. Él dice que en un campo conceptual dado, existe una gran variedad de situaciones y que los conocimientos de los estudiantes son modelados por las situaciones que han encontrado y dominado progresivamente.

El didacta no tiene una tarea fácil. En efecto, mientras la variedad lo orienta hacia el análisis, la descomposición en elementos simples, la historia lo lleva hacia la búsqueda de situaciones funcionales. Está bien plantearle problemas a un niño de seis años que tienen que ver con la compra de pasteles, poner la mesa, contar las personas, cubiertos, etc. pues esto ayuda a conceptuar cuestiones matemáticas como el número, adición y resta. No obstante, no funciona así en la vida. La mayoría de situaciones no están en un contexto tan depurado y en limpio como suelen plantearse los problemas. Los hay de todos los tipos y sucede que se resuelven o no.

Con esto, el autor quiere decir que no es fácil partir de las situaciones de la vida para establecer una clasificación sistemática. Él cree que la mayoría de problemas concernientes a un determinado campo conceptual se pueden engendrar a partir de una combinación de relaciones de base, lo cual abre un amplio camino de investigación.

La idea de historia aquí, no tiene que ver con la historia de las matemáticas, sino con la historia del aprendizaje de las matemáticas, que es individual. Esta idea tiene una gran relación con Chevallard (1998) en el sentido siguiente: el tiempo didáctico asignado lo considera ficción. La puesta en texto del saber va de la mano con una exposición más o menos racional en donde el desarrollo es progresivo, acumulativo e irreversible. No obstante, en el proceso de aprendizaje, los conocimientos no se apilan unos sobre otros. Se dan integraciones sucesivas y se requieren reorganizaciones cognitivas que vuelven a retomar conocimientos viejos, los reinterpretan y les modifican el sentido. "Ese después" se presenta como extraño a la adquisición lineal y programada de los saberes.

A la luz de estas ideas, es que Vergnaud considera la historia de cómo un estudiante ha ido adquiriendo un concepto. No es fácil, dice el autor, el trabajo del investigador didacta. Se pueden observar regularidades impresionantes de un niño a otro, en la manera que abordan una misma situación, en las concepciones primitivas que se forman de los objetos, de sus propiedades y de sus relaciones, y en las etapas por las cuales atraviesan. Tales regularidades se refieren a las distribuciones de procedimientos y no están unívocamente determinadas. Sin embargo, el autor defiende la tesis de que con la teoría de campos conceptuales, se pueden identificar las principales filiaciones y las principales rupturas en ese proceso de aprender.

Significados y significantes.

Anteriormente se habló de que un concepto tenía dos componentes: la definición y el sentido. El sentido son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante. Es así que el sentido para un individuo puede entenderse de la siguiente manera:

- Conjunto de esquemas que puede poner en acto para enfrentar una situación.
- Conjunto de esquemas que puede poner en acto para operar sobre los símbolos.

No obstante, aclara que una situación dada o un simbolismo particular no evoca en un sujeto todos los esquemas disponibles. El sentido de la resolución de una ecuación lineal particular, no es el sentido de la resolución de ecuaciones lineales.

Aquí él plantea que se debe aclarar la función del lenguaje y de los otros significantes, puesto que los significantes y la organización del discurso juegan un papel preponderante. En la teoría de los campos conceptuales, la función del lenguaje no sólo se reduce a comunicar y representar, sino también a ayudar al pensamiento.

La actividad lingüística favorece la realización de la tarea. Cuanto menos automatizada sea la realización de una tarea, más se utilizará el lenguaje. Es frecuente escuchar a los alumnos de una clase cuando dividen por primera vez un polinomio por otro. Cada paso va reforzado con la actividad lingüística. Es en este sentido que el autor dice que la actividad lingüística favorece la realización de la tarea y la resolución del problema encontrado. De esta manera, el autor llega a la función de representación del lenguaje, la cual es triple:

- Representación de los elementos pertinentes de la situación.
- Representación de la acción.
- Representación de las relaciones entre la acción y la situación.

El autor defiende la tesis de que el simbolismo matemático contribuye significativamente a la conceptualización, especialmente para la transformación de las categorías de pensamiento matemático en objetos matemáticos. Aunque acepta que el lenguaje natural es el medio esencial de representación y de identificación de las categorías matemáticas, no cree que tenga al igual que las fórmulas, los diagramas y las ecuaciones, el laconismo necesario para la selección y el tratamiento de la información.

4. A modo de conclusión

Las cuestiones planteadas anteriormente sirven de base para comprender que el proceso de aprendizaje es muy complejo, y que es importante que los docentes cuenten con un referente teórico al menos, acerca de cómo es que un estudiante piensa, cómo es que se dan las filiaciones y rupturas una vez enfrentado a una situación.

El bajo rendimiento que ostentaron los estudiantes y las estudiantes en los temas de probabilidad y de estadística en bachillerato en 2017, plantea retos importantes a investigadores en didáctica de la probabilidad y de la estadística, los cuales deben realizar importantes investigaciones acerca del actual estado de cosas, y proponer mejoras. En este enfoque de enseñanza, se promueve que el estudiante construya su conocimiento, a través de la solución que él debe de dar a una situación problema que el docente debe proponer; justamente la solución al problema, es el conocimiento que se debe establecer. Ya el algoritmo pasa a un segundo plano en este enfoque, lo cual promueve que los estudiantes se apropien de ese conocimiento. El asunto está entonces en aplicar esta metodología, la cual es difícil poner en práctica, y puede tentar al docente a elegir la enseñanza algorítmica.

Es menester que se haga entonces un profundo análisis de la situación, de buscar las dificultades que caracterizan a la enseñanza de cada tema, investigar cómo es que el estudiante aprende, de la pertinencia del tamaño de las listas de contenidos, así como su distribución, de la presentación de los temas a desarrollar, buscando relaciones entre ellos para integrarlos unos con otros toda vez que sea posible. Así, por ejemplo, la media de una variable no debe verse aparte de su varianza y su distribución, sino que se traten de manera conjunta pues corresponden a un mismo campo conceptual.

Pese a que hay consenso, tanto en el plano internacional como en el nacional, de que la estadística es una parte de la educación general, deseable para los futuros ciudadanos adultos, para llevar al aula estos temas se requiere de capacitaciones y una formación continua de los docentes de matemática en servicio.

Hay muchos esfuerzos apuntando en esta dirección, tesis, artículos, propuestas didácticas en el abordaje de temas de probabilidad y de estadística, congresos como el EDEPA, Escuelas de Verano que intenta aportar conocimiento en temas específicos de estocástica.