DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTOCÁSTICO: RAZONAMIENTO BAJO HIPÓTESIS Y TEOREMA DE BAYES

Cristian G. Paredes Cancino, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
cristian.paredes@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

La presente investigación se interesa en reconocer los usos del *Teorema de Bayes* en un escenario histórico. Entendiendo el término uso como "… las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas, 2011, p.75). Puesto que deseamos entender la naturaleza del saber, partimos de una problematización, esto es una historización y una dialectización, desde la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013), enfoque que consideramos adecuado para abordar el problema del significado en Matemáticas.

Para la problematización del saber matemático, analizamos el *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, obra matemática del Reverendo Thomas Bayes, publicada en 1763, debido a que es la primera evidencia donde se propone un sustento matemático al *problema de la inversión de la probabilidad*. Para efectos del presente nos centramos en una sección específica, el Apéndice, donde se presentan tres aplicaciones como se denomina en el escrito original, la cual nos permite evidenciar aspectos funcionales del saber matemático.

De acuerdo con Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini (2015, p.16) el "*significado* deviene del *uso situado* que se dé al objeto y a sus procesos asociados a través de la *actividad práctica* donde los individuos dotan de significación relativa, situada y contextualizada a los objetos formales". Estos últimos aspectos se retoman como constructos característicos (Reyes–Gasperini, 2016) para realizar el análisis socioepistemológico de la obra matemática de Thomas Bayes.

Como evidencia a lo señalado, se presenta el problema en el cual nos centramos en la discusión de los datos y da pie a la construcción de las conclusiones de nuestro trabajo. Retomamos la aplicación tres que trata a grandes rasgos sobre la estimación de la proporción de premios existentes en una lotería.

Let us then imagine a perſon preſent at the drawing of a lottery, who knows nothing of its ſcheme or of the proportion of *Blanks* to *Prizes* in it. Let it further be ſuppoſed, that he is obliged to infer this from the number of *blanks* he hears drawn compared with the number of *prizes*; and that it is enquired what concluſions in theſe circumſtances he may reaſonably make.

Let him firſt hear *ten* blanks drawn and *one* prize, and let it be enquired what chance he will have for being right if he gueſſes that the proportion of *blanks* to *prizes* in the lottery lies ſomewhere between the proportions of 9 to 1 and 11 to 1.

		Hipótesis y Probabilidades		
		Menos que 9 a 1	Entre 9 a 1 y 11 a 1	Mayor que 11 a 1
Evidencias	10 blancos y 1 premio	0.6589	0.07699	0.2641
	20 blancos y 2 premios	0.584	0.10843	0.30757
	40 blancos y 4 premios	0.527	0.1525	0.3205
	100 blancos y 10 premios	0.44109	0.2506	0.3082
	1000 blancos y 100 premios		0.7953 – 0.9405	
	10000 blancos y 1000 premios		0.97421	

Aplicación tres de la sección Apéndice de la obra de Bayes Fuente. Retomado de Bayes (1763). Del lado izquierdo Probabilidad de la hipótesis en función de la evidencia (resultado de las extracciones) Fuente. Retomado de Paredes (2018)

El problema consiste en la estimación de la verdadera proporción de boletos premiados y boletos no premiados en una lotería (del lado derecho de la Figura). Se parte de la *postulación* en este caso de tres *hipótesis* respecto a la “verdadera proporción” siendo estas: i) la proporción de boletos esté entre 9 a 1 y 11 a 1; ii) la proporción es menor que 9 a 1; y, por último, iii) la proporción es mayor que 11 a 1. Los valores numéricos de la tabla son las probabilidades obtenidas mediante el Teorema de Bayes, estas son cuantificadas mediante, dicha probabilidad es la valoración de la hipótesis en función de la evidencia o información.

La tabla propuesta permite por otra parte un doble análisis, uno horizontal y otro vertical (Lado izquierdo de la Figura). El primero refiere al *grado de veracidad de la hipótesis*, por ejemplo, la hipótesis que la *proporción verdadera* esté entre 9 a 1 y 11 a 1 es muy poco probable que sea veraz teniendo presente que se obtuvieron 10 blancos (boletos sin premio) y 1 premio. El segundo refiere a la *confirmación o refutación de la hipótesis* inicial, por ejemplo, situándonos en el caso de obtener 100 blancos y 10 premios la hipótesis más probable, es que la verdadera proporción sea menor que 9 a 1; en el caso de 1000 blancos y 100 premios, la hipótesis más probable, es que la verdadera proporción sea entre 9 a 1 y 11 a 1. Al comparar estos casos veamos como la hipótesis más probable no es la misma, entonces una pregunta en cuestión es ¿confirmo o refuto la hipótesis?, ¿cuál es la decisión final? Esta actividad matemática probabilística acompañada de prácticas como *hipotetizar, ponderar, medir, comparar, inferir,* entre otras, consideramos enriquece el tratamiento didáctico de este saber, que sólo centrar la atención en el cálculo de las probabilidades condicionadas.

En síntesis, del análisis socioepistemológico realizado sobre el Teorema de Bayes y en específico, sobre la sección Apéndice de la obra original (aplicación tres), identificamos las siguientes fases o momentos: *la postulación de hipótesis, la elección de una hipótesis, la refutación o aceptación de la hipótesis y la toma de una decisión*, los cuales postulamos caracterizan a un razonamiento abductivo (o razonamiento bajo hipótesis). Además, señalamos que es un tipo de razonamiento propio para el desarrollo del Pensamiento Estocástico y que el discurso Matemático Escolar ha soslayado en el tratamiento de este saber matemático.

Es en el proceso de identificar la hipótesis más probable, en donde el Teorema de Bayes, se pone en uso, como una herramienta que permite *cuantificar la certidumbre/incertidumbre* del suceso. Además, que ese valor probabilístico resultante se usa como una medida de referencia para la *toma de decisiones*. A modo de hipótesis postulamos que estos aspectos permiten dotar de nuevos significados al Teorema de Bayes y propiciar *lo inferencial* en el aula de matemáticas como parte del desarrollo del *Pensamiento Estocástico*.

REFERENCIAS

Bayes, T. (1763). An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, *53,* 370-418.

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes–Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17.

Paredes, C. (2018). *El problema de la inversión de la probabilidad. Génesis histórica y problematización del Teorema de Bayes*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Reyes–Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento Docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: Gedisa.