CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Constructions and Mental Mechanisms for Use of Basic Concepts of Linear Algebra

Marcela Parraguez[a]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

marcela.parraguez@pucv.cl[a]

Resumen

En esta conferencia se presentan resultados de una investigación desarrollada con base en los esquemas cognitivos de la teoría APOE a través de las fases Intra, Inter y Trans, las que se han caracterizado a través de relaciones, transformaciones y conservaciones (o invariantes), respectivamente, que estudiantes universitarios evidencian a partir del uso o aplicación de los conceptos básicos del álgebra lineal en situaciones problemáticas que se etiquetan como Intra-AL y Extra-AL, a través de las cuales se muestra que el uso y la aplicación de estos conceptos básicos se convierten en un medio de construcción conceptual para el algebra lineal.

Palabras clave: Conceptos básicos del álgebra lineal, Teoría APOE.

Abstract

In this conference we present results of a research developed on cognitive theory APOS schemes with the help of phases Intra, Inter and Trans, which have been characterized by relationships, transformations and conservations (or invariant), respectively, that college students show from the use or application of the basic concepts of linear algebra in problem situations that are labeled as Intra-AL and Extra-AL, through which it is shown that the use and application of these basic concepts become a means for the conceptual construction of linear algebra.

Keywords:*Basic concepts of linear algebra, APOS Theory.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra lineal (AL) es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como ingeniería, licenciatura en ciencias o en economía; es así como surge el interés por investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos básicos que la componen. Cuando decimos conceptos básicos nos estamos refiriendo específicamente los conceptos de espacio vectorial de dimensión finita, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, sunespacio generado y conjunto generado, base, dimensión, transformación lineal, valores y vectores propios, en esos espacios. Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender conceptos relativos al álgebra lineal. Por ejemplo, en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos (Sierpinska, 2000). En su esfuerzo por formular una propuesta didáctica específica para el álgebra lineal, desde la teoría APOE, RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) ha preparado materiales de enseñanza en el que se muestra su filosofía acerca de qué contenidos debiera incluir y cómo debiera organizarse un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky, 2002).

Diversas investigaciones han reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en deterioro de la comprensión de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001; Sierpinska, Nnadozie y Oktaç, 2002). De hecho, Sierpinska (2000) se concentra en algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes, que podrían ser los responsables de algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal. La autora argumenta que los estudiantes tienden a pensar más en forma práctica que teórica, y señala que esta tendencia afecta negativamente el razonamiento en el ámbito del álgebra lineal (Sierpinska, 2000).

Una primera tentativa en revelar las fuentes de las dificultades de los estudiantes en álgebra lineal, a través de un análisis histórico y epistemológico se puede encontrar en Robinet (1986). El trabajo en esta dirección fue seguido por Dorier (2000). Estas investigaciones no solamente sirvieron como referencia para una mejoría de los errores y las dificultades de los estudiantes, sino también se han utilizado como inspiración para diseñar actividades para los estudiantes.

SOBRE EL USO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

A pesar de que existen investigaciones en Didáctica de la Matemática sobrelas temáticas del álgebra lineal, las investigaciones hasta ahora reportadas no han hecho énfasis en aspectos cognitivos importantes relacionados con el uso y la aplicación, pues apostamos que ellos también se convierten en un medio de construcción conceptual. Eso es teóricamente el interés de la conferencia que se propone, para responder a la pregunta ¿cuál es la ruta de construcción conceptual de los conceptos básicos del AL? pero la vía no necesariamente deberá ser desde la perspectiva teórica del álgebra lineal, sino de su uso, a través de sus conceptos –básicos–. Es todo un reto construir esquemas mentales (descomposiciones genéticas) no solo desde la reflexión teórica, sino también práctica.

ÁLGEBRA LINEAL EN PREGRADO

Seguir impartiendo cursos abstractos de álgebra lineal y con los resultados que se conocen (Dubinsky, 1997; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999; Dorier, 1997) es una pérdida de capital cultural en el sistema, toda la energía de profesores que explican y plantean asuntos que no se transforman en herramientas útiles en lo estudiantes, también se convierte en una pérdida en el esfuerzo educativo. Hay que contribuir en romper ese círculo vicioso. Por eso se investiga: desempeño, errores, interpretaciones, concepciones, nociones, formas instruccionales, y luego la más fina y compleja, los procesos mentales en la construcción de esquemas mentales propios de la disciplina (que ya es mucho decir) en su uso. Estudiar estos procesos de construcción desde su aplicación o uso dará paso a la construcción de procesos instruccionales mas exitosos, eso la investigación lo puede señalar (aunque bien sabemos que desde la perspectiva teórica de la disciplina casi no quiere decir nada) pero en el medio escolar si tiene valor y significado.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: TEORÍA APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Esta teoría (Dubinsky, 1991) nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas, acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. El esquema, “es el nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante.” (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews y Thomas,1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la Figura 1, se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

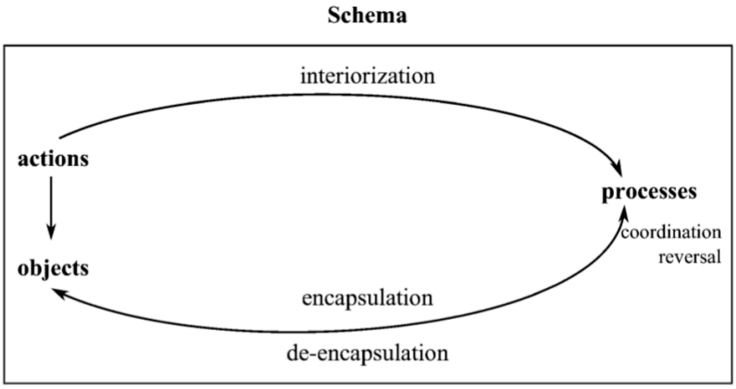

Figura 1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático.(Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014, p. 18).

A lo largo de todo este escrito, vamos a considerar un ESQUEMA como una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, previamente construidos, que son coordinados y sintetizados por el estudiante para formar estructuras utilizadas en la resolución de problemas matemáticos y que muestran la coherencia del esquema (o sea niveles de desarrollo) al discernir cuando el esquema es aplicable o no. De esta manera, el desarrollo cognitivo de un esquema en la mente de un estudiante se caracteriza a través de los niveles Intra, Inter y Trans en el tipo de las relaciones y transformaciones que los estudiantes son capaces de establecer entre construcciones particulares que evocan dentro del esquema, cuando resuelven un problema.

Desde estas caracterizaciones generales, un indicador del desarrollo del esquema en la mente de un estudiante es el tipo de relaciones (Intra), el tipo de transformaciones (Inter)y el tipo de conservaciones o invariantes (Trans) que los estudiantes son capaces de establecer entre los estados de construcciones de conceptos del AL particulares, que evocan dentro del esquema, cuando resuelven problemas. La forma en que los estudiantes establecen relaciones, transformaciones y conservaciones entre los diferentes estados de construcciones mentales de conceptos particulares dentro del esquema, cuando están resolviendo un problema matemático, puede ser vista como la forma en que los estudiantes reorganizan y reconstruyen –o sea usan– los conceptos básicos del AL, para formar nuevos estados de construcción de éstos. De esta manera el desarrollo de un esquema viene determinado por el tipo de organización, a partir de relaciones y síntesis constituidas al alero del AL, que el resolutor de un problema precisa para su resolución. Así los niveles de desarrollo del esquema de los conceptos básicos del AL en la mente de un estudiante los caracterizamos como se describe a continuación.

ESQUEMA

Nivel INTRA de los Conceptos básicos del AL:no se establecen organizaciones a partir de **relaciones** lógicas o síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) se realizarán con errores. Los estudiantes usan esto dos conceptos básicos del AL en forma aislada (por ejemplo: para cierto tipo de Espacios Vectoriales específicos), y no como un cuerpo de conocimiento.

ESQUEMA Nivel INTER de los Conceptos básicos del AL: Los estudiantes establecen **transformaciones** u organizaciones a partir de relaciones lógicas (o alternativas) entre los estados de construcción del esquema de conceptos básicos del AL, pero con limitaciones, predominando el uso de la conjunción lógica, en elementos del AL que le son familiares. El estudiante es capaz de integrar a su síntesis más conceptos básicos (que en el nivel anterior) de la teoría del álgebra lineal de forma correcta.

ESQUEMA Nivel TRANS de los Conceptos básicos del AL: Aumenta el repertorio de las relaciones lógicas (y lógica, contrarecíproco, absurdo, y equivalencia lógica) que el estudiante es capaz de establecer entre los diferentes estados de construcción del esquema conceptos básicos del AL, para sustentar constructos que son **invariantes** como estructura, en el AL. En este nivel se produce la síntesis de los modos de rotular cuestiones relativas a los conceptos básicos del AL, que lleva al resolutor a la construcción de un cuerpo de conocimiento unificado, que le permite identificar los elementos invariantes para el andamiaje de un cuerpo de conocimiento del AL.

La síntesis que un estudiante ha construido de los conceptos básicos del AL después de realizar un curso del mismo, es posible de etiquetarse en una estructura de Acción, Proceso, Objeto o Esquema, la que él aplica a situaciones en las que hay que considerar conjuntamente cuestiones del AL que pertenecen a una misma familia o categoría. Por ejemplo: a veces un vector es una flecha, otras veces en un par ordenado, otras una matriz, otra un polinomio, etc.; para obtener a partir de su uso una información que no conocía, y que el estudiante construye con el hecho de verse enfrentado a resolver un determinado problema. Considerar la información conjuntamente lo entendemos como establecer algún tipo de relación lógica (o síntesis), transformación o conservación, para tomar una decisión relativa a la situación en la que el estudiante se encuentra para con el problema a resolver.

Por tanto, desde esta perspectiva el tipo de relaciones, transformaciones y conservaciones, diferentes, entre los estados de construcción de los conceptos básicos del AL que los estudiantes establecen durante la resolución de un problema puede ser considerado un indicador del nivel de desarrollo mental del esquema que hemos llamado esquema nivel intra, inter y trans de los conceptos básicos del AL.

El objetivo en esta parte de la investigación es identificar el tipo de relaciones (lógicas), transformaciones y conservaciones establecidas entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes usan cuando resuelven un problema, para así caracterizar el proceso de desarrollo del esquema concepto básicos del AL, a través de su uso.

La hipótesis sobre la cual se apoya este objetivo es que las relaciones, transformaciones o conservaciones entre los elementos matemáticos del AL que los estudiantes (de nuestro casos de estudio) son capaces de establecer durante la resolución de un problema, pueden ser consideradas como niveles de un esquema de dos conceptos básicos del AL desde un punto de vista cognitivo, utilizandoel modelo del desarrollo de los esquemas cognitivos de la teoría APOE, a través de las fases Intra, Inter y Trans, que apoyan la evolución de la construcción del conocimiento.

METODOLOGÍA

En esta primera etapa se trabajó con un caso de estudio (Stake, 2010), constituido por 12 estudiantes (sean estos de Licenciatura o Pedagogía en Matemática), atendiendo a criterios de selección (haber cursado AL, buen rendimiento académico, accesibilidad de los investigadores). Los estudiantes fueron etiquetados como E1, E2, …, E12 y el entrevistador como E.

En esta primera etapa se aplicó un cuestionario de 11 preguntas, del tipo lápiz y papel y una entrevista semiestructurada de 5 preguntas. La idea es que la demanda del problema propuesto en los instrumentos al resolutor, permita caracterizar la evolución del esquema de los conceptos básicos del AL.

Hemos seleccionado una pregunta de la entrevista que se aplicó a los estudiantes, para mostrar en este reporte su análisis desde la triada Inter-conceptos básicos del AL, Intra-conceptos básicos del AL y Trans-conceptos básicos del AL.

EJEMPLO DE LA ENTREVISTA

Pregunta 5 de la entrevista.

Averigua si la siguiente afirmación es correcta o no en ambos casos justifica tu respuesta.

"Sean *V,* W y Z espacios vectoriales sobre un cuerpo K y supongamos que:

$V + W = V + Z$,

Entonces, $W = Z$".

Durante el desarrollo de la entrevista aE6, es interesante mostrar como él transforma una propiedad que no se cumple en el esquema de los conjuntos, hacia el contraejemplo en el esquema de los espacios vectoriales, conservando una propiedad sin estructura que evoluciona hacia una propiedad con estructura en el segundo esquema.

[169ES5] : Entonces hay que demostrar que W es igual a cero, si es que es verdadero no, no, no, yo creo que no.

[170E] : ¿Por qué?

[170ES5] : Porque estoy pensando en lo más fácil, R estoy pensando, pero perdón acá son todos los vectores que son de la forma V+W donde V pertenece a K y W K esa es la definición de suma de espacio ¿cierto?

Para poder considerar la aplicación de operaciones sobre espacios vectoriales, el estudiante necesita una concepción objeto de EV.

[171E] : Claro.

[171ES5] : Entonces, pensemos en V igual a R ahí todo esto falso, pensé mas en V igual a R entonces pensemos R más un conjunto igual a R más otro conjunto por ejemplo si yo, aquí yo pongo el espacio nulo eso me da R ¿cierto?

[172E] : Sí.

[172ES5] : De hecho si yo pongo cualquier cosa acá me va a dar R.

[173E] : ¿Cómo cualquier cosa?

Sin embargo para poder construir un contraejemplo, se requiere la desencapsulación del concepto espacio vectorial y pensar en el proceso que dio origen al objeto, y eso es justamente el uso del esquema del concepto subespacio vectorial.

[173ES5] : Cualquier subespacio de R, si yo pongo cualquier, por ejemplo…pongo el generado por el (1,1) el por ejemplo no el generado por el 1 esta en R, IR más R eso me da R e ir no es igual a y ese y ese son distintos, por lo tanto, es falso.

E6, en la misma pregunta 5, hace uso del esquema de conjuntos, para diseñar un contraejemplo, que hace evolucionar a una estructura de espacio vectorial.

[122ES6] **:** Ya se me vino a la cabeza una... algo de teoría de conjuntos, por ejemplo, si yo tengo que A unión B es igual a A unión C no necesariamente *B = C,* hay contra ejemplos para eso. Pero estaba tratando de pensar en un contra ejemplo para eso y yo creo que es análogo, creo que es análogo.

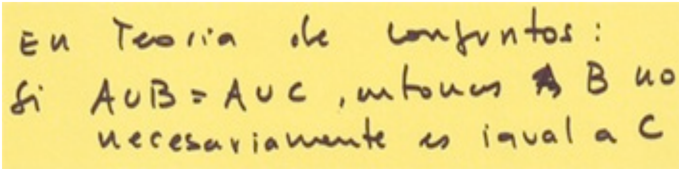

Figura 2.E6 traspasa la situación al esquema de conjuntos.

[125E] **:** Entonces ponga ahí lo que esta pensando usted .Estoy pensando que esta es la relación que hace.

[123ES6] **:** En teoría de conjuntos, tengo que si A unión B es igual a A unión C entonces D no necesariamente es igual a C. Escribo un contra ejemplo.

[126E] **:** Si usted quiere .No es necesario por que usted ya lo ve, pero si quiere lo escribe, si a usted lo va a ayudar a responder, escribir eso, bienvenido, pero ver esto es muy bueno.

[124ES6] **:** Por ejemplo, si tomo A como, claro, uno: a B uno coma dos; y a C como dos no más, entonces A unión B, esto es uno coma dos; y A unión C también es uno coma dos…

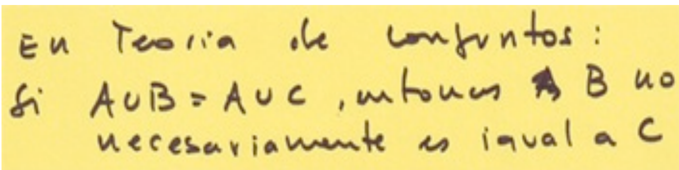

Figura 2. E6 traspasa la situación al esquema de conjuntos.

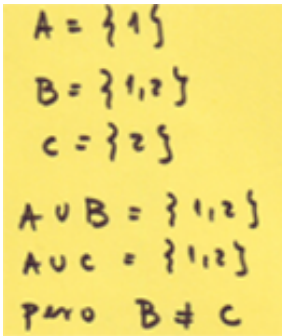

Figura 3. E6 construye el contraejemplo en el esquema de conjuntos.

[127E] **:** Pero…

[125ES6] **:** Pero B es distinto de C.

[128E] **:** Perfecto.

Este estudiante, E6 al desencapsular el objeto espacio vectorial, mira el proceso que dio origen a él, y resulta importante el rol que juega el esquema de conjuntos para usarlo (evocarlo) en la elaboración de la respuesta, y para ir relacionando los elementos de los esquemas espacio vectorial y teoría de conjuntos.

[132E] : Porque un espacio vectorial, si bien tiene estructura de espacio, ante todo ¿qué es lo que es?

[130ES6] : Un conjunto.

Y es aquí en este esquema de conjuntos en el cual procesa y construye tres conjuntos a partir de los cuales usa para construir espacios vectoriales como el generado de esos conjuntos, los que le permitirán elaborar el contraejemplo para la pregunta 5 de la entrevista.

[133ES6] : Puede, a ver, déjeme un poquito. Es que a lo mejor podría tomar, generadores.

[136E] : Sí.

[134ES6] : Puede ser, espéreme un poco.

[137E] : Te pueden servir, por supuesto, porque los generadores ¿Qué son?

[135ES6] : Son espacios vectoriales.

[138E] : Pero no son así, ¿no es cierto?, son ¿de qué categoría? ¿Cómo es un espacio generado?, mi pregunta es ¿es finitos o infinitos?

[136ES6] : Infinito.

[139E] : Infinito, así que estaría concordando con las ideas que usted tiene.

[137ES6] : Claro, porque por ejemplo si yo tengo, no me acuerdo como era la… o sea como, a ver… ah, si yo tengo que V por ejemplo, es el generado por *a* y W es el generado por *b*, entonces V + W es el generado por *a* unión *b*, entonces ahí tengo algo como parecido. Ya ahora voy a tomar V como el uno coma dos y dos coma uno… no yo creo que ese no.

[140E] : Le pone "no" entonces.

[138ES6] : Voy a tomar V como el uno coma dos no más, voy a tomar W como cero coma tres y Z cero coma tres y uno coma dos, entonces en este caso V + W, esto es uno coma dos y cero coma tres y V + Z también es lo mismo.

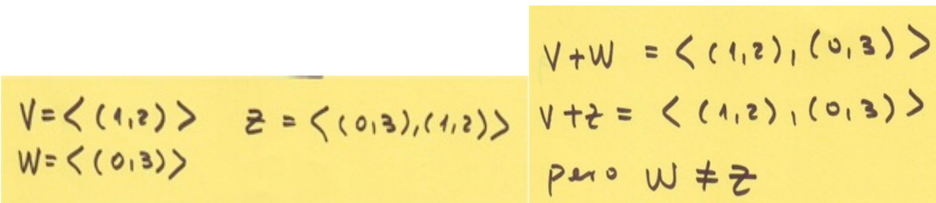

Figura 4. Construcción del contraejemplo en el esquema de espacio vectorial.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados hasta ahora obtenidos muestranlas construcciones y mecanismos mentales que utiliza un estudiante de Pedagogía o Licenciatura en Matemáticas como estrategia cognitiva, para construir conceptos básicos del álgebra lineal. Entre ellos se destacó la construcción del concepto espacio vectorial como objeto, y la construcción del concepto de conjunto como esquema.

En cuanto alas caracterizaciones de las fases intra, inter y trans de los conceptos básicos del álgebra lineal, el análisis de los resultados obtenidos da cuenta que los estudiantes que logran mostrar relaciones, transformaciones y conservaciones en dicho esquema, mostraron evidencias de haber construido las siguientes construcciones y desarrollado los mecanismos mentales asociadas a ellas:

(1) La construcción objeto del concepto de espacio vectorial: Se logra a partir de la coordinación del proceso suma de vectores con el proceso de multiplicar un vector por un escalar, a través de la ley distributiva. Esta coordinación se realiza a partir de la construcción de la combinación lineal de vectores como proceso.

(2) La construcción del concepto espacio generado como objeto: Para ello es necesario coordinar los procesos combinación lineal y conjunto generador a través del cuantificador, que exige que todos los elementos del conjunto generador, sean puestos en combinación lineal. Este proceso se encapsula en el objeto espacio generado Esta encapsulación mostró ser difícil para los sujetos de los casos de esta investigación. Únicamente 5 de ellos dieron muestras en su trabajo de haberlo construido y, durante la entrevista, con la guía de la entrevistadora, dos alumnos más lograron dicha encapsulación.

Las evidencias obtenidas dan cuenta de las dificultades en la construcción del esquema conceptos básicos del álgebra lineal. Claramente, el análisis de los resultados muestra que la no construcción del concepto espacio vectorial como un proceso imposibilita la construcción del esquema conceptos básicos del álgebra lineal.

Una contribución relevante de este trabajo, consiste en mostrar que la construcción del esquema del concepto espacio vectorial, no garantiza que se ha construido la relación que se establece el esquema conceptos básicos del álgebra lineal. Este resultado parece indicar que en los cursos de Álgebra Lineal es necesario llevar a cabo actividades explícitas para poner de relieve el papel de los conceptos básicos en este importante tópico de la matemática.

Con este estudio se propone una primera respuesta a la pregunta de investigación planteada acerca de las construcciones y mecanismos mentales asociados al uso de los conceptos básicos del álgebra lineal. Este estudio proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los alumnos y a sus estrategias.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está siendo posible gracias al apoyo recibido del CONICYT para el desarrollo del proyecto Fondecyt Regular No. 1140801.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014).APOS Theory.A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K.(1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) Research in Collegiate Mathematics Education. Vol. 2. Providence, RI: American Mathematical Society. p. 1-32.

Dorier, J. L. (1997). L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question. Grenoble: La penséee Sauvage editions.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (ed.): On the Teaching of Linear Algebra, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 3-81.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study. Kluwer Academic Publisher.Printed in Netherlands. pp. 255-273.

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgraber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: New ICMI Study Series, 7, 255-273.

Dubinsky, E (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, y W. Watkins, (Eds). Resources For Teaching Linear Algebra, MAA Notes, 42, 85-106.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire.Cahier de Didactique des Mathèmatiques, 29 IREM de Paris VII.

Sierpinska A. (2000). On some aspects of student's thinking in linear algebra.Dans J-L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. Recherches en didactique des mathématiques, 19(1), 7-40.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra.Reporte de Investigación. Montreal, Canadá: Concordia University.

Stake, R. E. (2010). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Tigueros, M. y Dubinsky E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL.Disponible en http://pc75666.math.cwu.edu/montgomery/scholar/2002/0731-b-IIawi.pdf