LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DERIVADA EN PROFESORES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR. UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA APOE

Gerardo Amaro Macuil, Lidia Aurora Hernández Rebollar

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

gerardo_1.9@hotmail.com, lhernan@fcfm.buap.mx

1. INTRODUCCIÓN

En la literatura se han reportado diversos estudios en los que se ha detectado que los estudiantes de los cursos de cálculo diferencial no tienen una idea clara del concepto de derivada. Según Luna, Ruiz, Loera, Barrón y Salazar (2013) las causas más comunes podrían ser:

a) El discurso tradicional del docente. Enseñar la derivada como un proceso algorítmico.

b) El tratamiento que se da en los libros de texto del concepto sin darle una significación práctica en problemas físicos o de aplicación real en los campos de la ingeniería.

Artigue (1995) menciona que, aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de manera más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, hay dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático.

Es por ello que consideramos necesario indagar sobre la comprensión del concepto derivada de una función, pero en profesores que imparten este tema. Por lo que el objetivo de este trabajo es conocer las estructuras y mecanismos mentales que ha construido un grupo de profesores del nivel medio superior para así poder diseñar actividades que favorezcan estructuras más complejas del concepto Derivada de una función en profesores de este nivel.

2. DESARROLLO

Para el diseño de cursos o talleres para profesores, consideramos que el ciclo de investigación que propone la teoría APOE permite perfilar un itinerario didáctico que contemple la construcción adecuada de diversos conceptos matemáticos.

Entre las diversas perspectivas teóricas que han adoptado los investigadores para el estudio de la Derivada de una función, se encuentran las aproximaciones centradas en elementos de cognición, como:

- Ideas procedentes de una aproximación piagetiana del conocimiento y su desarrollo, visto a través de la teoría APOE (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997) y la del desarrollo de los esquemas (Clark et al., 1997; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Badillo, 2003; Sánchez-Matamoros, García, García Blanco y Llinares, 2006).

- En la aproximación al desarrollo de un esquema (Piaget & García, 1983, 1989), a través de las fases intra, inter y trans, un esquema se define como: La estructura matemática formada por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos que constituyen una noción matemática, y que puede ser evocado para la resolución de un problema.

Un ejemplo de este tipo de estudios, basado en la aproximación piagetiana, es el de Baker et al. (2000) quienes analizan el desarrollo de la comprensión gráfica de la conexión entre una función y su derivada. Uno de los ítems de esta investigación pedía a estudiantes que esbozaran la gráfica de una función cuando se proporcionan algunas de sus propiedades (en la primera y segunda derivada, límites y continuidad) en intervalos específicos de su dominio de manera analítica. La actividad fue la siguiente:

Dibuje un gráfico de la función h que satisfaga las siguientes condiciones:

$$h \ es \ continua$$

$$h(0) = 2, \qquad h'(-2) = h'(3) = 0, \qquad y \ \lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$$

$$h'(x) > 0 \ \ cuando \ -4 < x < -2, \qquad y \ cuando \ \ -2 < x < 3$$

$$h'(x) < 0 \ \ cuando \ x < -4, \qquad y \ cuando \ \ x > 3$$

$$h''(x) < 0 \ \ cuando \ x < -4, \qquad cuando - 4 < x < -2 \ \ y \ cuando \ \ 0 < x < 5$$

$$h''(x) > 0 \quad cuando \ -2 < x < 0, \qquad y \ cuando \ x > 5$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty \ \ y \ \ \lim_{x \to \infty} h(x) = -2$$

El análisis de las respuestas les permitió determinar que el esquema gráfico del cálculo varía de una persona a otra y puede evolucionar por caminos diferentes; sin embargo, cada esquema personal pasa de algún modo por los mismos niveles de desarrollo que describe el modelo de Piaget y García (1989).

Según estos autores, el esquema de cálculo gráfico de un estudiante está caracterizado por una combinación de los niveles de desarrollo en la comprensión de los conceptos del cálculo como la derivada, límites, continuidad e ideas de pre-cálculo. El esquema de "cálculo gráfico" se conjeturó que estaba formado por dos esquemas que denominaron el "esquema propiedad" y el "esquema intervalo". Además, el desarrollo del esquema de "cálculo gráfico" lo describieron por la interacción de estos dos esquemas, utilizando para ello una terna bidimensional.

Otros investigadores también han trabajado sobre el nivel de comprensión que tienen los profesores sobre la derivada, por ejemplo, Badillo (2003), quien también asume el marco de la teoría APOE. En su investigación intenta inferir el nivel de comprensión que tienen los profesores de matemáticas y física de Colombia sobre derivada.

Nosotros hemos considerado como base el primer tipo de trabajos junto con la actividad de Baker et al. (2000), mencionada arriba, misma que se aplicó a un grupo de quince profesores de matemáticas del nivel medio superior.

3. RESULTADOS

Se observó que un número significativo de ellos no lograron completar la tarea. Algunos de ellos no interpretaron las condiciones de la segunda derivada, evidenciando falta de desarrollo del esquema de la propiedad de derivada. Otros no coordinaron las condiciones de la primera con las de la segunda derivada. Solo dos docentes lograron tener una concepción más cercana de la gráfica de la función solicitada. En esta ponencia se mostrará el análisis detallado de ésta y otras actividades propuestas a profesores de matemáticas del nivel medio superior con el enfoque de la teoría APOE.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior*, 16 (4), 399-431.

Badillo, E., y Azcárate, C. (2002). *Conocimiento profesional de profesores de Matemática de secundaria. Las relaciones entre Derivada y Velocidad en la enseñanza del Cálculo Diferencial*. Primeres Jornades d' Educació Matemática de Catalunya, Mataró Barcelona.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis de doctorado no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (5), 557-578.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: the case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior* 14 (4), 345-364.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. In E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning. MMA Notes 33 (pp. 31-45). Washington, DC: MMA.

Luna, J., Ruiz, O., Loera, E., Barrón, J. y Salazar, M. C. (2013). Comprensión del concepto de derivada. *Matemática Educativa, CULCyT* 51(1). Cd. Juárez, México.

Sánchez-Matamoros, G., García, G., García Blanco, M. y Linares C. S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (1), 85-98.

Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores.