Universidad de Nariño
IX Coloquio Regional de Matemáticas

Interpretaciones de las definiciones de razón y proporción[1]

Edgar Alberto Guacaneme Suárez[2]

Introducción

Una aproximación a documentos de la Historia de la Matemáticas que versan sobre la *razón* y la *proporción* permiten esclarecer, entre otros aspectos, algunos momentos y hechos fundamentales de su desarrollo. En este sentido, al menos en la tradición matemática occidental, se han identificado varios hitos, dentro de los cuales sobresale la época dorada de los griegos (representada fundamentalmente por Eudoxio, Euclides y Apolonio). De aquella época, y en particular de la producción matemática de Euclides, hemos seleccionado una de las obras matemáticas más importantes para las matemáticas, en general, y para la teoría de la proporción, en particular: los *Elementos*[3]. Si bien los Libros V, VI, VII y X, de esta obra, contienen información relativa a las proporciones, desde nuestra perspectiva ha merecido especial atención el Libro V. De éste nos concentramos en las dieciocho definiciones que anteceden a las veinticinco proposiciones que constituyen dicho Libro, centrando nuestra atención en algunas de dichas definiciones.

Por otra parte, y utilizado hoy a manera de contraste con lo identificado en los documentos históricos, hemos realizado una mirada puntual al tratamiento que de la razón y la proporción hacen algunos libros de texto utilizados al final del siglo XX en Colombia en las aulas de clase (ver el capítulo 4 de la tesis de Guacaneme (2001) y Guacaneme (2002)).

Esperamos que esta doble aproximación permita ampliar la gama de opciones de interpretación de elementos claves de la teoría de la proporción y con ello ganar conciencia del conocimiento matemático que respaldaría los procesos educativos en torno a esta teoría.

---

[1] Documento preparado como soporte al Cursillo con el mismo nombre, realizado en el marco del **IX Coloquio Regional de Matemáticas** en la Universidad de Nariño, del 6 al 8 de marzo de 2008.

[2] Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación (Sede Universidad del Valle) y profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

[3] Como los historiadores reconocen varias traducciones de los *Elementos* procedentes de diversas versiones, aclaramos que se asumirá la versión de Puertas (1994), la cual procede de la edición de J.L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis Opera omnia*, vols. I-IV, Leipzig, 1883-1886.

Las definiciones del Libro V de los *Elementos*[4]

El Libro V contiene las siguientes definiciones, las cuales han sido discutidas minuciosamente por los historiadores.

1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
4. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.
5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.
6. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.
7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.
8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.
9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda.
10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.
11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.
12. Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.
13. Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.
14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola (magnitud) en relación con el propio consecuente.

[4] Tomado de (Puertas, 1994).

15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.
16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.
17. Una razón *por igualdad* se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.
18. Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuentes es a alguna otra (magnitud) —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra (magnitud) es al antecedente.

Análisis de algunas definiciones del Libro V

De estas definiciones identificamos al menos tres definiciones nominales, a saber: la definición 3 (nomina la razón como una relación entre dos magnitudes), la definición 6 (nomina magnitudes proporcionales o proporción a las que satisfacen la condición de la definición 5) y la definición 11 (nomina magnitudes correspondientes a lo que hoy llamaríamos parejas de antecedentes y parejas de consecuentes[5]). Las quince definiciones restantes establecen condiciones y catorce de éstas, además dan nombres a los objetos implicados; la definición 8 sólo define la condición pero no nomina algo. De estas definiciones el grupo de la 12 a la 16 alude a transformaciones en las razones sin que su enunciado implique, al menos de manera inmediata o directa, la aplicación a una proporción; a este respecto, Puertas (1994, p. 15) sostiene que estas definiciones “Euclides las aplica a razones cuando describirían mejor proporciones, tal vez porque, al referirlas a proporciones, parecería que asume algo que todavía no se ha probado”.

Atendiendo la opinión de los historiadores, quienes coinciden en asignar un lugar central a la paradigmática definición 5 (proporción), y junto con ella a las definiciones 3 (razón) y 7 (desproporción), recapitularemos y discutiremos algunos de sus planteamientos.[6]

---

[5] En esta definición aparece por primera vez la mención a los términos “antecedente” y “consecuente” sin una significación explícita en el contenido anterior; creemos que la significación surge de manera relativamente natural cuando se atiende al orden explícito de referencia a las magnitudes de una proporción (*i.e.*, primera, segunda, tercera, cuarta) implicado desde la definición 5, y de manera mucho más obvia, cuando se incorpora una notación como “a:b” pues allí se observa que a antecede a b.

[6] Fine (1917, p. 73) sostiene que las definiciones significativas del Libro V son de la 3 a la 7. Antes hicimos una consideración acerca del carácter nominal de la definición 6 y frente a la definición 4 podemos señalar, brevemente, que desde nuestra perspectiva ésta impone la condición de que para poder establecer una razón entre dos magnitudes, éstas deben ser arquimedianas, condición que no satisfacen los ángulos euclidianos,

Hay un cierto consenso en que la definición 3, en sí misma, es una definición general y vaga, y desempeña un papel secundario —y en cierto sentido innecesario— en la teoría; por ejemplo, Hill (1928, p. 38) expresa que “El primer señalamiento que habría que hacer respecto de las definiciones es la ausencia de una definición útil de razón, por ello es imposible hacer cualquier uso de la tercera definición de Euclides”. También hay un consenso en que esta definición es complementada por la definición 4 y adquiere un carácter específico en la medida en que interactúa con la definición 5; al respecto, por ejemplo, Fine (1917, p. 73) establece que “una noción muy definida de razón está implicada en la definición de proporción”.

La existencia de estos consensos contrasta con la existencia de diversas interpretaciones que hacen los historiadores sobre las ideas de razón y proporción, en conjunto. En suma, tales interpretaciones configuran una gama de posibilidades que incluyen concebir la razón (y ocasionalmente la proporción) como —o relacionada con—: (i) una cantidad, adicional a los números y las magnitudes, (ii) una comparación o relación binaria de segundo orden, (iii) un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes, (iv) un número real.[7]

Para Grattan-Guinness (1996), en la obra euclidiana existen tres tipos distintos de cantidades, a saber: los números, las magnitudes y las razones. Nos parece que en esencia su argumento se centra en el hecho de que las razones se pueden comparar para establecer si están *en la misma razón*[8], o si una *es mayor* o *es menor* que otra, de manera análoga a como se hace con los números y las magnitudes. En oposición, Corry (1994) ha afirmado que la razón no puede concebirse como una cantidad en tanto que la idea de cantidad griega no la admite; de hecho afirma que “La razón, a diferencia del número y de la magnitud, *no mide nada ni es cantidad*” (p.10). El argumento, coincidencialmente, es similar al que emplea su contradictor, pues también se refiere a que la comparación de dos razones no permite establecer si éstas son *iguales* o *desiguales*, sino para establecer la *identidad* o falta de ella; como parte de su argumentación cita el siguiente pasaje de las *Categorías* (VI, 6a) de Aristóteles, para reforzar la idea de que la condición de igualdad o desigualdad sólo se aplica a las cantidades:

> “Lo que realmente es peculiar para las cantidades es que nosotros las comparamos o contrastamos en términos o sobre los fundamentos de igualdad. Predicamos los términos ‘igual’ o ‘desigual’ de todas las cantidades mencionadas.”

---

observación esta última que no hemos encontrado en ninguno de los documentos históricos estudiados y que se sustenta en el hecho de que para Euclides no puede haber un ángulo mayor o igual a dos rectos.

[7] Al margen de estas interpretaciones con referentes históricos, en los capítulos 3 y 4 de la tesis de Guacaneme (2001) se encuentran sendos análisis de las ideas de razón y proporción en teorías matemáticas y textos escolares de matemáticas. Igualmente, en Guacaneme (2002) se encuentra una descripción del tratamiento que de las razones, proporciones y proporcionalidad se realiza en algunos textos escolares.

[8] Grattan-Guinness (1996, p. 361), si bien se reconoce una igualdad aplicable a los números y a las magnitudes, sostiene que Euclides nunca dice que las razones sean *iguales* entre sí, solamente que están *en la misma razón*, o que una razón *es como* otra. Éste es uno de los tres rasgos de los *Elementos* que Grattan-Guinness utiliza en su argumentación en contra de una lectura de la obra en términos de álgebra geométrica.

Corry (1994, p. 5) establece que “La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades” y luego (p. 10) señala que “La razón entre dos cantidades del mismo tipo (bien sean dos números o dos magnitudes homogéneas), permite compararlas aún siendo desiguales”. A partir de ello se puede colegir que la proporción es asumida como una comparación entre dos comparaciones. Por su parte, Grattan-Guinness (1996, pp. 367-368) en la octava Sección, *Razones de Euclides ¿un fondo musical?*, considera que las razones pueden estar en una estrecha conexión con las relaciones entre notas musicales —o quizá sea mejor decir entre intervalos— en tanto que la proporción sería una manera de afirmar que dos de tales relaciones son la misma, sin requerir que los términos de las razones sean iguales; así, la relación entre las notas Fa sostenido y La [F#-A] puede reconocerse como una tercera menor, que es la misma relación, o el mismo intervalo, que hay entre Si y Re [B-D][9]; desde esta perspectiva la proporción sería una relación entre dos relaciones.

La razón relacionada con un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes es una propuesta que encontramos en el trabajo de Fine (1917), donde establece que:

> “Ya que según la Definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: Si los múltiplos A, 2A, 3A, … y B, 2B, 3B, … son dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X, … y Y, 2Y, 3Y, …, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de Y. De ahí que “la identidad” de las razones A:B y X:Y significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón A:B en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B.” (p. 73).

Esta interpretación se puede resumir en una correspondencia entre dos sucesiones ordenadas de múltiplos, cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de una razón. Fine (1917, pp. 74-75) argumenta a favor de esta interpretación al advertir cómo ésta se pone en juego en varios de los teoremas (proposiciones 7 a 10, 11, 13, 16, 18, 22, 24). La idea propuesta por Fine establece la necesidad de que las dos magnitudes de cada razón sean homogéneas, pues de no ser así, no se podría armar una sucesión con los múltiplos de éstas. Igualmente, tal idea no impide que las magnitudes de las dos razones tengan que ser todas del mismo tipo o la misma naturaleza. Además, implica una manera poco usual de interpretar la definición 5, en tanto que no toma parejas de múltiplos sino de secuencias. Además, Fine sostiene que para una teoría general de la proporción no se requiere una definición de razón, en singular, aunque sí se exigen sendas definiciones de igualdad y

[9] Casualmente, luego de la lectura del Capítulo 4 *The role of the theory of proportions in Nicomachus, Theon, and Domninus*, (Klein, 1968, pp. 26-36) —y antes de la lectura de (Grattan-Guinness, 1996)— habíamos escrito:

> “A partir del documento de Klein parece razonable explorar la expresión musical que da origen a la teoría de las proporciones, pues éste puede constituir un ámbito sugerente para el trabajo escolar y con los profesores con las proporciones, además que permitiría esclarecer una idea de razón “práctica” o “sensible” y contrastarla con una idea de razón “teórica” o “abstracta”. (Quizá se pueda afirmar que la relación entre las notas mi y do, es la misma que entre las notas si y sol).”

desigualdad entre razones, las cuales son suministradas en las definiciones 5 y 7. Bajo esta última interpretación, la razón se despoja de todo alo referido a la cantidad; en efecto, no es posible aquí, pensar en que una cantidad pueda estar asociada a una secuencia ordenada de equimúltiplos de dos magnitudes, o en otras palabras, que no se puede pensar en una entidad (*v.g.*, un número) que se asocie o ponga en correspondencia con una sucesión.

La interpretación de la teoría de la proporción del Libro V como una manifestación de la teoría del número real ha sido objeto de opinión y estudio de varios historiadores. Recapitulando las ideas de Corry (1994, pp. 7-13) podemos señalar que algunos historiadores de las matemáticas han argumentado a favor de la equivalencia entre la teoría de proporciones de Euclides y la de cortaduras de Dedekind. Uno de los argumentos consiste en considerar una razón o cociente de dos magnitudes homogéneas y asociarlo a una cortadura, para luego considerar dos cocientes de magnitudes que resulten iguales (proporcionales) y mostrar que las cortaduras asociadas son equivalentes. Otros historiadores de las matemáticas rechazan tal equivalencia bajo la idea de que la interpretación de los textos griegos debe hacerse en el marco de las restricciones en que estos fueron producidos. Una de tales restricciones se refiere al lenguaje; en este sentido no se acepta la traducción o formulación simbólica de las definiciones, ni las interpretaciones y deducciones que a partir de ellas se hacen. Otra de las restricciones obedece a la radical diferencia entre la idea de número de la obra griega y la del número del siglo XIX[10]. Atendiendo a lo anterior, se entiende que no pueda reconocerse en la teoría de las proporciones una teoría de números.

En la misma dirección, Fine (1917, pp. 75-76) discute la relación entre los irracionales y las razones de inconmensurables, afirmando que el argumento expresado por algunos historiadores a favor de reconocer que en efecto se puede asociar una razón y una pareja de números enteros a cada cortadura de Dedekind —y que con esto se podría entender que Euclides ya poseía una teoría del número real y, en consecuencia, Dedekind no habría *creado* el sistema de los números reales— está apoyado en un simbolismo algebraico y en unas nociones de número y de razón que no se corresponden con las ideas euclidianas respectivas.

Estas posturas contrastan con afirmaciones de estudiosos de la teoría de la proporción del Libro V. Por ejemplo, en Zubieta (1991) encontramos las siguientes oraciones: “Esta nota presenta la definición de número real atribuida a Dedekind como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxio, tal como la enuncia Euclides al principio de su libro V”(p. 477) y “Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es la misma que la presentada por Eudoxio” (p. 478). También (Knorr, 1992) señala que “Como es bien sabido, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de “cortes” en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales” (p. 3). De manera análoga Hill en al menos dos de sus documentos sobre los Libros V y VI de los *Elementos* señaló que “La razón de una magnitud *A* a otra

[10] La idea griega reconoce a los números y las magnitudes como cantidades *no abstractas* asociadas respectivamente al contar y medir, en tanto que la idea moderna se refiere a la cantidad como abstracta y general.

magnitud *B de la misma clase* es un número real, racional o irracional, determinado de la manera como se explican en lo que sigue. Éste se denota por el símbolo $A{:}B$” (Hill, 1912, p. 360) y que “Estos seis resultados suministran una regla para determinar si la razón ($A{:}B$) es mayor que, o igual a, o menor que, *cualquier* número racional; consecuentemente, en concordancia con la definición de Dedekind, la razón ($A{:}B$) es considerada como un número.” (Hill, 1928, p. 44).

Antes de pasar a los comentarios sobre la definición 7, nos parece interesante destacar que otro elemento interesante en la discusión de la definición 5 lo constituye su expresión simbólica, pues existen varias versiones simbólicas de traducción de la definición 5. Por ejemplo Corry (1994, p. 3) propone la siguiente:

> “$a{:}b=c{:}d$, si para todo par de enteros m, n, se tiene $ma>nc$ (o $ma<nc$, o $ma=nc$) si y solo si $mb>nd$ (o $mb<nd$, o $mb=nd$), respectivamente)”.

Entre tanto, Puertas (1994, p. 12) reseña dos versiones, no equivalentes desde el punto de vista lógico; una que implica una *disyunción de conjunciones*, a saber:

> “siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a{:}b{::}c{:}d$ si y sólo si: o (($ma>nb$) y ($mc>nd$)) o (($ma=nb$) y ($mc=nd$)) o (($ma<nb$) y ($mc<nd$)).”

y otra que es una *conjunción de condiciones (implicaciones)*, la cual es la forma lógica de su aplicación en la proposición 11, a saber:

> “siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a{:}b{::}c{:}d$ si y sólo si: (si $ma>nb$, entonces $mc>nd$) y (si $ma=nb$, entonces $mc=nd$) y (si $ma<nb$, entonces $mc<nd$).”

A través de una notación particular de la reunión de los signos “=”, “<” y “>”, Filep (2003, p. 1) incorpora una forma simbólica equivalente a la citada inmediatamente antes, a saber:

> “si a, b, c, d son magnitudes (de la misma clase), entonces $a{:}b=c{:}d$ si y sólo si para cualesquiera enteros positivos (“números” en el uso griego) n, m, $ma \gtreqless nb \Rightarrow mc \gtreqless nd$.”

Con respecto a lo planteado por los historiadores sobre la definición 7, queremos resaltar que (Knorr, 1992, p. 8) establece que “Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que “no tener la misma razón” sea equivalente a “tener una razón mayor o menor razón”. Pero, de hecho, algunas veces supone esta afirmación (por ejemplo, en el libro V, proposiciones 9 y 10), por lo cual es preciso pensar que lo entendían tanto él como los geómetras que le precedieron”. Esta aserción es importante para entender que hay un supuesto tácito en la teoría que provee a Euclides de una herramienta potente para la demostración de la proporcionalidad o desproporcionalidad de cuatro magnitudes; en otras palabras, si se supone que tener una razón mayor que otra equivale a afirmar que no es cierto que exista proporción entre tales magnitudes, se dispone de una herramienta para demostrar por reducción al absurdo.

También, nos llama la atención la manera en que Fine (1917, p. 73) parafrasea la definición 7 (“Si (en la notación de la Definición 5) se pueden encontrar m y n tal que mA>nB pero

mX$\leq n$Y, entonces se dice que A tiene una mayor razón a B que la que X tiene a Y), pues es una manera alterna de mirar la comparación entre las razones.

La razón y la proporción en algunos libros de texto

Para realizar este análisis hemos seleccionado cuatro textos escolares de matemáticas, correspondientes al grado séptimo de la educación básica, a saber: *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7* (Londoño & Bedoya, 1988), *Dimensión Matemática 7* (Londoño, Guarín, & Bedoya, 1993), *Procesos Matemáticos 7* (Departamento Editorial de Santillana S.A, 1995; Departamento Editorial de Santillana S.A., 1995) y *Logros Matemáticos. Séptimo grado* (Contreras, Lizcano, García, Cano, & Flechas, 1997).

El tratamiento de la razón

Reportemos inicialmente las definiciones de razón presentadas explícitamente en los textos.

> "Se llama **razón** entre dos números a y b (con $b\neq 0$), al cociente de la división de a por b." Londoño y Bedoya, 1988, p. 229

> "Se llama **razón** entre dos números a y b (con $b\neq 0$), al cociente de la división de a por b. [...] Adicionalmente, puede entenderse la **razón** como un operador multiplicativo que al ser aplicado sobre el consecuente, produce el antecedente. [...] Una **razón** es una comparación entre dos magnitudes: toda fracción es una razón, pero no toda razón es una fracción." Londoño y otros, 1993, pp. 236–237

> "Una **razón** entre dos números racionales a y b, $b\neq 0$, es el cociente indicado entre a y b." Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100

> "Se llama **razón** de dos números a la división indicada entre ellos." Contreras y otros, 1997, p. 251

El análisis de estas definiciones, así como del tratamiento global de la noción de razón, nos conduce a la identificación de al menos cuatro hechos relevantes.

La asociación de la idea de división con la razón

Resaltemos, en primer lugar, un elemento común a las definiciones reportadas: la idea de división está ligada a la de razón. Sin embargo, dos de los textos ("Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7" y "Dimensión Matemática 7") referencian la razón como el cociente de la división, es decir, el resultado de la división; en tanto que los otros dos ("Procesos Matemáticos 7"y "Logros Matemáticos. Séptimo grado") la reportan como la división indicada, es decir, la división sin realizar. Estas dos miradas son significativamente diferentes; evidentemente, la razón —en tanto división realizada o como operador— es un elemento de un conjunto numérico, es decir un número que se establecería precisando los dos conjuntos donde dividendo (antecedente) y divisor (consecuente) tomen valores, respectivamente; mientras que la razón —en tanto división indicada— se puede considerar como un elemento de un producto cartesiano de los conjuntos donde dividendo y divisor tomen respectivamente valores.

Ahora bien, en cada uno de los cuatro textos encontramos inconsistencias con la respectiva definición propuesta. Veamos: En el texto "Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7" se presentan algunos ejemplos previos a la definición, a partir de los cuales se colige ésta; en aquellos se mencionan dos "números" y no precisamente uno, como es de esperarse; reseñémoslos: "La razón entre el número de personas que votan en Colombia es 6 a 15", "La razón del número de niños enfermos entre el número de niños es de 25 a 70", "La razón de mujeres al número de varones en el colegio es de 3 a 5", "La razón entre el número de profesores y estudiantes en el colegio es de 1 a 50" (Londoño y Bedoya, 1988, p. 229). Igualmente el primer ejemplo, posterior a la definición, involucra dos números, pues aunque en la afirmación "el rendimiento del automóvil es 30 kilómetros por galón de gasolina" (*Ibid*, p. 230) sólo aparece explícitamente el número 'treinta', implícitamente aparece el número 'uno', para referirse a 'un galón de gasolina'; en este sentido, el rendimiento no es el cociente de la división, sino un cociente indicado, lo cual riñe con la definición dada en el texto.

También en el texto "Dimensión Matemática 7" se presentan algunos ejemplos previos a la definición, en los cuales se mencionan dos "números" y no uno; reseñémoslos: "La razón entre el número de personas que votan en el país es 6 a 13", "La razón del número de zurdos al número de personas interrogadas es 4 a 100", "La razón de mujeres universitarias al número de universitarios es 26 a 100" (Londoño y otros, 1993, p. 236). Igualmente el primer ejemplo, posterior a la definición, involucra dos números, dado que el resultado "la planta tiene un rendimiento de 20 horas de trabajo por galón de gasolina" (*Ibid*, p. 237) si bien explicita el número 'veinte', deja implícito el número 'uno', para referirse a 'un galón de gasolina'; en este sentido, el rendimiento no es el cociente de la división, sino un cociente indicado, lo cual de igual forma riñe con la definición dada en el texto.

Si bien en el texto "Procesos Matemáticos 7" el ejemplo que aparece en el apartado que se refiere a la idea de razón (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100) involucra dos números, más adelante, en el apartado que aborda el estudio de las magnitudes directamente correlacionadas, aparece la interpretación de la razón como un número, lo cual se opone a la definición planteada en éste. En efecto, los autores afirman que "Dos magnitudes que están directamente correlacionadas no aumentan en la misma razón" (*Ibid,* p. 103), e ilustran esta afirmación así: "Por ejemplo, si L es la magnitud longitud del lado del cuadrado y A la magnitud área del mismo cuadrado, entonces a mayor lado corresponde mayor área, pero a doble lado no corresponde doble área"(*Ibid,* p. 103); la palabra 'doble' utilizada en el ejemplo significa el número 'dos' y se refiere a la razón entre dos lados —o entre dos áreas— , lo cual rivaliza con la idea planteada en la definición de razón.

En el caso del texto "Logros Matemáticos. Séptimo grado" la inconsistencia se encuentra, entre otras, en dos de los tres ejemplos que suceden a la definición. Ésta se identifica en las expresiones: "la razón entre el perímetro y el lado es $\frac{9}{3}$ o 3, lo cual significa que el perímetro es tres veces el lado" y "la razón entre el perímetro del cuadrado de la figura 2 y su lado es $\frac{10}{2.5}$, o 4, lo cual significa que el perímetro es cuatro veces el lado" (Contreras y otros, 1997, p. 252). Los números 'tres' y 'cuatro' están representando razones, pero no son cocientes indicados como se indica en la definición.

Falta de precisión o explicitación del conjunto de referencia

En segundo lugar, advertimos que no siempre es explícito el conjunto al cual pertenecen los números implicados en la razón. Sólo en uno de los cuatro casos ("Procesos Matemáticos 7") se establece explícitamente el conjunto de los racionales, como conjunto al cual pertenecen antecedente y consecuente, excluyendo para este último el valor de cero; en otro de los textos ("Dimensión Matemática 7"), al intentar establecer una relación entre las fracciones y las razones, se presenta implícitamente la pertenencia al conjunto de los racionales de antecedente y consecuente. Adicionalmente, señalamos que en tres de los cuatro textos se excluye explícitamente la posibilidad de razones con consecuente cero, mientras que en el otro la exclusión es implícita. Esta exclusión parece justificarse en la asociación de la razón con la división; en efecto no sería posible considerar una razón como cociente, si el consecuente es cero, pues no existiría tal cociente.

A pesar de los esfuerzos de precisar los conjuntos a los que pertenecen antecedente y consecuente, un lector puede llegar a inferir que las razones están formadas casi exclusivamente por números enteros positivos. Una inferencia semejante se logra al estudiar las situaciones presentadas en los textos (ejemplos, ejercicios, problemas), las cuales vinculan prioritariamente números enteros positivos y —excepcionalmente— números racionales positivos; dejando así de lado el estudio de situaciones en los que se vinculen números negativos.

En el texto "Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7" identificamos en el apartado de estudio de las razones y las proporciones, algunos pocos ejercicios, una explicación y no más de tres ejemplos, en donde se utiliza un entero negativo o un racional como antecedente o como consecuente. Sin embargo, salvo por dos tablas numéricas vinculadas a sendos ejercicios, no encontramos situación alguna que implicara enteros negativos o racionales en el estudio de la variación proporcional; igualmente salvo tres situaciones particulares que vinculaban valores decimales o racionales positivos, las situaciones utilizadas en el apartado de aplicaciones de la proporcionalidad, utilizan razones compuestas por enteros positivos. Los otros tres textos exhiben una situación bastante semejante a la descrita antes, es decir contienen una gran cantidad de situaciones —por no decir la mayoría de situaciones— con números enteros positivos.

Ahora bien, a pesar de la falta de precisión acerca del conjunto al cual pertenecen los números implicados en la razón y la insistencia en los números enteros positivos, en las definiciones es muy claro que la razón involucra dos números y que excepto la frase incluida en la tercera definición del texto "Dimensión Matemática 7", ninguna de las otras definiciones considera la posibilidad de tener razones entre magnitudes, o razones entre medidas de magnitudes. Esto contrasta con lo identificado en el análisis de las definiciones implícitas acerca de la razón —contenidas en los textos a través de los ejemplos y los ejercicios—, esto es: en los textos se utilizan razones que no corresponden a divisiones entre números. Algunas de éstas se presentan como divisiones, indicadas o realizadas, entre medidas de magnitudes —no homogéneas— que se interpretan como nuevas magnitudes.[11] Otras razones se presentan como divisiones entre magnitudes —homogéneas— que se interpretan o bien como un número o como una magnitud.

De aquellas razones —de magnitudes no homogéneas— que representan nuevas magnitudes, los textos presentan, por ejemplo:

- el rendimiento de un automóvil, asumido como la razón entre la distancia recorrida y la cantidad de combustible consumido (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230), (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100);
- la densidad de población, asumida como la razón entre el número de habitantes y el área que habitan (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230), (Londoño y otros, 1993, p. 238);
- la velocidad, considerada como la razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado (Londoño y Bedoya, 1988, p. 243), (Londoño y otros, 1993, p. 246);
- el salario, definido como la razón del dinero devengado en un determinado tiempo (Londoño y Bedoya, 1988, p. 250); y,
- la densidad, asumida como la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo (Londoño y otros, 1993, p. 266).

De aquellas razones —de magnitudes homogéneas— que representan nuevas magnitudes, los textos presentan, por ejemplo:

- la morbilidad, considerada como la razón del número de enfermos entre el número de habitantes (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230), (Londoño y otros, 1993, p. 237); y,
- la escala, asumida como la razón entre la longitud en el dibujo y la longitud en el terreno (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230), (Londoño y otros, 1993, p. 238).

De aquellas razones —de magnitudes homogéneas— que representan un número, los textos presentan, por ejemplo:

- la razón entre dos longitudes (Londoño y Bedoya, 1988, p. 237), (Londoño y otros, 1993, pp. 246, 253), (Contreras y otros, 1997, pp. 251, 252, 253, 257, 261, 267);
- la razón entre dos precios de un artículo en dos momentos diferentes (Londoño y Bedoya, 1988, p. 274), (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 114); y,
- la razón entre los pesos de dos cantidades diferentes de un producto (Londoño y Bedoya, 1988, p. 273), (Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 128).

[11] En el lenguaje de Schwartz (1998) a éstas razones de les describe como cantidades intensivas.

El hecho de que los autores utilicen, sin definir explícitamente, razones que no corresponden a divisiones entre números, es muy importante, pues con este tipo de razones se desarrolla la mayor parte del trabajo de la proporcionalidad. En otras palabras, se utiliza un concepto de razón no definido y —en cierta medida— se define un concepto no muy utilizado.

Falta de precisión acerca del tipo de magnitudes involucradas en las razones

En tercer lugar, si bien los textos trabajan implícitamente con razones entre magnitudes, aunque en las definiciones han planteado que éstas se establecen entre números, no contienen alusión alguna al tipo de magnitudes involucradas en la razón. No es nada difícil identificar que este no es un hecho relevante para los autores de los textos, ya que en un mismo texto aparecen razones entre dos magnitudes discretas, entre dos magnitudes continuas, y —por supuesto— se da el caso también de razones configuradas por una magnitud discreta y una continua, o viceversa. Igualmente, encontramos prioritariamente magnitudes absolutas.

Este hecho, aparentemente poco considerable para los autores, es de suma importancia tanto para la coherencia del discurso matemático contenido en los textos, como para las ideas que a través de ellos se transmite. Como un ejemplo de esta aserción podemos citar que en el texto "Procesos Matemáticos 7" se plantea una pregunta de selección múltiple en la cual hay que identificar la gráfica de una correlación directa y la opción correcta muestra una semirecta en el primer cuadrante de vértice en el origen de coordenadas (p. 109); previa a esta pregunta sólo se han presentado gráficas que involucran magnitudes absolutas y, consecuentemente, gráficas en el primer cuadrante. Consideramos que este tipo de información genera la idea errónea de que la proporcionalidad directa sólo se podría representar gráficamente a través de semirectas de pendiente positiva. También podemos citar, del mismo texto, cómo se traza una curva continua para representar gráficamente la relación de proporcionalidad inversa entre el número de canecas (magnitud absoluta discreta) y la cantidad de litros que representa la capacidad de éstas (magnitud absoluta contínua) (p. 127); igualmente podemos citar el caso de la 'recta' utilizada en el texto "Logros Matemáticos. Séptimo grado" para representar la relación ente el número de cuadernos y el costo de los mismos (p. 260), o las curvas continuas que relacionan dos magnitudes discretas en el texto "Matemáticas Mc–Graw Hill" (pp. 118, 134). Esta situación pone al descubierto la ausencia de una seria reflexión sobre las limitaciones y/o restricciones que impone el tipo de magnitudes implicadas en la representación gráfica, conduciendo probablemente a la identificación errónea de la continuidad como característica implícita e inherente a las variaciones proporcionales.

Variedad en las notaciones empleadas

Finalmente, y en cuarto lugar, queremos presentar algunas observaciones con respecto al tipo de notación que se utiliza para el concepto de razón. En todos los cuatro textos se plantea explícitamente —cuando se introduce la notación (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230; Londoño y Bedoya, 1993, p. 236; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100; Contreras y otros, 1997, p. 251)— el uso de una simbología que implica dos números y una línea o vínculo (*v.g.*, $\frac{6}{15}$), o dos números y dos puntos (*v.g.*, 6:15). Ahora bien, cuando la simbología implica dos números y un vínculo, es válido afirmar que desde el punto de vista de la notación no se establece diferencia alguna entre un racional y una razón. Esta afirmación se soporta en la conjugación de dos hechos; de un lado, la disposición de los tres elementos (números y vínculo) es la misma utilizada para el trabajo con números fraccionarios o con racionales, de otro lado, la mayoría de los números utilizados en las razones son enteros. La notación que implica el uso de los dos puntos sólo se enuncia como una posible notación, pero salvo una aparición esporádica, no logramos identificar que se usara posteriormente en ninguno de los textos; de lo cual se sigue que de las notaciones la prioritariamente utilizada es aquella que implica el uso de dos números y el vínculo entre ellos.

Sin embargo, en los cuatro textos encontramos el uso de diversas notaciones que no se reportan explícitamente. Una de ellas, ampliamente utilizada es la que presenta dos medidas de cantidad de magnitud separadas por un vínculo (*v.g.*, $\frac{180\ km}{6\ galones}$) (ver Londoño y Bedoya, 1988, pp. 230, 244, 246; Londoño y Bedoya, 1993, pp. 237, 259, 260, 277, 278, 281; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, pp. 100, 132; Contreras y otros, 1997, p. 267). Igualmente, e implícitamente equivalente a la anterior, se utiliza una notación que vincula un número y dos 'unidades' de magnitudes (*v.g.*, $30\frac{km}{galón}$) (ver Londoño y Bedoya, 1988, pp. 230, 251; Londoño y Bedoya, 1993, pp. 237, 246; Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 100). También se da el caso de una notación que vincula dos razones, cada una escrita con la notación reportada inmediatamente antes (*v.g.,* $\frac{60\frac{km}{h}}{70\frac{km}{h}}$) (ver Londoño y Bedoya, 1988, p. 246). Consideramos que el número de ejemplos que se podrían citar —de estos tipos de notaciones— aumentaría vertiginosamente, si las situaciones que involucran medidas de cantidad de magnitud se trataran y presentaran atendiendo a las 'unidades' de magnitud, es decir, si en el planteamiento y solución de estas situaciones se trabajara no sólo con el número de la medida (*v.g.*, 30), sino con la medida (*v.g.*, 30 metros). A este respecto podemos señalar que en los cuatro textos el tratamiento de las situaciones que implican magnitudes, se hace mayoritariamente con los números y no con las medidas.

Igualmente, hemos podido reconocer que hay un uso abundante de razones expresadas a través de palabras o expresiones verbales o textuales. En este sentido, hemos identificado que previo al establecimiento de la notación para las razones, se ha utilizado la palabra 'a' o las palabras 'es a' para asociar los números (*v.g.,* 6 es a 15, o 6 a 15). Adicionalmente, hemos advertido que luego de la aparición de la notación aparece un sinnúmero de palabras o expresiones que hacen referencia —de manera no muy explícita— a una razón; algunas de ellas, que parecen cumplir el papel de vínculo son 'por', 'por cada', 'de cada' (*v.g.*, 30 kilómetros por galón, $1500 por década, 100 litros por minuto, 20 por ciento, 3 mujeres por cada 5 hombres, un litro de agua por cada cinco litros de leche, 5 niños de cada 14); otras no cumplen solamente el papel de vínculo sino que contienen uno de los datos de la razón (*v.g.*, 6 horas diarias, 8 litros diarios, 2,5% mensual, 25% anual).

De otra parte, encontramos que en algunos apartados de los textos, en lugar de números en la notación de las razones, se utilizan letras que representan números generalizados (*v.g.*, $\frac{a}{b}$), o letras y espacios que representan incógnitas (*v.g.*, $\frac{x}{y}$, $\frac{[\ ]}{60}$), o letras que representan valores de cantidades de magnitudes e incluso las magnitudes mismas (*v.g.*, $\frac{s}{t}$); sin embargo, en ninguno de los dos primeros casos se señala el conjunto numérico al cual pertenecen los valores numéricos representados por la letra o los posibles valores de las incógnitas. De la misma manera encontramos razones en las que se vinculan palabras (*v.g.*, $\frac{diagonal}{lado}$).

En suma, las quince notaciones diferentes antes reportadas nos permiten afirmar que los textos utilizan una gran variedad de notaciones de la razón, hecho que no es presentado en ninguno de ellos de manera explícita, dejando al lector la tarea de identificarlas y de apreciar su relativa equivalencia.

El tratamiento de la proporción

Reportemos inicialmente las definiciones de proporción presentadas explícitamente en los textos.

> "La igualdad de dos razones se llama **proporción**." Londoño y Bedoya, 1988, p. 233
>
> "Se denomina **proporción** a la igualdad de dos razones." Londoño y otros, 1993, p. 240
>
> "Una **proporción** es la igualdad entre dos razones." Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 101
>
> "Una **proporción** representa la igualdad entre dos razones equivalentes." Contreras y otros, 1997, p. 255

El análisis de estas definiciones, así como del tratamiento global de la noción de proporción en los textos, nos conduce a la identificación de al menos tres hechos relevantes.

El carácter nominal de las definiciones

En primer lugar, notamos cómo se utilizan respectivamente las expresiones 'se llama', 'se denomina', 'es' y 'representa' en cada una de las definiciones. Desde nuestra perspectiva observamos que las cuatro definiciones son de carácter nominal y que este carácter es evidente en las dos primeras, pero no en la tercera y la cuarta.

En efecto, las dos primeras definiciones tienen un carácter nominal tácito, en el sentido que presentan un nombre para un objeto matemático particular, en este caso, para la igualdad de dos razones; en otras palabras, éstas están presentando la palabra 'proporción' para nombrar a la igualdad de dos razones.

El carácter nominal en la definición "Una proporción es la igualdad entre dos razones" es implícito y un tanto difuso; en nuestro estudio, inicialmente, a través de esta definición reconocimos la existencia de dos objetos matemáticos (*i.e.*, la proporción y la igualdad entre dos razones), que por medio de la definición —y particularmente de la palabra 'es'— procuraban hacerse uno presentándolos como idénticos; sin embargo, el recordar una observación hecha en el mismo texto para los conceptos de razón y fracción,[12] nos hizo pensar que para lograrse la identidad faltaría expresar la afirmación recíproca, es decir, "la igualdad entre razones es una proporción". Además, consideramos que si la proporción y la igualdad entre razones se quisieran hacer idénticas sería necesario establecer previamente qué es cada una, para luego mostrar que no tienen diferencias, lo cual no se hace en el texto. De lo anterior seguimos que esta definición es también nominal y que, en consecuencia, sólo introduce un nombre nuevo (proporción) para algo supuestamente conocido (igualdad entre razones).

En el estudio de la cuarta definición, es decir "Una proporción representa la igualdad entre dos razones equivalentes", inicialmente advertimos que el uso de la palabra 'representa', excluye el carácter nominal de las otras tres definiciones y conlleva la existencia de dos objetos: uno que representa (*i.e.*, la proporción) y otro representado (*i.e.*, la igualdad entre dos razones). Ahora bien, si consideramos que *lo representado* y *lo que representa* son en esencia diferentes pero semejantes, es decir que comparten algunas características pero otras no, colegimos que la proporción y la igualdad entre dos razones no son objetos idénticos, sino más bien, dos objetos que se parecen y que uno puede representar al otro. Sin embargo, advertimos que en los términos en que se presenta esta definición no se describe suficientemente a la proporción como un objeto nuevo; además, como no está definido previamente, la definición no permite al lector saber qué y cómo es una proporción en tanto objeto matemático y cómo es que representa a la igualdad entre razones equivalentes. Por lo anterior, suponemos que ésta también es una definición nominal no tácita y aún más difusa que la tercera.

Falta de precisión de la noción de igualdad de razones

Un segundo hecho, relativamente evidente, es precisamente el que la noción de igualdad de razones está implicada y explícitamente reportada en las cuatro definiciones. Este hecho nos remite indiscutiblemente al estudio de la presentación de la igualdad entre razones en los cuatro textos, del cual concluimos que en ninguno de ellos hay un tratamiento que permita al lector saber cuándo dos razones son iguales al margen tanto de la idea de fracciones equivalentes, como de la identificación de las razones con las fracciones; veamos.

En el texto "Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7", incluso antes de abordar explícitamente la idea de razones iguales, los autores ya han incluido la igualdad entre razones en los dos ejemplos que presentan de la idea de razón; en efecto en estos ejemplos se encuentran respectivamente las expresiones $\frac{180\ km}{6\ galones} = 30\frac{km}{galón}$ y

[12] "Toda fracción es una razón, pero no toda razón es una fracción" (Londoño y otros, 1993, p. 237).

$\frac{5}{500} = \frac{1}{100}$ (Londoño y Bedoya, 1988, p. 230) que no son explicadas de manera alguna, simplemente se presentan. En esta misma sección, estos autores proponen como ejercicio escribir fracciones equivalentes a una fracción dada (*Ibid*, p.231). Luego, en el apartado 10.2 *Razones iguales. Propiedad fundamental*, se valen de dos ejemplos para enunciar la igualdad entre razones; estos ejemplos son: "Decir que hay 3 mujeres en el colegio por cada 5 hombre, equivale a afirmar que hay 6 mujeres por cada 10 hombres" y "En forma semejante, decir que 25 niños de cada 70 están enfermos equivale a afirmar que 5 niños de cada 14 están enfermos". Como puede verificarse, estos ejemplos no establecen explícitamente condición alguna que permita al lector saber cuándo dos razones son iguales; sencillamente se presentan dos parejas de razones iguales. Consideramos que el único recurso que le queda al lector es recurrir a la idea de fracciones equivalentes, sugerida implícitamente a través del ejercicio enunciado arriba, con lo cual identificaría tanto la igualdad de razones con la equivalencia de fracciones, como las razones con las fracciones.

La situación en el texto "Dimensión Matemática 7" es en esencia idéntica a la expuesta antes. En este texto también previo al estudio de la igualdad entre razones se ha hecho uso —sin justificación ni explicación— de ésta en los ejemplos 1, 2 y 3 (Londoño y otros, 1993, p. 237); además, el lector debe utilizarla para resolver los ejercicios 14 y 15 (*Ibid*, p. 238), que anteceden al apartado que aborda la igualdad de razones. En este conjunto de ejercicios los autores proponen hallar fracciones equivalentes a una fracción dada. En consecuencia, en este texto no hay información que le permitan a un lector aprendiz saber cuándo dos razones son iguales, limitándose tal vez a identificar equivalencia de fracciones con igualdad de razones.

La información que presenta el texto "Procesos Matemáticos 7" presenta la misma situación de los dos textos anteriormente citados, es decir, se utiliza la igualdad de razones antes de definirla y se intenta definir a través de un ejemplo que presenta razones iguales. Sin embargo, en éste no aparece la idea de fracciones equivalentes precediendo a la idea de razones equivalentes.

El texto "Logros Matemáticos. Séptimo grado" identifica, a través de unos ejercicios presentados bajo el título *Conocimiento previo* y una conclusión expuesta bajo el título *Conocimientos básicos* (Contreras y otros, 1997, p. 255), la idea de fracciones equivalentes (o de igual cociente exacto) con la de razones equivalentes.

Antes de enunciar el tercer hecho respecto de la proporción, creemos conveniente señalar que el carácter nominal de las definiciones (reportado como un primer hecho), aunado a la falta de precisión en la definición de la igualdad entre razones (reportado como un segundo hecho), hacen que las proporciones no logren un nivel de definición que le permitan al lector entenderlas más allá de equivalencia entre fracciones. En otras palabras, la proporción se reduce a un nuevo nombre para dos fracciones equivalentes y, en consecuencia, las razones se asumen como un nuevo nombre para las fracciones. A este respecto nos cuestionamos acerca de si es necesario que los textos inviertan tantas páginas relacionadas con la razón y la proporción, y los profesores y estudiantes deban hacer tantos esfuerzos para introducir **sólo dos nombres nuevos** para dos objetos ya conocidos. Definitivamente, creemos que no.

Enunciados no equivalentes de la propiedad fundamental de las proporciones

Un tercer hecho, respecto del tratamiento de las proporciones se relaciona con la aparición en los cuatro textos de la propiedad fundamental de éstas. En efecto, en los cuatro textos encontramos el mismo título (*i.e.*, "Propiedad fundamental de las proporciones"), al menos tres enunciados diferentes —y no siempre equivalentes— de tal propiedad y ninguna demostración —aunque sí verificaciones parciales— de ésta.

Para verificar la validez de nuestra afirmación respecto de la no equivalencia de los enunciados, hemos decidido presentarlos como figuran en los textos.

> "En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $a \cdot d = b \cdot c$" Londoño y Bedoya, 1988, p. 234
>
> "En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$". Londoño y otros, 1993, p. 241
>
> "Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $a \times d = b \times c$" Dpto. Editorial de Santillana S.A., 1995, p. 101
>
> "En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos." Contreras y otros, 1997, p. 256

Al examinar los tres enunciados verbales advertimos que son textualmente equivalentes, pues si bien se pueden reconocer diferencias en el orden de las expresiones verbales, no se identifican significados diferentes. Sin embargo, no es cierto que esta equivalencia se dé entre los enunciados simbólicos; en ellos se advierten dos estructuras lógicas diferentes, a saber: $p \Rightarrow q$ y $p \Leftrightarrow q$. Esta observación nos permite percibir que entre los textos no hay uniformidad frente a la traducción lógica de los enunciados textuales que enuncian la propiedad. Adicionalmente, nos pone en alerta frente a las consecuencias de asumir una u otra estructura lógica. Consideramos que al enunciar la propiedad bajo la estructura $p \Leftrightarrow q$, y no bajo la forma $p \Rightarrow q$, se cuenta con una herramienta para construir proporciones a partir de una igualdad de productos. Este hecho parece no ser advertido por los autores del texto "Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7" ya que en el segundo ejemplo (Londoño y Bedoya, p. 234) que aparece luego de enunciar la propiedad bajo la estructura $p \Rightarrow q$, presenta la manera de formar ocho proporciones a partir de la igualdad de dos productos.

De otra parte, dos de los tres textos que presentan la expresión simbólica de la propiedad, utilizan la implicación $p \Rightarrow q$, para presentar y sustentar la estrategia procedimental de calcular la cuarta proporcional (*i.e.*, un término desconocido de una proporción); el texto "Procesos Matemáticos 7" propone ejemplos del uso de esta estrategia antes de enunciar la propiedad, en tanto que el texto "Logros Matemáticos. Séptimo grado" no hace presentación alguna de dicha estrategia, aunque sí propone ejercicios que requieren su uso.

Finalmente, reiteramos que en ninguno de los textos aparece argumentación alguna acerca de la validez de la propiedad más allá de la presentación de algunos ejemplos que anteceden y/o suceden al enunciado de la propiedad.

Referencias

Contreras, H., Lizcano, G., García, G., Cano, E., & Flechas, H. (1997). *Logros Matemáticos. Séptimo Grado.* . Bogotá: McGraw—Hill Interamericana S.A.

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 10*(1), 1-24.

Departamento Editorial de Santillana S.A. (1995). *Procesos Matemáticos 7*. Bogotá: Editorial Santillana S.A. .

Departamento Editorial de Santillana S.A. (1995). *Procesos Matemáticos 7*. Bogotá: Editorial Santillana S.A. .

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Ny´ıregyh´aziensis, 19*, 167-174.

Fine, H. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics, Second Series, 19*(1), 70-76.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.*, Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 7*(1), 3-42.

Hill, M. J. M. (1912). Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(100), 360-368.

Hill, M. J. M. (1928). The Logical Eye and the Mathematical Eye. Their Outlook on Euclid's Theory of Proportion. Presidential Address to the Mathematical Association, 1928. *The Mathematical Gazette, 14*(193), 36-56.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (E. Brann, Trans.). New York: Dover Publications, Inc.

Knorr, W. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 8*, 1-12.

Londoño, N., & Bedoya, H. (1988). *Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7*. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

Londoño, N., Guarín, H., & Bedoya, H. (1993). *Dimensión Matemática 7.* . Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX.* Madrid: Editorial Gredos S.A.

Schwartz, J. (1998). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. . In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operation in the middle grades* (pp. 41-52): National Council of Teacher of Mathematics.

Zubieta, F. (1991). La definición de proporción de Eudoxio. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 7*, 477-486.