Cursillo:

Un Enfoque Didáctico Acerca de Problemas de Lugares Geométricos en Cabri

Edinsson Fernández M.
Área de Educación Matemática
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, Pasto.
Email: edinfer@udenar.edu.co, edi454@yahoo.com

Resumen

Este cursillo consiste en estudiar en primera instancia, de qué manera la noción de lugar geométrico permite abordar problemas de construcción geométrica desde un punto de vista ***instrumental***, en el sentido que dicha noción entra a jugar un papel como herramienta mediadora de conocimiento en algunas estrategias en el enfoque de la resolución de problemas. En una segunda fase del cursillo, se abordará una aproximación del estudio de los lugares geométricos desde un enfoque cognitivo para la comprensión de los lugares geométricos desde un caracterización ***puntual*** (o local) hacia una caracterización ***global*** de las ***propiedades intrínsecas*** de las figuras geométricas resultantes.

1. Nivel al que va dirigido.

Intermedio (abierto para profesores de Educación Básica secundaria con conocimientos básicos del Ambiente de Geometría Dinámica ***Cabri Géomètre II Plus*** y de Geometría Plana).

2. Objetivos.

2.1. Implementar una estrategia específica para encontrar por lo menos una solución a problemas de construcción geométrica apoyándose en la noción de lugar geométrico.
2.2. Validar los lugares geométricos involucrados en la resolución de dichos problemas.
2.3. Resolver algunos problemas de lugares geométricos donde sea explicito el tratamiento Puntual y Global de estos.

3. Tiempo.

Tres días del evento, una sesión por día, cada sesión de trabajo de 90 minutos, para un total de tiempo de 270 minutos.

4. Material para cada sesión.

4.1. 20 computadores con el Ambiente de Geometría Dinámica ***Cabri Géomètre II Plus***, instalado en cada uno, de tal forma que cada dos participantes tengan a su disposición un computador y así mismo cada computador con conexión a Internet.
4.2. Un computador portátil con el Ambiente de Geometría Dinámica ***Cabri Géomètre II Plus*** instalado, para el profesor que orientarán el cursillo.
4.3. Un videobeam para visualizar los ejemplos que ilustrará el profesor orientador del cursillo.
4.4. Una persona encargada de ayudar a los participantes en los aspectos técnicos del uso del Sistema Operativo del computador así como de cualquier falla técnica que se pueda presentar en la sala de informática.

5. Fundamentación Didáctica del Cursillo

5.1. Diversas Definiciones de la Noción Lugar Geométrico.[1]

Con respecto a una primera conceptualización de la noción de ***lugar geométrico*** que aparece en la gran mayoría de los libros de texto de geometría euclidiana se tiene:

"*El conjunto de todos los puntos, y solo aquello puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas*" (Hemmerling, 2002)

En algunos otros libros de geometría euclidiana escolar, se define como:

"*Un lugar geométrico como la trayectoria de un punto que se mueve de acuerdo con una o más condiciones previamente dadas*".

Esta misma definición desde un punto de vista dinámico aparece en otros textos escolares de una manera más específica así:

"*llamamos lugar geométrico de un punto M al variar otro punto Q sobre un objeto como el conjunto de posiciones que toma M al mover Q sobre ese objeto.*"

Y el método general y clásico desde el punto de vista matemático para determinar un lugar geométrico consiste de los siguientes pasos:

I.: Localizar varios puntos que satisfagan la o las condiciones dadas.

II.: Trazar una línea o varias líneas (rectas o curvas) que pasen por estos puntos.

III.: Deducir una conclusión referente al lugar geométrico y describir con exactitud la figura geométrica que represente la conclusión.

[1] Fernández E. y Garzón D. (2006). Modulo 3: Pensamiento Geométrico y Pensamiento Métrico, del Programa de Formación Docente en Educación Matemática para el Valle del Cauca, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Cali, Colombia.

IV.: Probar la conclusión demostrando que la figura o más precisamente que cualquier punto sobre la curva obtenida satisface las condiciones inicialmente dadas del lugar geométrico y, recíprocamente, probar que todo punto que satisface las condiciones dadas está sobre la curva.

5.2. Los Lugares Geométricos como Herramienta y como Objeto.

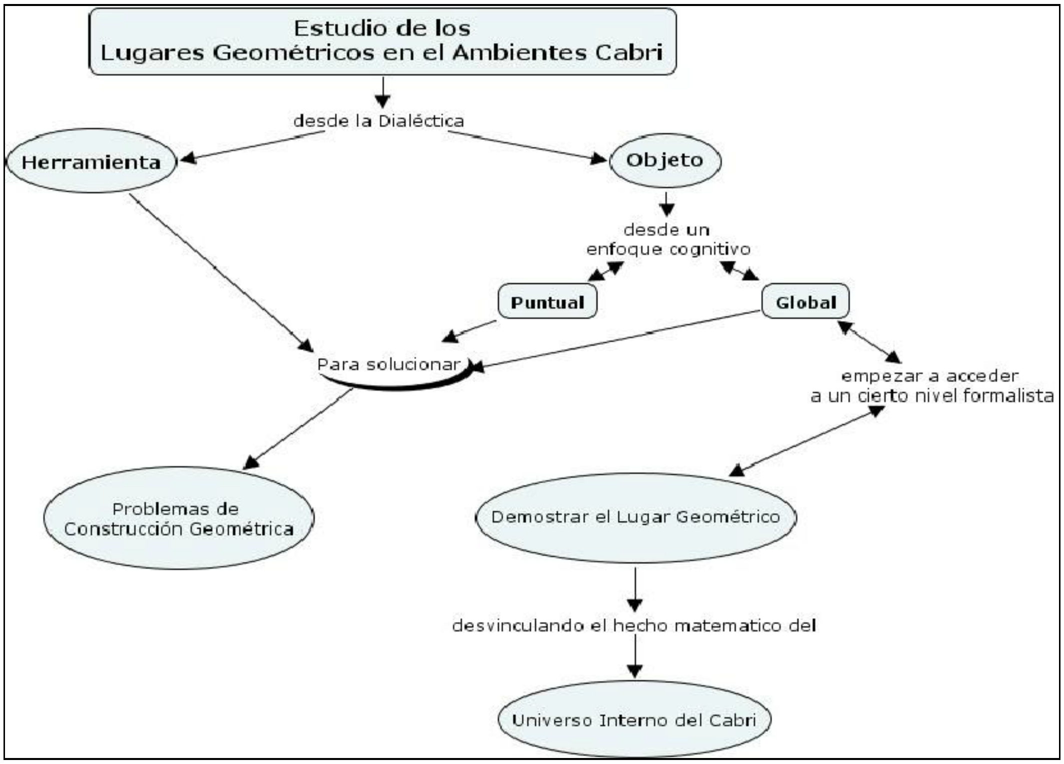
Ahora, se presentará continuación, un enfoque didáctico, de cómo aparecen en el ámbito escolar las nociones matemáticas. A dicho enfoque se le denomina la dialéctica Herramienta – Objeto.

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas francesa, según Regine Douady (1993), los conceptos matemáticos precisan de dos aspectos en el aprendizaje de las Matemáticas. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de ***herramienta***, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto, aunque no sea consciente de su empleo.

Por otra parte, también significa identificar las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí que se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de ***objeto***. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y de despersonalización participa en el proceso de apropiación del conocimiento.

Ahora bien, en el diseño de las situaciones problema que se presentan en la parte posterior de este cursillo, se plasmará esta perspectiva dialéctica, al plantear tres problemas geométricos desde el enfoque de la resolución de problemas, recurriendo a la noción de lugar geométrico como ***herramienta***, y luego se presentarán tres situaciones problema donde prevalece el estudio de los lugares geométricos como ***objetos*** propios de la geometría que son susceptibles de ser caracterizados desde una caracterización ***puntual*** (estudiando y caracterizando las propiedades de puntos individuales ó por lo menos a que encuentren puntos particulares que cumplen con la condición geométrica pedida) del lugar geométrico a encontrar, para luego pasar a una caracterización ***global*** (donde se pase a estudiar las relaciones entre los elementos constitutivos del lugar geométrico pero vista como una sola y continua figura geométrica).

Para resumir esta perspectiva didáctica subyacente a las situaciones problema propuesta para este cursillo se presenta a continuación el siguiente mapa conceptual 1.



Mapa Conceptual 1, en el cual se aprecia el enfoque didáctico de cómo aparece la noción de lugar geométrico en el ámbito escolar

5.3. Los Lugares Geométricos en el *Cabri*.

La dificultad de materializar la graficación a partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que no se haya aprovechado la oportunidad de articular dicha descripción sintética con su representación visual. Una forma de aprovechar el dinamismo para enseñar geometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos en ***Cabri***.

Consideremos que estos acercamientos constituyen no sólo una actividad de gran atractivo geométrico sino que además pueden hacer ver a los estudiantes las relaciones geométricas existentes entre varios objetos geométricos que, generalmente, se estudian de manera aislada.

Algunas construcciones geométricas pueden visualizarse en el ambiente ***Cabri***, como lugar geométrico. Para tal efecto, seremos consecuentes con involucrar construcciones geométricas exactas utilizando la regla y el compás virtual del ambiente, para determinar punto por punto (un enfoque puntual) las partes constitutivas de dicho lugar geométrico. También se empleará el uso de la herramienta "Lugar Geométrico" del ***Cabri*** para hallar la figura geométrica que forma el Lugar Geométrico pedido en un enfoque global.

Por ejemplo, si se pide construir la parábola como un lugar de puntos de una manera puntual, tales que cumplen con la siguiente condición:

La parábola como el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto fijo denominado O y de una recta fija denominada directriz.

Entonces para construirla puntualmente (en este ambiente informático) sería muy dispendioso y repetitivo las construcciones para cada punto que satisface las condiciones, debido a que para todo punto de la parábola, tendríamos que considerar una nueva construcción geométrica que considere las propiedades de perpendicularidad y congruencia; sin embargo, la parábola, como todo el conjunto de puntos que cumple con la propiedad de ser una parábola, no puede ser construida con regla y compás porque sería un proceso iterativo infinito. Para tal efecto, entonces se recurrirá al uso adecuado de la herramienta "Lugar Geométrico" o de la herramienta "Traza" que podría dar cuenta de la figura pedida desde un punto de vista global. Ver figura 1.

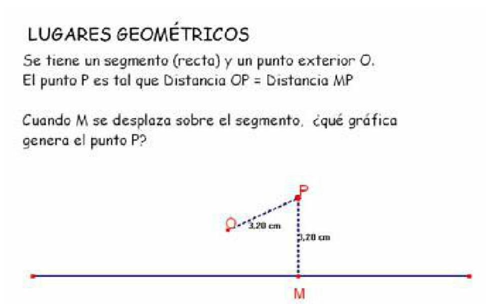


Figura 1

A continuación, presentamos a consideración una caracterización de las herramientas "Lugar Geométrico" y "Traza" en el Ambiente de Geometría Dinámica ***Cabri Géomètre II Plus***:

Para comenzar, se puede señalar la distinción de las dos mencionadas herramientas con las nociones de ***trayectoria*** y de ***lugar geométrico***. Estas dos nociones se pueden ver reflejado inicialmente en la forma de dos herramientas distintas presentadas en la última versión de ***Cabri Géomètre***, "Lugar Geométrico" y "Traza".

5.3.1. Lo que produce la herramienta "Lugar Geométrico"

Un ***lugar geométrico*** tal como se produce por la herramienta "Lugar Geométrico" se comporta de muchas maneras como otro objeto de ***Cabri***. Por ejemplo, este permanece visible en la pantalla, moviéndose de acuerdo a como los elementos sobre el cual este dependa sean manipulados. Sin embargo, un lugar geométrico en ***Cabri*** **II** difiere de otro objeto de ***Cabri*** en que este no puede ser usado en la construcción de puntos que se interceptan.

En la nueva versión de ***Cabri Géomètre II Plus***, si se puede usar el Lugar de Puntos producido por la herramienta "Lugar Geométrico" como un objeto que comporta las mismas características de un objeto ***Cabri*** y además si se puede hacer interceptar el lugar geométrico generado con otro objeto geométrico, de tal manera que se reconozca un punto de intersección común tanto al lugar geométrico como al objeto geométrico puesto en juego.

En el caso de los lugares de puntos, la herramienta "Lugar Geométrico" de ***Cabri*** **II** produce un conjunto de puntos, L, tal que cada elemento es definido en función de un elemento del conjunto E: $L = \{f(P), P \in E\}$, y aparecerá sobre la pantalla como un dibujo (una representación gráfica) del conjunto L para un número finito de f(P)[2].

Para definir tal lugar geométrico es necesario seleccionar un punto P' para el cual el lugar es deseado y luego seleccionar el punto P sobre el cual P' dependa (donde una relación funcional existe entre P y P'). El punto P es un punto "variable" que pertenece a un conjunto particular de puntos del plano (una recta, una circunferencia, un segmento de recta, etc.) y el punto P' está relacionado a P por medio de una construcción geométrica. Los puntos P' del lugar geométrico son calculados por el software y obtenidos directamente y no es necesario arrastrar el punto P. El lugar geométrico es inmediatamente representado en su ***globalidad*** el cual no era este el caso en el ***Cabri*** **I** donde la herramienta "Lugar Geométrico" estaba relacionada con el arrastre (es decir, que tenía un aspecto dinámico).

De hecho, en la primera versión del software, al utilizar un "punto sobre objeto" M (con un grado de libertad) y un punto M' (con cero grado de libertad) que dependía de M, el lugar geométrico del punto M' era producido como la traza de sus sucesivas posiciones cuando M era arrastrado.

Por ejemplo, en la figura 1, como el punto M es un punto semi-libre, es decir, es un punto que pertenece a la recta directriz y al poderse arrastrar como un punto sobre otro objeto ***Cabri***, el punto P se moverá de acuerdo a una construcción geométrica que vincula hechos geométricos (relaciones de perpendicularidad y equidistancia) con el punto M, dándose una relación de dependencia estrecha entre M y P, generando el lugar de puntos P que puede ser definido como un objeto final en una macro-construcción.

Además, es posible de obtener un lugar geométrico de objetos tales como rectas, rayos (semirrectas), segmentos y circunferencias y por lo tanto generar sus envolventes (ver figura 2).

[2] n: número de puntos del lugar geométrico, con $5 \leq n \leq 5000$.

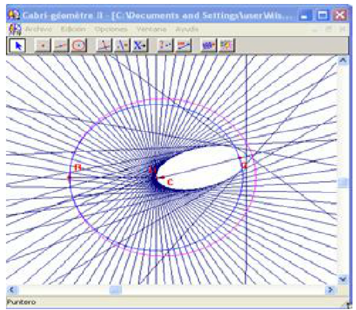


Figura 2

Un lugar geométrico (manual) puede también ser producido al seleccionar cualquier punto sobre la pantalla –incluyendo puntos libres (puntos con dos grados de libertad)– y observando la trayectoria generada cuando este punto es arrastrado. Esta segunda utilización de la herramienta “Lugar Geométrico” de ***Cabri*** **I** corresponde a la herramienta “Traza” en ***Cabri*** **II**.

5.3.2. Lo que produce la herramienta “Traza”

En tanto que la herramienta “Traza” permite al usuario mostrar ciertos objetos sobre la pantalla que dejan una huella (rastro, señal o traza) cuando ellos son movidos, o bien manualmente usando el ratón del computador ó a través del uso de la herramienta “Animación”. La traza no existe como un objeto de ***Cabri***, únicamente como un conjunto de píxeles resaltados sobre la pantalla.

5.3.3. Las diferencias entre lo producido por las herramientas “Lugar Geométrico” y “Traza”

Resumiendo entonces, en ***Cabri***, la herramienta “Traza” enfatiza en una interpretación dinámica de la representación de una trayectoria de un punto, mientras que la herramienta “Lugar Geométrico” es caracterizada de una manera funcional por medio de una correspondencia uno a uno entre dos puntos P y P', representando, al menos implícitamente, la imagen de un conjunto de puntos para una cierta función matemática.

Bajo las condiciones descritas anteriormente, no todos los lugares pueden ser obtenidos a través del uso de la herramienta “Lugar Geométrico” de ***Cabri***. Las restricciones están relacionadas al tipo de transformaciones geométricas de configuraciones geométricas que son posibles al utilizar el modo de arrastre.

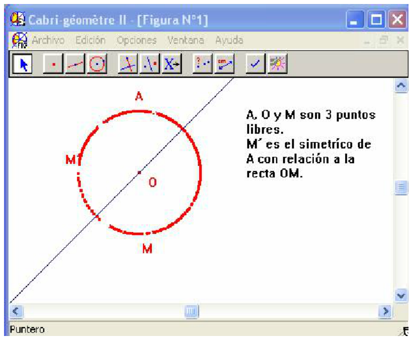


Figura 3: Traza dejada por el punto M´ cuando se arrastra M.

Por ejemplo, en la figura 3, como el punto M es un punto libre, este es únicamente posible de dibujar el lugar geométrico requerido (una circunferencia) al usar la herramienta “Traza”, mientras que la figura 4 de abajo presenta un caso en el cual, aunque la herramienta “Lugar Geométrico” pueda ser utilizada, una construcción auxiliar es requerida de tal manera que el lugar geométrico deseado (la mediatriz de AB) pueda ser generada.

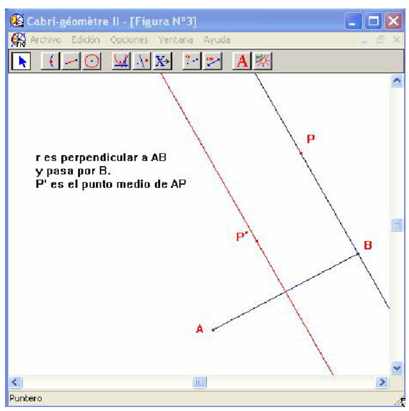


Figura 4: Mediatriz de AB al usar la herramienta “Lugar Geométrico”

6. DESARROLLO DEL CURSILLO.

6.1. ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN LA PRIMERA SESIÓN.

Con el fin de ilustrar la estrategia heurística que es objeto de estudio, se partirá de analizar un ejemplo concreto planteado por Polya (1965. pp. 41-42), el cual después será recreado en el ambiente de geometría dinámica ***Cabri***.

Inscribir un cuadrado en un triángulo dado (acutángulo), tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente.

— *¿Cuál es la incógnita?*
—Un cuadrado.
— *¿Cuáles son los datos?*
—Un triángulo dado, nada más.
— *¿Cuál es la condición del problema?*
—Los cuatro vértices del cuadrado deben hallarse sobre el perímetro del triángulo, dos sobre la base y los otros dos sobre cada uno de los otros dos lados respectivamente.
— *¿Es posible satisfacer la condición?*
—Creo que sí, pero no estoy seguro.
—No parece que el problema le resulte muy fácil. *Si no puede resolverlo, trate primero de resolver algún problema relacionado* ¿Puede usted satisfacer *alguna parle de la condición?*
— ¿Qué quiere decir por una parte de la condición?
—Veamos; la condición concierne a todos los vértices del cuadrado. ¿De cuántos vértices se trata?
—De cuatro.
—Una parte de la condición se aplicaría a menos de cuatro vértices. *Tome sólo una parte de la condición, deje la otra parte.* ¿Qué parte de la condición es fácil de satisfacer?
—Es fácil trazar un cuadrado con dos de sus vértices sobre el perímetro del triángulo, incluso un cuadrado con tres de sus vértices sobre el perímetro del triángulo.
—*Dibuje una figura.*
El alumno dibuja la figura 5.

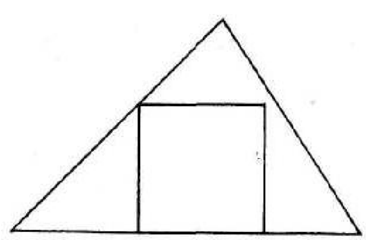


Figura 5

—Usted no ha *considerado más que una parte de la condición, abandonando la otra. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada?*

—El cuadrado no está determinado si sólo tiene tres de sus vértices sobre el perímetro del triángulo.
—*Bien. Dibuje otra figura.*
El alumno dibuja la figura 6.

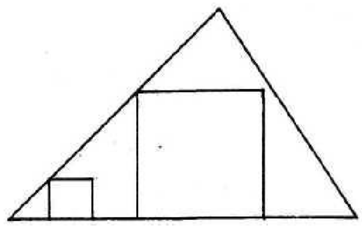


Figura 6

—*Tal como dice, el cuadrado no queda determinado por la parte de la condición considerada. ¿Cómo puede variar?*
—Tres de los vértices de su cuadrado están en el perímetro del triángulo, pero el cuarto no está donde debería estar. Como usted lo ha dicho, el cuadrado no está determinado, puede variar; resulta lo mismo para su cuarto vértice. *¿Cómo puede variar?*
—Trátelo experimentalmente si lo desea. Trace otros cuadrados, tres de cuyos vértices se hallen sobre el perímetro del mismo modo que los dos cuadrados ya dibujados en la figura.

Dibújelos pequeños y grandes. ¿Cuál le parece ser el lugar geométrico del cuarto vértice? *¿Cómo puede variar?*
El profesor ha llevado al alumno muy cerca de la idea de la solución.
Si el alumno es capaz de adivinar que el lugar geométrico del cuarto vértice es una recta, habrá resuelto el problema.

6.1.1. Primera Situación Problema.

Se plantea el problema de construir un triángulo equilátero inscrito en un cuadrado dado, de tal forma que tengan un vértice en común.

6.1.2. Segunda Situación Problema.

Dadas tres circunferencias concéntricas C_1, C_2 y C_3, trazar una recta que las intercepte respectivamente en los puntos A, B y C de tal forma que $\overline{AB} = \overline{BC}$.

6.1.3. Tercera Situación Problema.

Se plantea el problema de construir un triángulo equilátero a partir de tres circunferencias concéntricas dadas, de tal forma que cada vértice del triángulo esté sobre una de las circunferencias.

6.2. ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN LA SEGUNDA SESIÓN.

6.2.1. Primera Situación Problema:

Dados dos puntos A y B, hallar el ***lugar geométrico*** *de los puntos P tales que $\frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}}$ es una constante k.*

6.2.2. Segunda Situación Problema:

Dados dos de sus lados, $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, construya un rectángulo. Luego divídalos en igual número de partes iguales. Por los puntos divisorios de la altura del rectángulo, nómbrelos de abajo hacia arriba en orden numérico. Luego cada uno de los puntos de la altura, únalos por medio de segmentos con el vértice C. Ver figura 7.

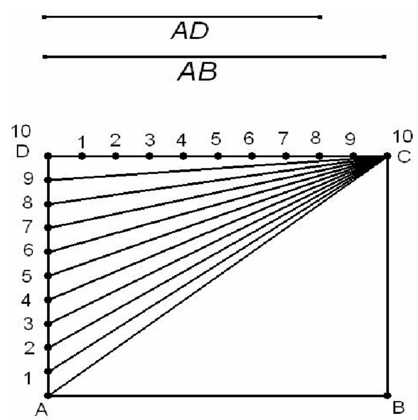


Figura 7

Ahora, por cada uno de los puntos de la base superior, nombrados de izquierda a derecha en orden numérico, trace rectas perpendiculares a dicha base.

a.) Conjeture cuál es el ***lugar de puntos*** *que se forman con las intersecciones de las rectas correspondientes a puntos igualmente numerados. Es decir, la intersección del segmento que pasa por 1 con la recta que pasa por 1, la intersección del segmento que pasa por 2 con la recta que pasa por 2, y así sucesivamente.*

b.) Muestre cual ha sido su proceso de validación acerca del lugar geométrico que cree que es.

6.2.3. Tercera Situación Problema:

Dados una recta m cualquiera, un puntos exterior a m denominado A y un punto B cualesquiera que pertenece m, encontrar el lugar geométrico de todos los centros de todas las circunferencias que pasan por A y que son tangentes a la recta m en el punto B. Posteriormente téngase en cuenta la propiedad de la circunferencia con su centro y halle el lugar geométrico que genera el centro.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- **ANFOSSI, A.** (1961). *Curso de Geometría Analítica*. Ciudad de México, México: Progreso S.A.

- **DOUADY, R.** (1995). *La Ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento*. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

- **FERNÁNDEZ, E. y GARZÓN, D.** (2006). *Modulo 3: Pensamiento Geométrico y Pensamiento Métrico. Unidad 2: La geometría en el ámbito escolar*. Recuperado el 14 de Junio de 2006, del sitio Web de la Universidad del Valle. Cali, Colombia: https://proxse13.univalle.edu.co/campus/moodle/file.php/1290/pensamiento/Unidad 2/versionpdf/ matematicas_modulo3_unidad2.pdf

- **JAHN, A. P.** (2002): "Locus" and "Trace" in CABRI-GÉOMÈTRE: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *International Reviews on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 78-84.

- **HEMMERLING, E.** (2002). *Geometría Elemental*. Ciudad de México, México: Limusa, Noriega Editores.

- **MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.** (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Santafé de Bogotá. Colombia: Enlace Editores.

- **MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.** (2003). *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Santafé de Bogotá. Colombia: Enlace Editores.

- **POLYA, G.** (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. (pp. 41-42). Ciudad de México, México: Trillas.