¿CÓMO PIENSAN LOS ESTUDIANTES EL INFINITESIMAL ANTES DE INICIAR UN CURSO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO?

Carmen Valdivé
valfer16@yahoo.com
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado-UCLA, Barquisimeto, Venezuela
Sabrina Garbin
sabrinagarbin@yahoo.es
Universidad Simón Bolívar-US, Miranda; Venezuela

Recibido: 30/01/2013. **Aceptado:** 08/05/2013

RESUMEN

Las ideas, hallazgos y reflexiones que desarrollamos son productos de estudios y que parten de investigaciones (Valdivé 2006, Valdivé 2008a, 2008b, Valdivé 2008c, Valdivé y Garbin, 2007, 2008, 2010) que han pretendido contribuir al estudio del infinitesimal como infinito pequeño. En particular queremos mostrar un modo de aproximarnos a los esquemas conceptuales previos que evocan los estudiantes antes de iniciar un curso de Análisis Matemático I. Queda en evidencia que algunos estudiantes evocan una variedad de esquemas conceptuales previos asociados a la noción, los cuales son descritos en el artículo, y que son semejantes de alguna manera a las ideas que se encuentran en la evolución histórica de la noción de infinitesimal.
Palabras clave: Infinitesimal, esquemas conceptuales, esquemas conceptuales epistemológicos

HOW STUDENTS THINK INFINITESIMAL BEFORE STARTING THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS?

ABSTRACT

The ideas, findings and thoughts that we develop are products that are based on studies and research (Valdivé, 2006; Valdivé 2008a, 2008b; Valdivé, 2008c;Valdivé and Garbin, 2007, 2008, 2010) that have sought to contribute to the study of infinitesimal and infinite small. In particular, we show a way to approach the conceptual schemes that evoke previous students before starting a course of Mathematical Analysis I. It is evident that some students evoke a variety of pre-conceptual schemas associated with the notion, which are described in the article, and which are similar in some ways to the ideas found in the historical evolution of the notion of infinitesimal.

Keywords: Infinitesimal, conceptual frameworks, epistemological conceptual schemes

Introducción

En el área de la didáctica del Cálculo y del Análisis se han desarrollado una cantidad importante de investigaciones asociadas a algunos de los conceptos claves como lo son los del límite, la derivada, la integral, la continuidad, entre otros. Éstas responden a la necesidad de comprender mejor las dificultades que los estudiantes deben enfrentar en la etapa de transición del Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado, etapa donde empiezan a aparecer estos conceptos en el itinerario educativo y más aún si los estudiantes deciden estudiar la Licenciatura en Ciencias Matemáticas. Estudios realizados (Cornú, 1983,1991; Tall y Vinner, 1981;

Garbin, 2000, 2005; Santamaría y Valdivé 2007; Valdivé, 2008c; Valdivé y Garbín, 2007, 2008, 2010; Gutiérrez y Valdivé, 2012) evidencian que en los conceptos claves del Cálculo antes mencionados los alumnos se sirven de las ideas intuitivas del infinitesimal o *infinito pequeño*. Desde la realidad psicológica el infinito es una noción contraintuitiva, contradictoria y compleja. Y si observamos su historia haciendo presentes nuestras intuiciones, podemos ver que éstas son similares a aquellas experimentadas por los matemáticos en el desarrollo del concepto.

El interés por la noción de infinitesimal, y desde la realidad psicológica, nos puede hacer surgir la misma interrogante, si las ideas asociadas al infinitesimal que evocan los estudiantes son similares a aquellas experimentadas por los matemáticos a lo largo de la historia, y en consecuencia otros cuestionamientos, cómo pueden entender éstos el épsilon, el delta y los diferenciales en el Análisis Matemático y qué ideas formales previas los alumnos tendrían como asociadas a esta noción matemática.

Desde la Didáctica de las Matemáticas aproximarnos a contestar estas preguntas nos lleva a trabajar con constructos conceptuales que nos permitan tener una imagen, como una fotografía, de lo que evoca un estudiante ante ciertas preguntas asociadas a la noción matemática que interesa. A lo largo del desarrollo de esta disciplina, se habla de ideas, concepciones, imágenes, modelos mentales y esquemas conceptuales. En este estudio nos interesan constructos teóricos que se ubican en lo que se conoce como Pensamiento Matemático Avanzado tales como esquema conceptual, esquema conceptual formal e informal entre otros. Estas nociones se han ido matizando a lo largo de tiempo a través de investigaciones empíricas (Tall 2001, 2004, 2005; Przenioslo, 2004, 2005; Watson, Spyrou y Tall, 2004; Garbin, 2005; Valdivé, 2008b y Valdivé & Garbin , 2008, 2010).

Por otra parte contestar las interrogantes antes expuestas y que han direccionado nuestras investigaciones, desafía la forma de abordar el análisis que se pueda hacer de las respuestas de los alumnos cuando en un primer momento el instrumento es un cuestionario, y se pretenda categorizar las respuestas y reinterpretarlas, tomando en cuenta la construcción epistemológica de la noción matemática involucrada.

En este artículo queremos desarrollar ideas, hallazgos y reflexiones que son productos de estudios y que parten de investigaciones (Valdivé 2006, Valdivé 2008a, 2008b, Valdivé 2008c, Valdivé y Garbin, 2007, 2008, 2010) que han pretendido contribuir al estudio del infinitesimal como infinito pequeño. En particular queremos mostrar un modo de aproximarnos a los esquemas conceptuales previos que evocan los estudiantes antes de iniciar un curso de Análisis Matemático I;

el uso de las redes sistémicas, para el análisis de las respuestas que dan los alumnos en un cuestionario, y la utilización de la contrastación teórica para una reinterpretación de éstas, en función de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

Algunos Referentes Teóricos

Teoría Cognitiva PMA, esquema conceptual y esquema conceptual epistemológico

David Tall y Tommy Dreyfus (Tall 1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005 y Dreyfus, 1990,1991), han elaborado una teoría cognitiva con relación al desarrollo y crecimiento del Pensamiento Matemático Avanzado, basada en aportaciones de la psicología cognitiva (fundamentalmente de Piaget y Bruner), que muestra cuáles son las condiciones para ir del Pensamiento Matemático Elemental al Avanzado. Por otra parte Tall (2005) afirma que este paso implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción supone, por un lado, el paso de "descubrir" a "definir", y por otro, el paso de "convencer" a "demostrar". En particular, en esta transición, se da el paso de lo finito a lo infinito, del infinito potencial al actual, del infinito "perceptual" al "formalizado", y la "aparición" de la noción que nos interesa en este artículo, el infinitesimal.

En la década de los 70 y primeros años de los 80, es cuando se detecta la diferencia que muchas veces existe entre los conceptos concebidos y formulados por la matemática formal y las interpretaciones que los estudiantes hacen de ellos. En particular, la adquisición, representación, uso y comprensión de ciertos conceptos que involucran la noción de infinitesimal ha sido de interés de muchos investigadores en la Didáctica de la Matemática. Al respecto se han estudiado en las últimas tres décadas la adquisición de ciertos conceptos matemáticos específicos en matemáticas avanzadas. Al hacerlo, ciertos investigadores focalizan la atención sobre las imágenes mentales que los estudiantes evocan y que entran en conflicto con las definiciones aceptadas por los matemáticos (Cornú, 1981; Vinner y Herschkowitz, 1980).

Para explicar esta distinción, Tall y Vinner (1981) definieron lo que llamamos "esquema conceptual" (*concept image*). Inicialmente, estos autores describieron el esquema concepual que tiene el alumno de un concepto matemático como toda la estructura cognitiva asociada al concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados a la noción matemática (Garbin, 2005).

Hasta el día de hoy este constructo ha ido matizándose y caracterizándose de diferente manera a través de investigaciones empíricas (Tall (2001, 2004, 2005); Pinto y Tall (1999, 2001); Przenioslo (2004, 2005); Chin y Tall (2000, 2001); Chae y Tall (2005); Watson, Spyrou y Tall (2004), Watson y Tall (2002), Garbin (2005), Valdivé (2008c) y Valdivé y Garbin (2008, 2011)).

En Valdivé y Garbin (2008, 2010) se explicita una parte de la evolución que ha tenido este constructo y la caracterización de la *acepción cognitiva del esquema conceptual* que hemos asumido en nuestras investigaciones y en este artículo. Cuando hablamos de esquema conceptual nos referimos a: (1) *Las ideas* que asocia el sujeto al concepto; (2) *Las representaciones asociadas* que hacen emerger la noción y representaciones propias de esta. Ambas son imágenes (dibujos, gráficas, palabras, símbolos) que el sujeto percibe del objeto o concepto y que evoca ante una situación problema o tarea; (3) *Los procedimientos* (algorítmicos, aritméticos, algebraicos, geométricos, manipulaciones simbólicas) que el sujeto activa ante la tarea cognitiva; (4) *Las ideas* más representativas asociadas al objeto matemático; (5) *El contexto* (geométrico, analítico, algebraico, aritmético o físico, no técnico) que el sujeto asocia ante la situación y (6) *Los ejemplos y contraejemplos* que el sujeto implementa para explicitar sus ideas.

La reinterpretación de las ideas previas de los estudiantes sobre el infinitesimal, aproximación que queremos mostrar, a partir del estudio de los esquemas conceptuales que los alumnos presentan en el momento de la investigación, la queremos hacer en función de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

En este artículo asumimos la caracterización de los esquemas conceptuales epistemológicos de Valdivé y Garbin (2008, 2010). El *esquema conceptual en su carácter epistemológico*, puede referirse a la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y ejemplos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un cierto contexto específico. Elementos estos que existen en un cierto período histórico y que fueron aceptados por una comunidad matemática en ese período de tiempo y en ese escenario particular.

Utilizamos la diferenciación entre la acepción cognitiva (para acercarnos a los esquemas conceptuales previos de algunos estudiantes) y epistemológica del esquema conceptual (para realizar una contrastación teórica entre los esquemas conceptuales previos encontrados en los estudiantes con los de algunos matemáticos en la historia), así como los seis ítemes caracterizadores y asumidos para las dos acepciones.

Se trabaja con siete esquemas conceptuales epistemológicos (ECEn) que se encuentran explicitados en Valdivé y Garbin (2008), dos de ellos met-before (ECMEn) los cuales se pueden observar en la Tabla I con sus respectivos nombres asociados. A modo de ejemplo mostramos la descripción del ECE1 (el infinitesimal asociado a una diferencia), período histórico Siglo XVI e inicios del XVII, y que detalla la red sistémica de la Figura 1.

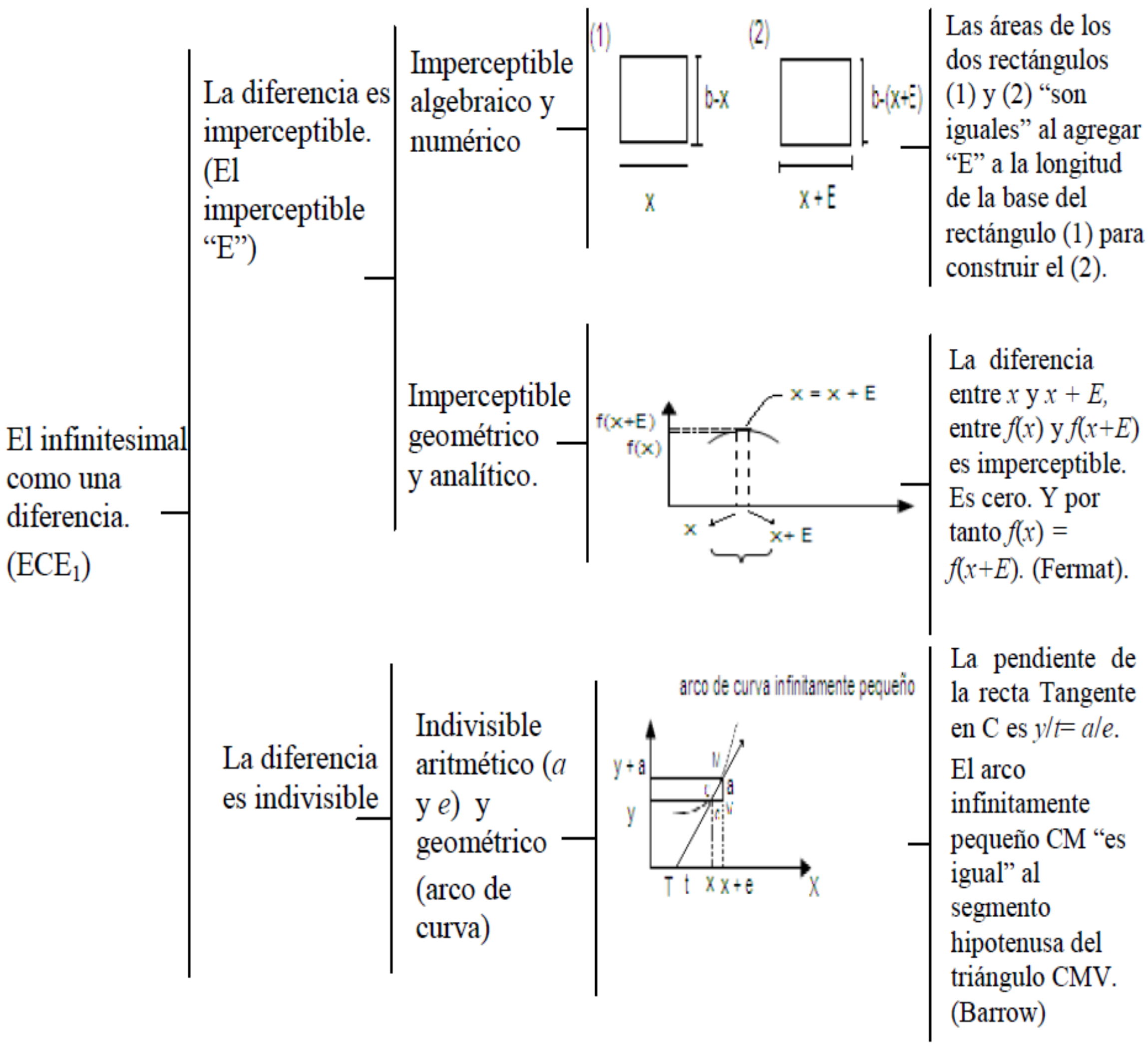


Figura 1. Red Sistémica que ilustra el pensamiento de los matemáticos en un período histórico

TABLA I

Esquemas conceptuales epistemológicos por período histórico

Período Histórico	**ECE**
Grecia Antigua	(ECME1): El infinitesimal asociado a una razón
Edad medieval (529-1436)	(ECME2): Un infinitesimal asociado a una unidad indivisible
Siglos XVI e inicios del XVII	(ECE1): El infinitesimal asociado a una diferencia
A mitad del siglo XVII	(ECE2): El infinitesimal asociado una razón aritmética
Segunda mitad del siglo XVII hasta inicios del XVIII	(ECE3): El infinitesimal asociado a un incremento
El siglo XXVII e inicios del XIX	(ECE_4): El infinitesimal asociado a un símbolo
Finales del Siglo XIX	(ECE5): El Infinitesimal asociado a una función

Nota: La n indica el número del esquema conceptual

Descripción del ECE_1 (Valdivé y Garbin, 2008, p.434): La resolución de problemas de máximos y mínimos de una función (Fermat y Barrow) condujo a la búsqueda de un método que estableciera las relaciones numéricas de los cuerpos geométricos a través del uso de rectas tangentes y subtangentes.

Utilizando el álgebra, Fermat (Fermat, 1635, citado en Stromholm, 1968), logra calcular la pendiente de una recta tangente a una curva, cuando compra el valor de f(x) en un cierto punto con el valor f(x+E) en un punto próximo. Cambia el valor de la variable para considerar valores próximos a uno dado. Concibe E menor que 1, y luego lo "elimina" de la expresión. Llama a "E" imperceptible o cantidad "evanescente" y asocia la idea de diferencia imperceptible con la noción de infinitesimal en contexto algebraico. Barrow a diferencia de Fermat, asocia la noción de infinitesimal a la idea de diferencia indivisible en contexto geométrico y numérico.

Trabajando en contexto geométrico, Barrow (Barrow, 1670, citado en Edwards, 1979) toma de una curva un arco CM infinitamente pequeño. Incrementa las dos variables *x* e *y* con valores muy pequeños, e ignora la distinción entre este arco y el segmento de línea recta CM (hipotenusa del triángulo CMV donde el segmento CM tiene como extremos los puntos C(x,y) y M(x+e, y+a) de una curva. Donde "e" y "a" son los incrementos muy pequeños de la variable "x" y "y" respectivamente). Considera a la línea formada por indivisibles. Compara el tiempo con una línea formada por indivisibles. Compara el tiempo con una línea y dota el tiempo y a la diferencia geométrica de la idea de indivisible.

Al trabajar en contexto numérico, Barrow indica que la diferencia geométrica entre el triángulo rectángulo y el triángulo curvo es cero. Usa la idea de límite con nociones netamente geométricas y con concepciones cinemáticas, para llegar a estos resultados.

Algunas de las representaciones están asociadas a la noción propiamente. Estas representaciones dan ideas de un infinitesimal. Ideas ligadas a cantidades evanescentes e imperceptibles y que hacen identificar la noción con ellas. Otras representaciones son imágenes que permiten que emerja el infinitesimal. Pasar de una idea previa de infinitesimal como razón a una diferencia imperceptible e indivisible, implicó el surgimiento de un esquema conceptual epistemológico (ECE1) asociado a la noción de infinitesimal en contextos algebraico, geométrico y numérico.

Metodología

Responder al objetivo de mostrar una aproximación de los esquemas previos asociados al concepto de infinitesimal en estudiantes de Análisis Matemático I, nos ha llevado a un estudio de tipo cualitativo e interpretativo, de carácter exploratorio, descriptivo e inductivo. Asumimos la postura de Rodríguez, Gil y García (1999), quienes expresan lo siguiente:

> La naturaleza de las cuestiones de investigación guía y orienta el proceso de indagación, y por tanto, la elección de unos métodos u otros. Luego los métodos surgen bajo las concepciones y necesidades de los investigadores que trabajan desde una disciplina del saber, la cual determina en cierta medida, a su vez, la utilización de los métodos concretos y las posibles cuestiones a tratar (p. 40).

Para este tipo de estudio, como los que hemos ido realizando en nuestro recorrido investigativo, se requiere de metodologías específicas que permiten, organizar, representar, clasificar e interpretar las respuestas que los estudiantes dan a las cuestiones que se les plantean en la investigación. Por ello optamos por usar como sistema de representación de las respuestas, las llamadas redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983), que permiten mirar todas las respuestas efectivas de los alumnos encuestados.

Como primer paso para llegar a hacer el análisis descriptivo e interpretativo por pregunta, fue familiarizarnos con las respuestas de los estudiantes, y a partir de repetidas lecturas fuimos tratando de buscar elementos comunes, características que nos permitieran establecer alguna organización de éstas, para establecer algunas categorías y facilitar el análisis.

Bliss, Monk y Ogborn, (1983) caracterizan a las redes sistémicas, sin embargo en el desarrollo de la investigación cualitativa, la estructura de las redes sistémicas se adecúan al desarrollo de las necesidades (Garbin y Azcárate (2002); Valdivé y Garbin (2008); Valdivé (2008c); Sánchez y Valdivé (2012)). Para el estudio que estamos presentando las redes se estructuran en forma de árbol con ramas que se subdividen en "clases" (se usa como formalismo la barra (|), que son categorías que se excluyen entre ellas), y en "aspectos" (se usa la llave ({) para indicar que son categorías no excluyentes). Con la llave (}) se indica que la nueva categoría incluye las anteriores. Al final de cada rama aparece en algunas redes, el número del estudiante que ha dado una respuesta que puede ser interpretada bajo esa etiqueta y en otras ramas una etiqueta que caracteriza un grupo de estudiantes o a un estudiante.

La información organizada permitió la elaboración de 15 redes sistémicas asociadas a los esquemas conceptuales categorizados a partir del análisis de los datos. Debido al alto número de redes sistémicas construidas, en este artículo mostramos sólo algunas de ellas como se evidencia más adelante.

El Cuestionario como instrumento de recolección de la información

El Cuestionario es definido en la teoría, como una traducción de las creencias, concepciones o modelos de partida utilizada para explicar una determinada realidad. Al respecto Rodríguez, Gil y García (1999) expresan que "Las preguntas reflejan lo que se piensa acerca del problema que se está investigando" (p. 186).

Con la serie de problemas presentados a través del cuestionario a los alumnos, queríamos explorar los esquemas conceptuales previos asociados a la noción de infinitesimal y conocer las ideas formales que utiliza el estudiante ante una situación problema que aluda a la noción de infinitesimal.

El cuestionario inicialmente consta de nueve preguntas. La noción matemática que subyace en las interrogantes es la misma en todas ellas, el infinitesimal, y los problemas que se tratan son de cálculo de áreas y volúmenes, de razón, variación, definición de derivada, integral, número real y distancia. Los contextos y las ideas asociadas a la noción de infinitesimal en cada problema son distintos. Los planteamientos que permiten redactar las preguntas o problemas del cuestionario surgen del estudio de la evolución histórica de la noción realizado en Valdivé y Garbin (2008a), excepto la pregunta 9.

El cuestionario es sometido a una prueba piloto. La experiencia de la prueba piloto permite considerar un nuevo cuestionario. El cuestionario definitivo (usamos CD para referirnos al mismo) consta de 8 preguntas. Para su aplicación se separa en dos partes (Parte I y Parte II). Se toma la decisión de separar el cuestionario en dos partes en virtud de dar tiempo suficiente a los estudiantes para pensar las respuestas.

Una semana antes de aplicar el cuestionario negociamos la entrada al escenario. Explicamos con detalle el propósito de la investigación tanto al profesor de la materia como a los 16 estudiantes que están dispuestos a ser investigados. No damos a conocer el objeto de estudio, la noción matemática (el infinitesimal), a los alumnos. No hay ninguna intervención didáctica. Nuestra intención no es valorar si la respuesta de los estudiantes es correcta o no.

La parte I del cuestionario, consta de cuatro preguntas y la aplicamos a 16 estudiantes que van a comenzar la materia Análisis Matemático I. Han cursado las siguientes materias: Cálculo I, II, III y IV, Física I y II, Matemáticas Discretas, Ecuaciones Diferenciales, Topología, Probabilidad, Topología, Algebra Lineal I y II. La segunda parte consta de cuatro preguntas y se aplica dos días después a éstos mismos 16 estudiantes. Para lo que nos proponemos en este artículo, sólo mostramos el análisis de 4 preguntas (dos de la Parte I y dos de la II). Estas se enuncian a continuación:

Pregunta 1. Encuentra el área de la figura que se te presenta. Escribe los procedimientos, símbolos, fórmulas y gráficos que uses para ello. Justifica los hallazgos.

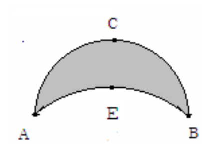


Figura a)

Pregunta 5. Si $\forall$ n>0, $|$a-b$|$< 1/n ¿Qué puedes decir de los números a y b? Justifica matemáticamente tu respuesta.

Pregunta 7. a)¿Cuál de las siguientes expresiones te parece razonable, a partir de los conocimientos que tú tienes de derivada?

i) Decimos que la primera derivada de una función *f* en *a* es *L* si para *δ* infinitesimal se tiene que $f'(a+\delta) = L + B$ con *B* infinitesimal.

ii) Dado $a \varepsilon R$, se puede calcular la razón $(f(a+h)-f(a))/h$, tabulando los valores, variando h, y ver en la tabla cuando h tiende a cero por la derecha y por la izquierda, los valores de la razón $(f(a+h)-f(a))/h$ tienden o no a un valor específico.

iii) Para demostrar que el cociente $(f(x+h)-f(x))/h$ tiende a $f'(x)$ cuando h tiende a cero (digamos que menor que una cantidad épsilon), entonces se podrá calcular la próxima cantidad que debe estar h de cero (menor que una cantidad positiva delta).

Pregunta 8. ¿Qué significado tiene para ti el infinitesimal?

Análisis de la Información

Análisis de las Respuestas del Cuestionario.

Aplicado el cuestionario, se procede a organizar las respuestas en redes sistémicas, que permiten en particular aproximarnos a las ideas, conceptos asociados, procedimientos y representaciones que utilizaron los 16 estudiantes al responder preguntas y problemas que hacen emerger la noción de infinitesimal. Se enumeran los cuestionarios del 1 al 16, esto nos permite identificar las respuestas con cada estudiante en el análisis.

Observamos un alto número de respuestas contestadas después de la aplicación del CD al grupo de los 16 estudiantes descritos. Consideramos respuesta no contestada aquella dejada en blanco y otro tipo de respuestas aquella de la que no se puede obtener ningún tipo de información relevante para los efectos del objetivo propuesto.

Análisis Descriptivo por Pregunta del Cuestionario Definitivo.

Presentamos el análisis descriptivo de cada pregunta. En la red y en el análisis de las respuestas emitidas por los alumnos, utilizamos letra itálica (cursiva) para reflejar las palabras textuales que aparecen en el escrito del estudiante.

Análisis descriptivo de la primera pregunta

Red Sistémica de la Pregunta 1 (Figuras 2a, 2b, 2c)

Nos interesa resaltar los procedimientos, los conceptos asociados, las representaciones y el contexto donde aborda la pregunta el estudiante o grupo de estudiantes, debido a que esta caracterización nos permite ubicar el uso que probablemente le da o dan a la noción de infinitesimal al afrontar la situación.

Encontramos cuatro estudiantes (16, 7, 6, 2) que inscriben rectángulos en la figura de base *dx*; calculan el área restando partes del área total; completan la figura; calculan integrales y fragmentan la superficie en regiones.

Los estudiantes (16, 6, 7, 2) realizan gráficas que nos hace pensar, cómo usan la noción de infinitesimal y en qué contexto emerge. Indican que el área es

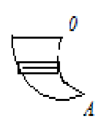
$$A = (\pi R_1 - (\pi/n)\ R_2) \text{ o } A = \pi C^2 - (\pi/n)E.^2$$

Las respuestas emitidas por los estudiantes acerca del área de la lúnula (Figura 1) no se pueden considerar correctas, sin embargo se pueden encontrar algunos elementos, como ideas, representaciones, conceptos asociados y procedimientos que nos hacen pensar se asocian a la idea de infinitesimal como un incremento. Percibimos que los estudiantes no calculan el área por ser la lúnula una superficie con características especiales, que requiere de la definición o construcción emitida por Hipócrates.

Dos estudiantes (14, 15) ofrecen una explicación como respuesta. Argumentan que encontrarían el área si inscriben rectángulos de base *dx* en la figura; y que calcularían integrales.
El estudiante (14) infiere que se calcula el área como suma de todos los rectángulos inscritos. El estudiante (15) indica que la figura se trata de dos circunferencias intersectadas. Tomaría en cuenta la definición de distancia y rectángulos horizontales. Afirma

> A_{15}: Supongo que son dos circunferencias intersectadas donde sólo tengo que calcular el área sombreada, donde d(C,E) = d(E,0) donde sería el radio R_1 de mi circunferencia 1. Luego trazo una recta tangente que pase por A y E para obtener la ecuación de la circunferencia 2 y obtener mi radio R_2. Así hallo el área sombreada con integrales definidas con rectángulos horizontales moviendo A a 0 (cero) y luego por su simetría sería dos veces esta área pedida.

El estudiante (15) dibuja la porción de la intersección de las dos circunferencias que sería para él, la mitad de la Figura a)



Porción de la intersección

Encontramos alumnos que dan otras respuestas o que no contestan. Los alumnos (4, 12, 13) escriben erradamente que el área es 2πr y que se puede calcular con integrales definidas. El alumno (10) considera de forma errada que el área de la lúnula es la suma de los arcos AE, EB, BC, CA. El alumno (8) manifiesta no saber calcular el área. Los alumnos (1, 3, 5, 9, 11) no contestan. Esta información nos parece insuficiente para caracterizar a los estudiantes. A continuación la red sistémica que recoge el pensamiento de los estudiantes.

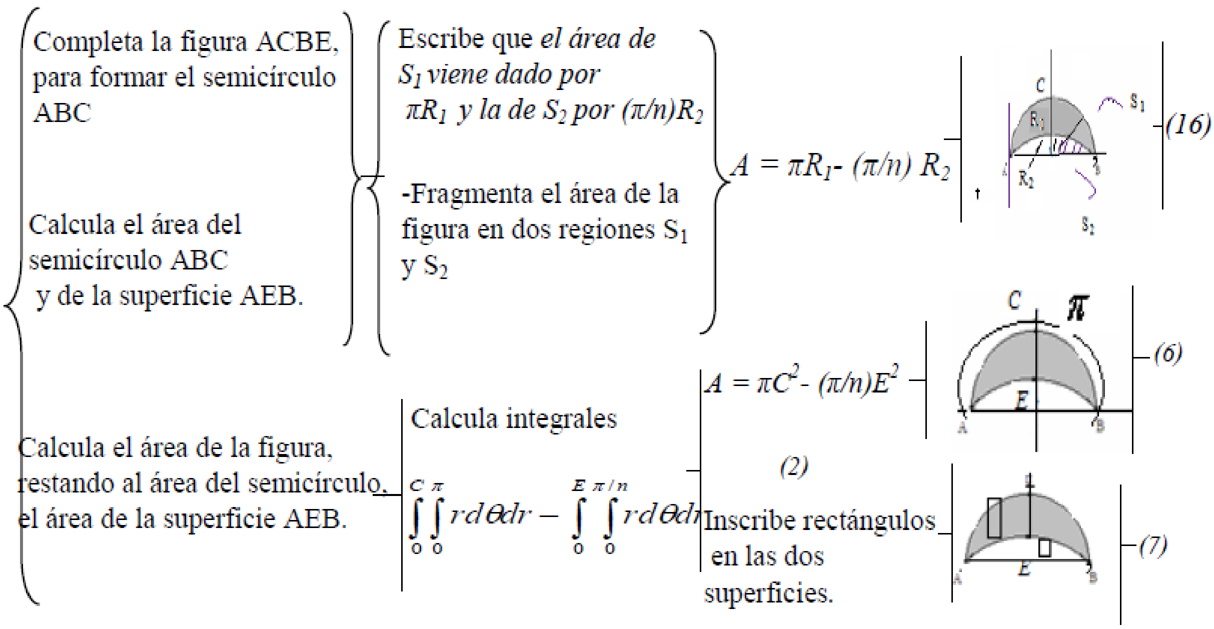


Figura 2a. Red sistémica de la pregunta 1 (los que encuentran el área)

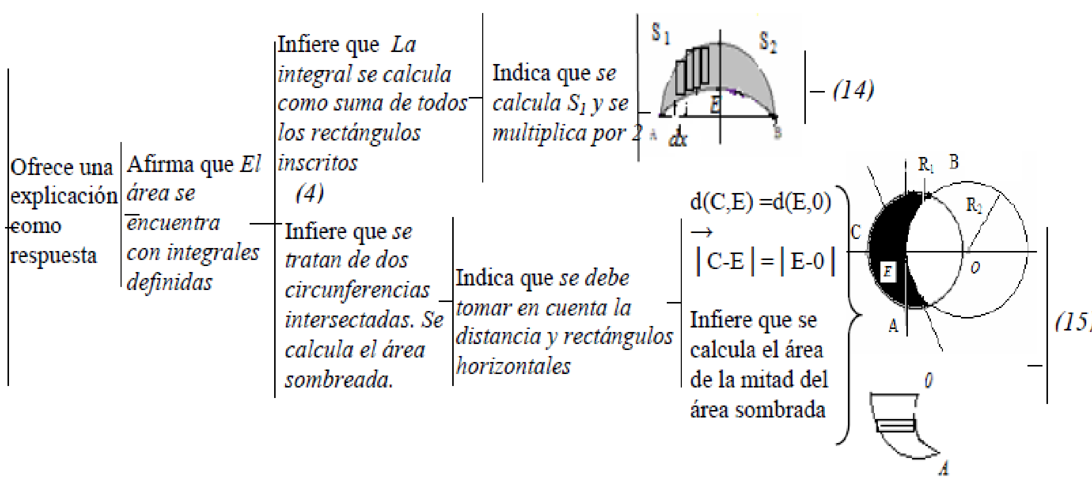


Figura 2.b Red sistémica de la pregunta 1 (los que no encuentran el área).

Ofrece otras respuestas — *(10)(13)(12)(9)(8)*

No contesta — *(5)(11)(3)/1)*

Figura 2c. Red sistémica de la pregunta 1 (otras respuestas y no contestan).

Análisis Descriptivo de la Pregunta Cinco

La pregunta 5 está expresada en un contexto aritmético-analítico. Los alumnos se enfrentan a los incrementos o decrementos muy pequeños de una variable y de un número.

Red sistémica de la pregunta 5 (Figuras 3a y 3b).

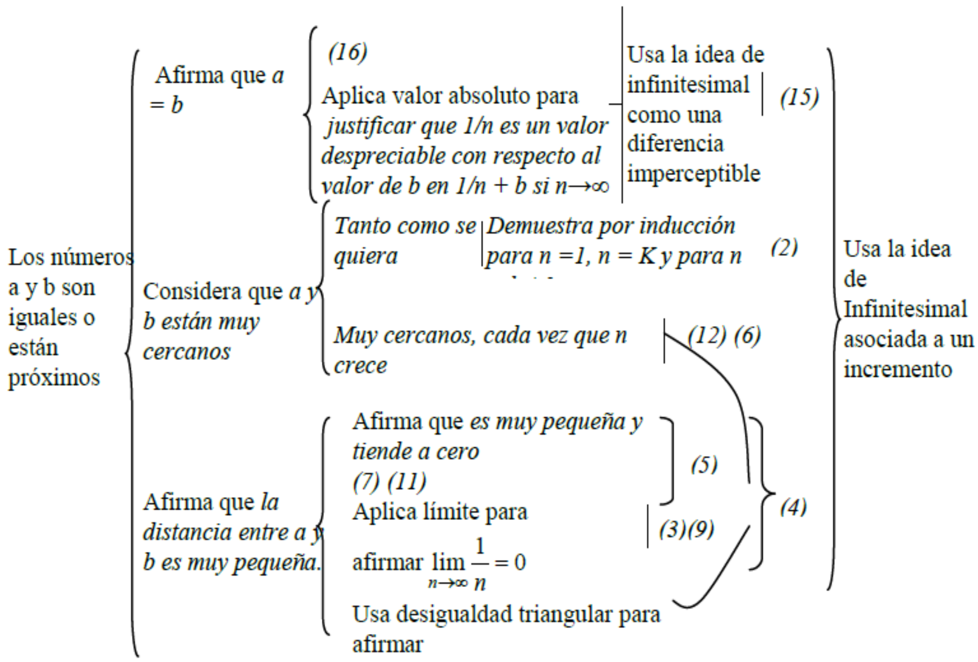


Figura 3a. Red sistémica de la pregunta 5

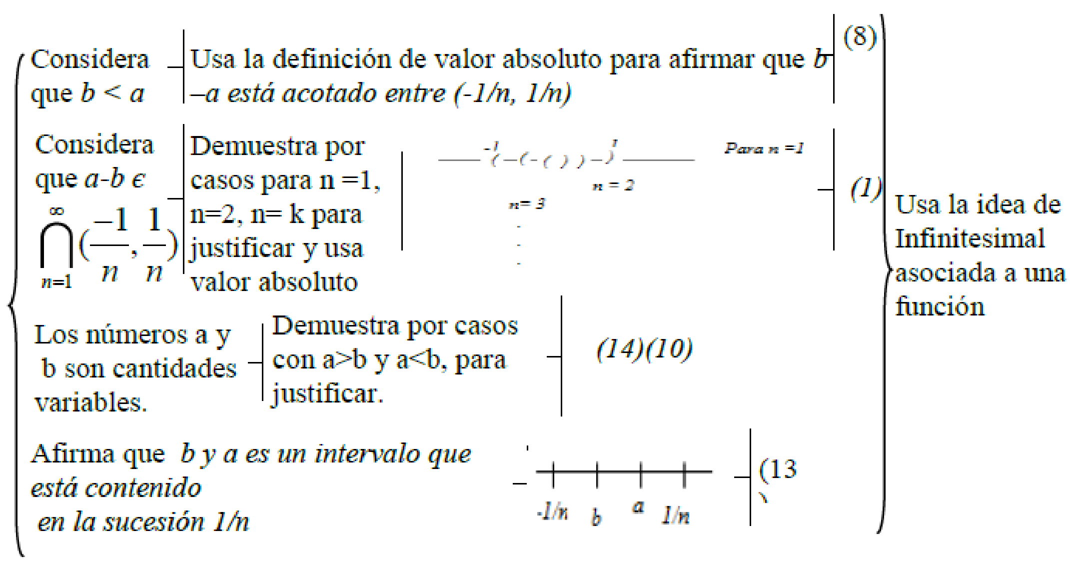


Figura 3b. Red sistémica de la pregunta 5

Doce estudiantes (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16) consideran los números a y b de la desigualdad, muy próximos o iguales. Seis (2, 3, 4, 5, 9, 15) justifican matemáticamente la respuesta.

Para justificar la respuesta, los estudiantes (4, 15) usan valor absoluto, el (2) demuestra por inducción y los estudiantes (3, 5, 9) usan límite de la sucesión 1/n con n ϵ N^*.

Los estudiantes (15, 16) afirman que a = b. El alumno (15) afirma:

A_{15}: 1/n es un valor despreciable con respecto al valor de b en (1/n) + b.

Los estudiantes (2, 6, 12) consideran que *a* y *b* están muy cercanos, tanto como se quiera o cada vez que n crezca. El alumno (2) demuestra la cercanía entre *a* y *b* por inducción *(para n = 1, n= k, n= k + 1).*

Para los estudiantes (3, 5, 7, 9, 11) los números *a* y *b* están a una distancia muy pequeña. Para los estudiantes (5, 3, 9) es tan pequeña que tiende a cero y usan límite de la sucesión *1/n* para justificar. Para el alumno (4), los números *a* y *b* están muy cercanos porque la distancia entre ellos es muy pequeña.

En síntesis hemos encontrado conceptos asociados (como sucesión, valor absoluto, distancia, límite, intervalos reales), representaciones que utilizan (recta real, $n \to \infty$, *1/n + b*) y contextos donde abordan la situación (analítico, algebraico y aritmético) algunos estudiantes (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 16). El estudiante (15) afirma que los números a y b son iguales y considera a *1/n* despreciable con respecto al valor de b en la expresión *(1/n)+ b.* El alumno (1) afirma que:

$a\text{-}b \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)$. Demuestra matemáticamente usando valor absoluto e inducción. No usa lenguaje natural para interpretar. Representa la afirmación en la recta real.

Incorrectamente, el estudiante (13) usa los números *a* y *b* como cantidades variables en la justificación. El alumno (13) afirma que los números *a* y *b* es un intervalo, pero por la representación, observamos que son los extremos de un intervalo. Utilizan procedimientos, representaciones y el número como cantidad variable. El alumno (8) afirma que $b < a$ y usa valor absoluto para afirmar que $b - a$ está acotado entre *(-1/n, 1/n)*. Los estudiantes (10, 14) afirman que los números son diferentes y demuestran los casos para $a < b$ y para $b < a$.

Análisis descriptivo de la pregunta 7.

Red sistémica de la pregunta siete (Se diseñan dos redes. Sólo mostramos una de ellas, Figura 3)

Existen alumnos (2, 9, 11) que consideran razonable la expresión i). La justificación emitida por los estudiantes (2, 9) ha sido que los infinitesimales δ y β no afectan el valor de L. El alumno (2) expone el siguiente ejemplo:

> A_2:Si $f(x) = x^3$ entonces $f\,'(x) = 3x^2$, si defino $L = f\,'(a)$, entonces al sumarle a "*a*" una cantidad infinitesimal tengo que $f\,'(a+\delta)= 3(a+\delta)^2= 3(a^2+2a\delta + \delta^2) = 3a^2+6a\delta +3\delta^2= f\,'(a) + 6a\delta +3\delta^2$ y como δ es infinitesimal puedo decir que $\beta=6a\delta +3\delta^2$ es infinitesimal, y así, tendría que $f\,'(a+\delta)=L+\beta$

El estudiante (12) responde con dudas. Afirma:

> A_{12}: Pareciera razonable pero como no sé que es $f\,'$aplicado a una cantidad infinitesimal no tengo certeza de si es razonable.

La expresión (ii) parece razonable para cinco estudiantes (2, 8, 12, 13, 14). Utilizan el lenguaje de las aproximaciones para justificar. Entre los argumentos expresan palabras como "variamos h", "se puede tener una aproximación", y "tiende a". No usan la notación de derivada, ni la definición formal. Usan símbolos como $h\rightarrow0^+$ y $h\rightarrow0^-$ para representar la palabra "variamos h".

El estudiante (12) afirma:

> A_{12}: Prácticamente eso sería hallar el límite de esa expresión cuando $h\rightarrow0$ y si el límite es igual cuando h tiende a cero por la izquierda y por la derecha, eso vendría siendo la derivada de f en un punto "a" (suena razonable, pero muy manual).

Los alumnos (1, 3, 5, 11, 13, 16) asumen como razonable la expresión iii). El estudiante 16 afirma:

> A_{16}: es razonable puesto que para hallar la derivada de una función *f*, la expresión $(f(x+h) - f(x))/h$ se convierte en $f\,'(x)= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. La manera formal sería Para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ t.q. $|h-0| < \delta$ entonces $|\,((f(x+h) - f(x))/h) - f\,'(x)\,| < \varepsilon$
>
> Escribimos la afirmación de los estudiantes (11, 13)
>
> $A_{13,\,11}$: Se demuestra garantizando la existencia de un $\delta >0$ *dado un* $\varepsilon >0$ *tal que*
>
> $\left|\,[(f(x+h)-f(x))/h]-f\,'(x)\,\right|<\varepsilon$.

Observamos que la justificación emitida por los alumnos (11, 13, 16) se corresponde con la definición épsilon–delta de límite de la función derivada. Esto nos hace pensar que los estudiantes traducen el significado de la expresión iii) usando la definición formal en lenguaje simbólico. Contrariamente los estudiantes (3, 5) traducen el significado de la expresión, usando el lenguaje natural para la definición de límite.

Notamos en esta pregunta (7a) que existe un estudiante (13) que considera razonable las tres expresiones, una de las cuales no justifica (expresión i). Pensamos que el alumno usa la idea de infinitesimal asociado a función. Asimismo los estudiante (2, 4) razonan que las expresiones i) y ii) son aceptables pero sólo el estudiantes (2) explicita su razonamiento.

El estudiante (8) argumenta una de las dos expresiones que considera como razonables (i, ii) pero sólo argumenta una. En esta pregunta (7a) pudimos notar que los estudiantes (1, 4, 7, 10) no justifican sus razonamientos y que solamente el alumno (6) no contesta. A continuación las redes sistémicas de la pregunta 7.

Considera que *la expresión iii) es razonable*

- Justifica
  - Indica que *si encontramos un valor a partir del cual h se aproxima a cero se puede demostrar que f(x+h)-f(x)/h →f ´(x)* | (3) (5)
  - Indica que *se demuestra garantizando la existencia de un δ>0 Dado un ε >0 tal que* $|f(x+h) - f(x)/ h - f\,'(x)| < \varepsilon$ | *(11)(13)*
  - Afirma que es razonable *puesto que para hallar la derivada* de una función f, la expresión *(f(x+h) – f(x))/ h se convierte en f ‘(x)=* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. *La manera formal sería Para todo ε>0 existe δ>0 t.q.* $|h-0| < \delta$ *entonces* $|((f(x+h) - f(x))/h) - f\,'(x)| < \varepsilon$ | (16)
- No Justifica | *(1)*

Figura 4a. Red sistémica de la pregunta 7a

Afirma que *la expresión ii) es razonable*

- Justifica
  - Afirma que *así se puede tener una aproximación de cuál podría ser la derivada de la función f en a* | (2) (14)
  - Infiere que *Si a єR, variamos h* ($h\to 0^+$ *y* $h\to 0^-$) *y como los límites unilaterales son iguales, tienden al mismo número.* | (8) (13)
  - Indica que *prácticamente sería hallar el límite de esa expresión cuando* $h\to 0$ | (12)
- No Justifica | (4) (1)

Figura 4b. Red sistémica de la pregunta 7.

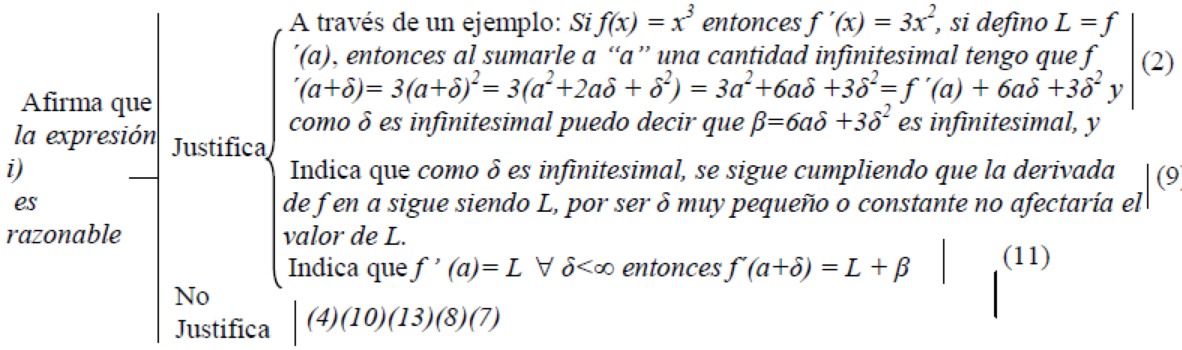


Figura 4c. Red sistémica de la pregunta 7.

Análisis descriptivo de la pregunta 8.

Esta pregunta se ha incluido de forma intencional, por ser una de las que usan otros investigadores que trabajan en la línea cognitiva (Vinner, 1983, Vinner, 1991, Tall, 1977, entre otros) y por el tipo de ideas de infinitesimal que puede aflorar a partir de esta interrogante, las cuales tienen que ver con las que pueden usar los estudiantes en las cuestiones planteadas en las preguntas 1 a 7. Estas hacen referencia al cálculo de área y volumen, significado de los símbolos *(dx)*, *(dy)*, *(dy/dx)* en la definición de derivada, derivada y variación entre otras situaciones. Creemos que al analizar el conjunto de palabras que usan los alumnos acerca del significado de la noción de infinitesimal, así como los ejemplos que darían y el cómo lo explicarían, nos puede permitir encontrar conexión o no con las ideas que aluden a las cuestiones planteadas en el resto de las preguntas del cuestionario, así como las representaciones, los conceptos, el contexto y los procedimientos que muestran. Para analizar las respuestas de los estudiantes ante esta pregunta, utilizamos los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción.

Redes sistémicas de la pregunta ocho (Se diseñan 3 redes. Mostramos una de ellas, Figura 5)

Dos estudiantes (12, 13) mantienen la idea de infinitesimal asociado a un indivisible en las tres preguntas. Escribimos a continuación las respuestas de las preguntas de los dos estudiantes.

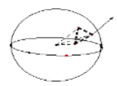
El alumno (12) afirma:

A_{12}: es una cantidad infinitamente pequeña, semejante a un diferencial que sirve para representar algo más grande. Lo definiría como una cantidad mínima que representa un área, superficie o volumen específico donde ella se encuentra y hacer que esa cantidad recorra todo lo que ella representa. Consideraría como ejemplo la muestra en estadística, ya que esa muestra son los infinitesimales que en matemática son los diferenciales.

El estudiante (13) afirma

A_{13}: es una cantidad infinitamente pequeña que sirve para representar algo más grande. Es una porción de objeto a estudiar. Lo definiría como una mínima diferencia de un objeto a estudiar. Consideraría como ejemplo a *dq*, siendo *dq* una mínima porción.

Representa a *dq* de la manera siguiente:



La idea de infinitesimal que tienen los estudiantes (12,13) alude a la idea de infinitesimal asociada a un indivisible. Otros alumnos (3, 5, 6, 7, 16.) otorgan el significado de indivisible cuando alegan que es una cantidad infinitamente pequeña. Los sujetos (5, 6, 7, 16) no representan. La interpretación que hacemos de los estudiantes la podemos corroborar con las afirmaciones que ellos infieren:

A_3: Es una cantidad positiva tan cercana a cero como se quiera (pero no igual a cero) que proporciona un intervalo muy pequeño en el cual se quiere estudiar un evento.
A_5: Tiene que ver con el estudio de cantidades muy pequeñas. Es una porción muy pequeña de algo.
A_6: Significa algo muy pequeño. Diminuto.
A_7: Es un número infinitamente pequeño.
A_{16}: Es un valor muy pequeño, semejante a un diferencial. Si fuese dx, $dx \to 0$.

Analizadas las respuestas de los 16 cuestionarios, se muestra la clasificación de los estudiantes en función de la variedad de esquemas conceptuales previos que evocan y en función del tipo de argumentos que emiten para justificar las respuestas. A continuación las redes sistémicas de la pregunta 8.

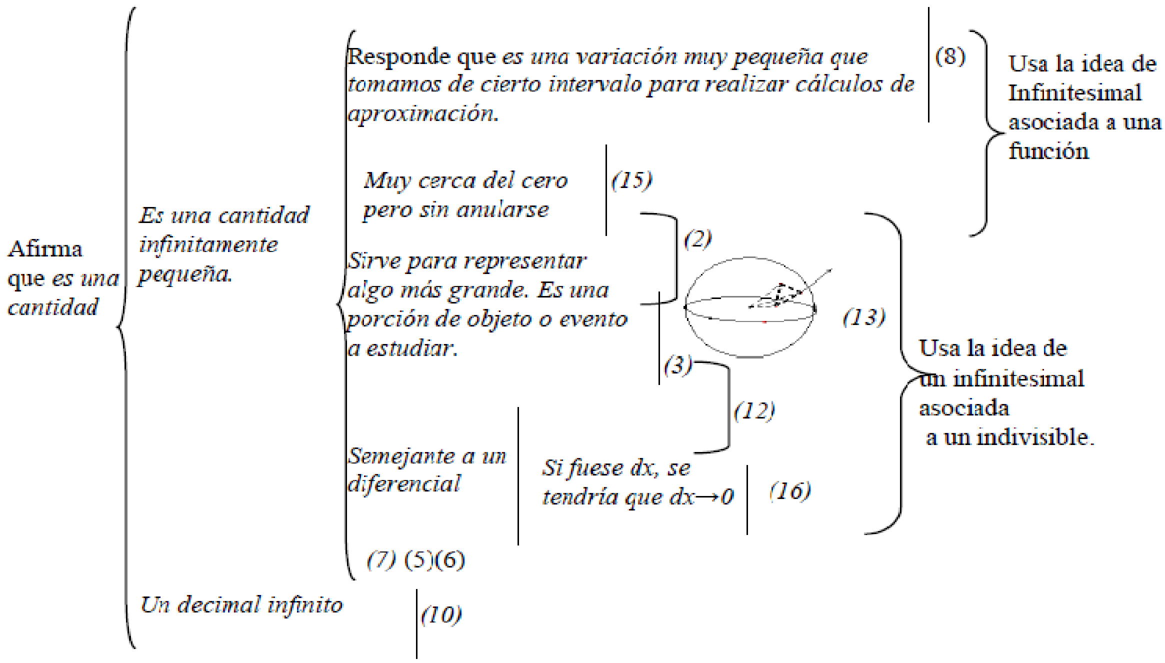


Figura 5a. Red sistémica de la pregunta 8

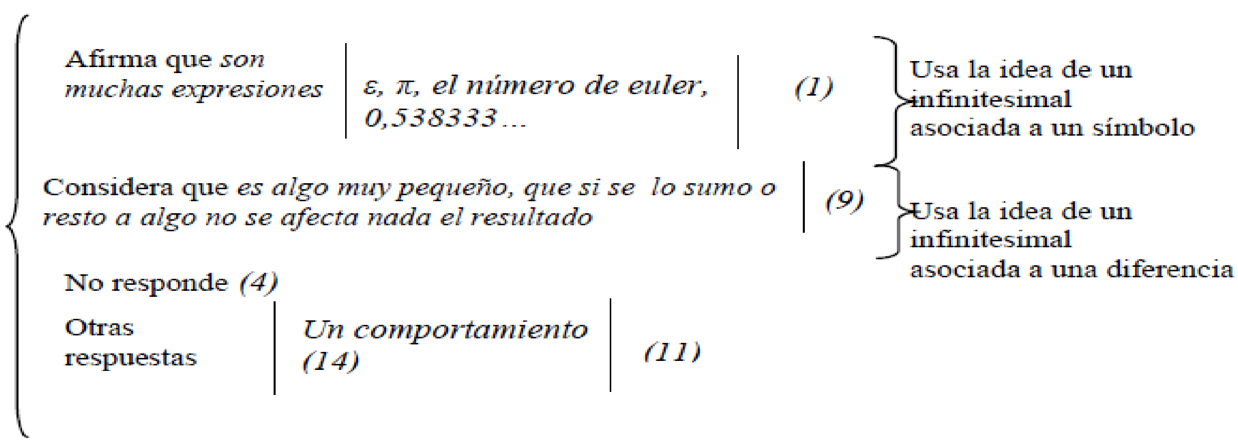


Figura 5b. Red sistémica de la pregunta 8

Clasificación de los Estudiantes según las Ideas Previas Asociadas a la Noción de Infinitesimal

El estudio de los esquemas conceptuales previos asociados a la noción de infinitesimal de los estudiantes investigados, se puede sintetizar (Tabla II) describiendo las tipologías identificadas en las distintas preguntas y situaciones planteadas referidas según los esquemas conceptuales epistemológicos que detalláramos en Valdivé y Garbin (2008). Para ello reinterpretamos las respuestas del CD.

Tabla II
Tipología de los Sujetos Investigados según los Esquemas Conceptuales Previos

C/ ECM[4]	El infinitesimal asociado a una Razón	El infinitesimal asociado a un Incremento	El infinitesimal asociado a una Función	El infinitesimal asociado a una Diferencia	El infinitesimal asociado a un Símbolo	El infinitesimal asociado a un Indivisible
(1)		1b, 3a 3b, 6	5		8a, 8c	
(2)	2	1a, 1b, 3a, 3b, 3c, 5	8a, 8b, 7b, 7a	7a, 8a		8c
(3)	2	3a, 3b, 3c,5	3c, 6, 7 a, 8 c, 8b	8 b, 6		8 a
(4)		3b, 4a, 4b, 4 c, 4d, 5, 6				
(5)		3a, 3b, 5	7 a			8a
(6)	2	1a, 1b, 3a, 5			8 c	8a
(7)	2	1a, 3a, 3b, 5, 6		8 b		8a
(8)		3 a, 8 a	5, 7 a, 8 b	8 c		
(9)		1 b, 5		7 a, 8 a		
(10)		6	5		8 c	
(11)		3 b, 5	7 a			
(12)		3 a, 3b, 4 a, 4 b, 4 c, 4 d, 4 e, 5, 6	7ª			8 a, 8 b, 8 c
(13)	2		5, 7 a			8 a, 8 b, 8 c
(14)		3 b, 6	1 b, 5, 7 a		8 c	
(15)		3b, 3c, 5	8 b, 8 a	5, 6		
(16)		1 a, 1 b, 3b, 3c, 4 a, 4b, 4 c, 4 d, 5, 6	7 a	8 a		8 a

Del resumen de las tipologías de las ideas previas asociadas a la noción de infinitesimal que utilizan los estudiantes, sintetizamos lo siguiente:

(a) Dos alumnos (2, 3) usan cinco ideas diferentes: el infinitesimal asociado a una razón, a un incremento, a una función, a una diferencia y asociado a un indivisible.

(b) Tres estudiantes (6, 7, 16) usan cuatro ideas diferentes: El alumno (6) usa el infinitesimal asociado a razón, asociado a un incremento, a un símbolo y asociado a indivisible. El sujeto (7) lo usa asociado a una razón, a un incremento, a una diferencia y asociado a un indivisible. El estudiante (16) lo usa asociado a un incremento, a una función, a una diferencia y asociado a un indivisible.

(c) Ocho alumnos (1, 5, 8, 10, 12, 13, 4, 15) utilizan tres ideas diferentes. Dos de estos (1,10) lo usan asociado a incremento, a una función y a un símbolo. Los estudiantes (5, 12) lo utilizan asociado a un incremento, a una función y asociado a un indivisible. Otros dos (8, 15) asociado a un incremento, a una función y a una diferencia. El estudiante (13) a una razón, a una función y asociado a un indivisible y el alumno (14) a un incremento, a una función y asociado a un símbolo.

(d) Dos estudiantes usan dos ideas diferentes. El alumno (9) lo utiliza asociado a un incremento y a una diferencia y el alumno (11) asociado a un incremento y a una función.

(e) El estudiante (4) sólo usa la idea de infinitesimal asociado a incremento.

Notamos que 7 estudiantes (3, 5, 6, 7, 12, 13, 16) otorgaron significado de indivisible a la idea de infinitesimal en la pregunta 8a) pero en ninguna de las restantes preguntas del cuestionario pudimos encontrar en ellos ni en ningún otro estudiante esa interpretación.

Observamos también que 15 estudiantes usan la idea de infinitesimal asociado a un incremento. Pensamos que esto se deba a que el tipo de pregunta se relaciona a conceptos vistos en el Cálculo y que fomentan solamente este tipo de idea en cuanto a infinitesimal.

A continuación mostramos la contrastación teórica con algunos ejemplos de los esquemas conceptuales previos de algunos estudiantes y los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de una manera gráfica.

Para interpretar la representación gráfica (ver Figura 6) de la contrastación teórica utilizamos los cuadros de textos con líneas continuas para representar los esquemas conceptuales en sus dos acepciones, y los cuadros de textos en segmento corto para representar los 7 esquemas conceptuales epistemológicos (ECE) de algún matemático. También se utilizan símbolos que permiten interpretar el gráfico, a saber: (1) 7 líneas gruesas que enlazan los 7 ECE; (2) Las llave { que nos permite mostrar las subcategorías de los ECE; (3) Tres líneas curvas gruesas en doble sentido, que muestra el esquema conceptual previo que evoca el estudiante contrastado con el esquema conceptual epistemológico de algún matemático en alguna época histórica y (4) las líneas gruesas en segmento corto que enlazan los tres esquemas conceptuales previos de algunos estudiantes.

CONTRASTACIÓN TEÓRICA: *Reinterpretación de las respuestas de los estudiantes, en función de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción.*

Un propósito de este artículo es mostrar un modo de aproximarnos a los esquemas conceptuales previos asociados a la noción en estudiantes universitarios. El investigador en Didáctica de las Matemáticas debe tener como punto de partida los significados atribuidos a la noción desde su origen y la mejor alternativa es ir a fuentes (primarias, secundarias y terciarias) que muestran la forma de producción del conocimiento.

La necesidad de contrastar el análisis de las producciones de los sujetos que participan en el estudio, con las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción de infinitesimal de los matemáticos más representativos en una época histórica (análisis epistemológico de la noción de infinitesimal), nos induce a pensar que así como la noción en la historia no se desarrolla en forma independiente sino con un entramado de conceptos que hacen uso de ella para su conceptualización como lo es entre otros, el de límite, razón, volumen, áreas, etc., en el esquema conceptual previo de algunos estudiantes también prevalecen ideas, contextos, procedimientos análogos a algunos de los siete esquemas epistemológicos identificados en la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

Se han identificado una variedad de esquemas conceptuales previos asociados a la noción de infinitesimal que los estudiantes universitarios investigados evocan. Esquemas que son semejantes de alguna manera a las ideas que encontramos en la evolución histórica de la noción (ver figura 6).

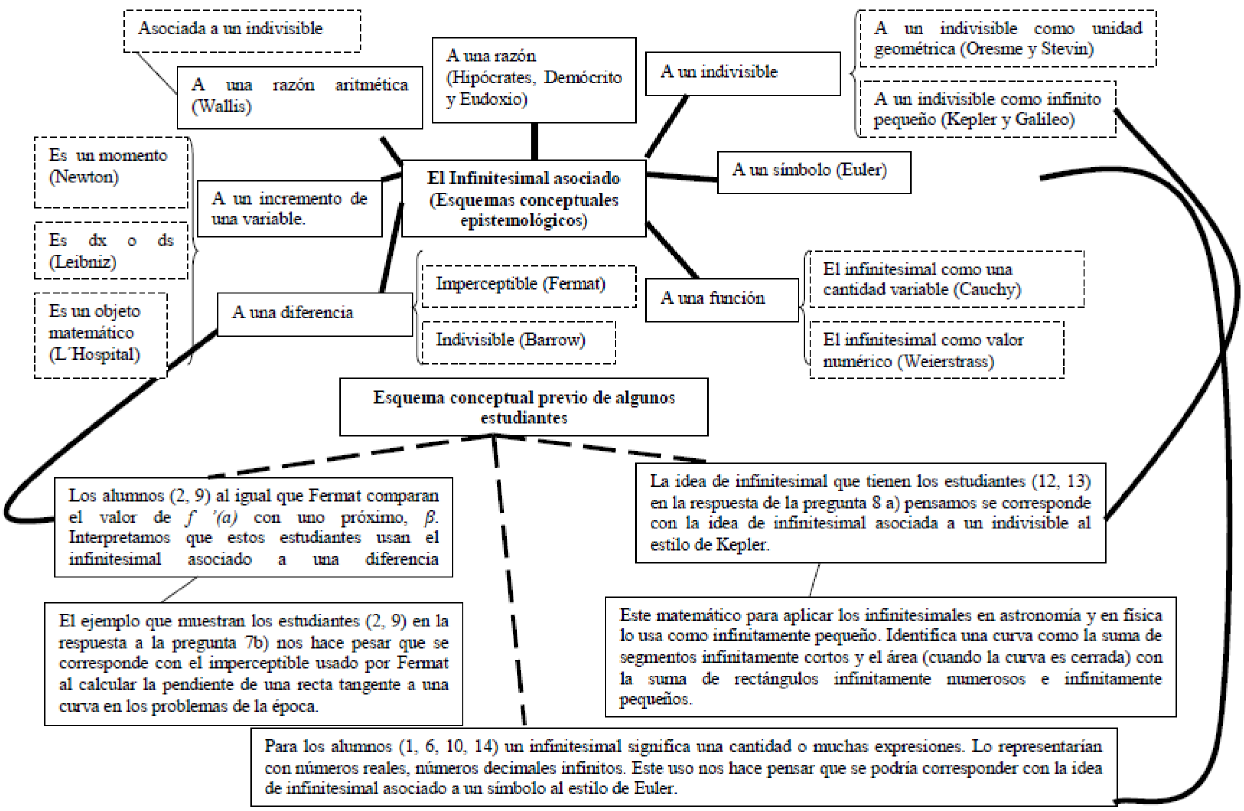


Figura 6. Gráfico de la contrastación teórica

También observamos algunos procedimientos usados por los matemáticos a la hora de calcular área o cuadrar figuras curvilíneas, procedimientos como fragmentar las figuras en regiones, dividir un polígono regular en n lados al estilo de Arquímedes e Hipócrates, inscribir rectángulos y ángulos en ellas, hacer aproximaciones, calcular límite de sucesiones, entre otros.

En síntesis se puede indicar que el esquema conceptual del estudiante antes de iniciar el curso de Análisis Matemático, que hemos llamado esquema conceptual previo, está cargado de ideas previas, representaciones, procedimientos y conceptos asociados a la noción de infinitesimal producto del contacto con problemas y conceptos matemáticos (área del círculo, volumen de un cilindro, velocidad de un cuerpo y límite) que a lo largo de la historia han permitido su evolución (ideas ideosincráticas en palabras de Tall, 1997) así como de la experiencia que han tenido con los conceptos matemáticos que aluden al infinitesimal y que han trabajado a lo largo de la licenciatura.

A Modo de Conclusión

El análisis de las repuestas del cuestionario se observa que los estudiantes antes de estar en contacto con una teoría formal del Análisis Matemático I responden a los problemas y situaciones matemáticas planteadas en función de las ideas previas, percepciones y experiencias que han aprendido a lo largo de la licenciatura. Hemos encontrado los siguientes esquemas conceptuales previos: el infinitesimal asociado a una razón, un incremento, una diferencia, un símbolo, un indivisible y a una función.

Hallamos que algunos estudiantes evocan una variedad de esquemas conceptuales previos asociados a la noción. Esquemas que son semejantes de alguna manera a las ideas que se encuentran en la evolución histórica de la noción.

Los esquemas conceptuales encontrados refieren al infinitesimal asociado a una cantidad variable, a un número real, a un valor numérico de una variable que tiende a cero, un diferencial, una porción de un objeto a estudiar, un momento de tiempo, una distancia muy pequeña, un cambio muy pequeño de una variable, una diferencia muy pequeña entre dos números reales, es $1/n$ cuando $n \rightarrow \infty$, algo insignificante, es épsilon, una cantidad infinitamente pequeña, algo muy pequeño que si se suma o resta a algo no afecta el resultado, algo tan pequeño que se podría aproximar a cero, un comportamiento de una función, una aproximación.

Hemos representado a través de redes sistémicas las ideas, los procedimientos, el contexto y las situaciones que los estudiantes utilizaron para resolver problemas planteados en un cuestionario y que en ciertas ocasiones se corresponden con las ideas, procedimientos, etc., que los matemáticos a lo largo de la historia utilizaron.

Referencias

Azcárate, Carmen. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de alumnos de 2º de BUP, en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilon*, 24, 9-22.

Bliss, Jon., Monk, Michel. y Ogborn, Josep. (1983). Qualitative Data Analysis for Educational Research. Londres: Coom Helm.

Chae, Soo. y Tall, David. (2005). Student´s Concept Images for Period Doublings as Embodied Objets in Chaos Theory. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (volumen 2, pp. 121-132).

Chin, Ed y Tall. David. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. In Nakara, T. & Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 2, pp.177-184).

Chin, Ed y Tall, David. (2001). Developing Formal Mathematical Concepts Over Time. In Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 4, pp. 241-248). Utrecth,The Netherlands.

Cornu, Bernad. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modéles spontanés et modéles propres', Actes du Cinquiéme Colloque du Groupe Internationale PME (pp. 322-326.). Grenoble.

Cornu, Bernard. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques* 4, 236-268.

Cornu, Bernad. (1991). Limits. En David. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (volumen 1, pp. 153-166). Boston/London: Kluwer Academic Prés Dordrecht.

Dreyfus, Tommy. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.), *Mathematics and Cognition*, 113-134. Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, Tommy. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (volumen 1, pp. 3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Garbin, Sabrina. (2000). *Infinito Actual: Inconsistencias e Incoherencias de Estudiantes de 16-17 Años.* Tesis de doctorado, no publicada, Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Garbin, Sabrina. (2005). ¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 8 (2), 169-193.

Garbin, Sabrina y Azcárate, Carmen. (1998). Esquemas conceptuales e incoherencias en relación con el infinito actual. *Educación Matemática,* (12), 5-18.

Garbin, Sabrina y Azcárate, Carmen (2002). Infinito Actual e Inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias,* 20 (1), 87-113.

Gutiérrez, Lucybeth y Valdivé, Carmen. (2012). Una descomposición genética del concepto de derivada. *Gestión y Gerencia,* 6(3), 20-40.

Harel, G; Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectivas. En Gutiérrez, A y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (pp. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Kleiner, Israel. (2001). The Infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 137-174.

Patton. Marcia. (1990). Análisis, interpretation and reporting. In *qualitative evaluation and research methods* (pp. 182-183). London: Sage.

Pinto, Marcia (1998). *Students' understanding of real analysis.* Unpublished Doctoral Thesis, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK.

Pinto, Marcia. y Tall, David. (1999). Students constructions of formal theory: living and extracting meaning. *Proceedings of the 23th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 2, pp. 41-48). Haifa, Israel.

Pinto, Marcia. y Tall, David. (2001). Following students' development in a traditional university classroom, in Marja Van Den Heuvwel-Panhuizen (Eds.), *Proceedings of the 25th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (volumen 4, pp. 57-64). Utrecth, The Netherlands.

Pinto, Marcia y Gray, Ed. (1995). 'Difficulties teaching mathematical analysis to non-specialists'.In L. Meira & D. Carraher, (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (volumen 2, pp. 18-25). Recife, Brazil.

Przenioslo, Malgorzata. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics* 55 (1 y 3), 103-132.

Przenioslo, Malgorzata. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary shoool. *Educational Studies in Mathematics* 60(1), 71-93.

Rodríguez, Gregorio.; Gil, José y García Eduardo. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Robert, Albert. (1982). L´Acquisition de la notion de convergente des suites numériques. Dans l´Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3), 307-341.

Ruiz, Luisa. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral; no publicada, Universidad de Jaen, España.

Sánchez, Juan y Valdivé, Carmen. (2012). El número irracional: Una visión histórico-didáctica. *Premisa* 14(52), 1-17.

Santamaría, José y Valdivé, Carmen. (2007). Esquemas conceptuales asociados a los infinitesimales en el pensamiento de los estudiantes para profesores de matemática. *Ponencia presentada en la 21 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Maracaibo, Venezuela.

Sierpinska, Anna. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

Sierpinska, Anna. (1987a). Obstacles épistémologique relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Sierpinska, Anna. (1987b). Trying to overcome epistemological obstacles relative to limits. In *17 year old Humanities Students Proceedings of the 38th Cieaem's Meeting*, (pp. 183-193). Southampton.

Sierpinska, Anna. (1992). Un understanding the notion of function. In G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept function. Aspect eppistemology and pedagogy.* (pp. 25-58). USA: Mathematical Association of América.

Strauss, A y Corbin, J. (1998). *Basic of qualitatitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory*. London: Sage.

Tall, David. (2005). The transition form embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 1-16). Frazer, Island, Australia.

Tall, David. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 1-16). Bergen, Norway.

Tall, David. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies en Mathematics*, 48 (2 y 3), 200-238.

Tall, David. (1997). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, David. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinkhing. *Proceedings of the 19th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, (pp. 61-75). Recife, Brasil.

Tall, David. (1992). The transition to advanced mathematical thinking functions, limits, infinity, and proof. En Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 495-511). Reston: National Council Of Teachers Of Mathematics, Inc.

Tall, David. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 3-21). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, David. (1989). Concept image, computers, and curriculum change. *For Learning of Mathematics*, 9(3), 37-42.

Tall, David. (1988). Concept image and concept definition. In Jan de Lange, Michiel Doorman (Ed.), *Senior Secondary Mathematics* (pp. 37-41). Utrech.

Tall, David. (1987). Constructing the concept image of tangente. *Proceedings of PME* 11. (volumen 3, pp. 69-75). Montreal.

Tall, David y Vinner, Shlomo. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Valdivé, Carmen y Garbin, Sabrina. (2010). Estudio de la evolución de los esquemas conceptuales previos asociados al infinitesimal: Caso de un estudiante clave. *Educare, Revista de Investigación y Postgrado de la UEPL*, 14(3), 3-31.

Valdivé, Carmen y Garbin, Sabrina (2008). Estudio de los Esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime,* 11(3), 413-450.

Valdivé, Carmen (2008a). Los Infinitesimales: Un punto de vista sistémico. *Educere, Revista Venezolana de Educación* 12 (42), (pp. 523-530). Mérida, Venezuela: Fundep.

Valdivé, Carmen (2008b). *Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de Análisis Matemático I*. Tesis doctoral no publicada, UCLA- UNEXPO-UPEL,Venezuela.

Valdivé, Carmen (2008c). Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la noción de infinitesimal y su evolución en estudiantes de análisis matemático. Tesis doctoral no ublicada. Doctorado Interinstitucional en Educación UCLA-UNEXPO-UPEL.

Valdivé, Carmen. (2006). Una experiencia en investigación-acción técnica: "el paso del infinito potencial al infinito 'como un todo' para comprender la construcción de los conjuntos infinitos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 19, pp. 544-550). México: CLAME,

Valdivé, Carmen. (2005). *Concepciones de los estudiantes del Decanato de Administración y Contaduría acerca de la noción de infinito.* Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Venezuela.

Valdivé; Carmen y Gabin, Sabrina. (2007). Esquemas conceptuales epistemológicos: Hacia el diseño de un cuestionario. *Ponencia presentada en el XI SEIEM*. Tenerife.

Vinner, Shlomo. (1995). The fictitious empire of mathematics education and behavior of its real subjects. In *Mathematics and Music the Spheres,* Mathematics Education Research Centre (pp. 1-18). Warwick University.

Vinner, Shlomo. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-80). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, Shlomo. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *Internacional Journal of Mathematical in Sciencie and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, Shlomo. (1982). Conflicts between definitions and intuitions. *Proceedings of the Delta Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 6, pp. 24-28). Antwerp.

Vinner, Shlomo y Dreyfus, Tommy. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

Vinner, Shlomo y Hershkowitz, Rita. (1980). Concepts images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley: University of California, Hall of Sciencie.

Watson, Anna y Tall, David. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volumen 4, pp. 369-376). Norwich, UK.

Watson, Anna, Spyrou, P. y Tall, David. (2004). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 1-24.

Las autoras
Carmen Valdivé
Doctora en Educación (UCLA-UNEXPO-UPEL)
Profesora Titular de la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado"
Adjunta al centro de Investigación del Decanato de Administración y Contaduría
Línea de Investigación: PMA y Didáctica del Cálculo y Análisis.
Email: carmenv@ucla.edu.ve / valder16@yahoo.com

Sabrina Garbin
Doctora en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (Universidad Autónoma de Barcelona)
Profesora Titular del Dpto. Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas de la Universidad "Simón Bolívar"
Coordinadora de la Especialización en Didáctica de la Matemática de la USB.
Línea de Investigación: PMA y Didáctica del Cálculo y Análisis.
Email: sgarbin@usb.ve