

## Ideas para Enseñar

### Dimensión fractal en la enseñanza secundaria

**María Alejandra Cañibano; Patricia Sastre Vazquez; Marcelo Gandini**

#### Resumen

Los fractales son entes matemáticos de singular importancia y se caracterizan por ser estructuras en las que una propiedad se repite de forma infinita. Aparecen en la naturaleza a menudo y es importante que el alumno entienda algunos conceptos relacionados con el mundo de la fractalidad y sus aplicaciones. En este trabajo se introduce el concepto de dimensión fractal por medio del método box counting aplicado a un accidente fisiográfico, una laguna.

#### Abstract

Fractals are mathematical entities of singular importance and are characterised by structures in which a property is repeated in infinite way. They often appear in nature and it is important that students understand some concepts related to the world of the fractals and their applications. This paper introduces the concept of fractal dimension through the method box counting applied to a physiographic accident, a lagoon.

#### Resumo

Os fractais são seres matemáticos da importância singular e são caracterizadas sendo as estruturas em que uma propriedade é repetida do formulário infinito. Parecem na natureza freqüentemente e são importantes que o estudante compreende alguns conceitos relacionados ao mundo do fractais e de suas aplicações. Neste trabalho o conceito da dimensão é fractal introduzido por meio da contagem da caixa do método aplicada a um acidente do fisográfico, uma lagoa

#### Introducción

En Argentina, la enseñanza secundaria obligatoria no incluye entre sus contenidos el concepto de fractal y sin embargo éste puede ser de utilidad para explicar algunos conceptos de carácter geométrico. Hay profesores que desean innovar en sus clases en función de captar la atención de los alumnos y allí donde se utilizan figuras geométricas sencillas en las que después de un proceso de carácter recursivo aparecen las estructuras denominadas fractales, es donde puede encontrarse el punto de interés.

La utilización de estas figuras geométricas simples se podría incluir en los diseños de Matemáticas de la Educación Secundaria y también podrían tratarse conceptos como el de perímetro, área, progresiones geométricas convergentes y divergentes, entre algunos bajo el mismo marco. También se podrían utilizar los fractales para relacionar la Matemática con otras disciplinas científicas como: Biología, Medicina, Geología, etc. y en consecuencia relacionarla con otros espacios curriculares como Geografía, Biología, Dibujo, Ciencias de la Tierra, etc.

No se debe olvidar que las estructuras fractales aparecen en muchos aspectos del mundo que nos rodea y se pueden utilizar para acercar a los alumnos hacia conceptos variados.

La geometría euclidiana, la que se imparte durante la enseñanza primaria y secundaria, es la geometría que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional, siendo muchas veces sinónimo de geometría del plano o simplemente geometría. El término fractal, procedente del latín “fractus” que significa fragmentado o irregular y fue introducido por Mandelbrot para designar conjuntos que poseían esta característica, que no tenían ningún nombre concreto y desde entonces se conoce esta rama de las matemáticas como geometría fractal.

La geometría es medir, el significado del término es medir la tierra. La geometría mide todas las cosas usando ángulos y longitudes y la describe en términos de puntos, líneas rectas, círculos, rectángulos, triángulos, cubos, y esferas. En verdad esta descripción no concuerda con la realidad, por ejemplo una carretera contiene curvas que no son descritas por las figuras geométricas antes mencionadas. La dimensión fractal (D) indica la complejidad de un objeto respecto a las dimensiones comunes: si el punto tiene dimensión cero, la línea dimensión 1, el plano dimensión 2 y el cubo dimensión 3 entonces no hay forma de asignar dimensión a algo que no es ni totalmente plano ni volumen. En rigor podría decirse que cualquier objeto que no cumpla con estas características podrá tener dimensión entre 2 y 3 ó 1 y 2, según de que se trate.

El objeto de estudio de este trabajo es una laguna de la provincia de Córdoba, se buscó una laguna que tuviera una superficie importante y que de la observación de su contorno se pudiera concluir que no se pudiera representar únicamente por líneas. Porque la dimensión fractal explica otros conceptos y en el caso de las costas indica el grado de rugosidad de la misma. Cuanto mayor sea su valor más rugosa es la costa. En el caso hipotético de obtenerse el valor máximo de 2, su perfil llenaría por completo el plano. Por el contrario, cuanto más se aproxime el valor de la dimensión fractal a la unidad, más persistente o lineal es el perfil de la costa.

### El método de Box Counting

Se trata de un método muy fácil de aplicar sobre una imagen, por lo tanto se presenta como una opción de actividad en una clase de matemática recreativa. El método box-counting se basa en correlacionar las observaciones a diferente escala de la misma escena. Estas se parametrizan midiendo la superficie recubierta por el conjunto de puntos válidos de observación a diferentes escalas. Las mediciones se realizan mediante un recubrimiento de cajas (box) sobre la escena con el posterior recuento de las que contienen motivos del dominio de trabajo. Este proceso itera el recuento de cajas variando las dimensiones de estas de forma sistemática. El ajuste a la ley de potencias nos determina la dimensión fractal D de nuestro objeto:

$$N(r) = C * r^{-D}$$

$$\ln N(r) = \ln C + (-D) \ln r$$

$$D = \frac{\ln C - \ln N(r)}{\ln r}$$

O si se expresara en la forma  $\ln N(r) = -D \cdot \ln r + \ln C$ , la pendiente indicaría la dimensión fractal de la escena.

Si no se cumple la relación indica que a diferentes escalas no se observa autosimilitud. La mayoría de los programas indica que la forma de obtener D pasa por la representación log-log de  $N(r)$  y  $r$ , obteniendo la pendiente y la correlación. El valor de la dimensión fractal indica si hay muchos o pocos puntos en el determinado intervalo y la correspondiente dispersión espacial. Más allá de la actividad de aplicar el método, este tema le permite al profesor trabajar con logaritmos, ecuación de la recta, análisis de la función lineal, elaborar conclusiones.

### Aplicación práctica

A continuación se muestra un ejemplo práctico y cómo desarrollarlo en el aula. Se puede elegir cualquier figura y determinar de antemano la dimensión fractal del elemento se va a analizar: costas, superficies, volúmenes, etc. ya que de ello dependerá entre que valores se encontrará D.

Se confeccionan diferentes matrices cuadradas sobre un papel transparente y se superpone a la imagen. Se cuenta la cantidad de veces que el elemento elegido cae sobre alguna de las subdivisiones de la matriz. En nuestro trabajo se eligió como objeto de estudio la Laguna de Mar Chiquita ubicada en la provincia de Córdoba (Argentina). La imagen satelital fue obtenida de la web:

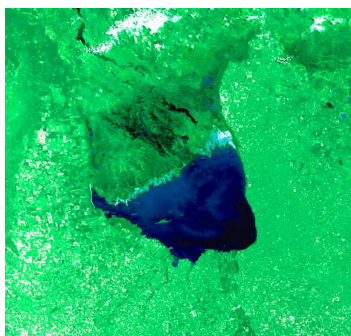
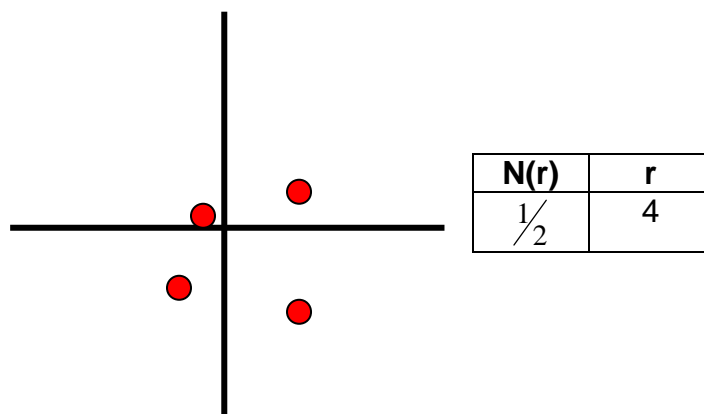


Figura 1

Se generaron diferentes matrices sobre la imagen con distintas divisiones de acuerdo al patrón  $\frac{1}{2^n}$ , esto es  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ . Se contabilizaron las veces que el contorno de la laguna “caía” en alguno de los cuadrados formados en la matriz. Por ejemplo como puede observarse en la Figura 2:



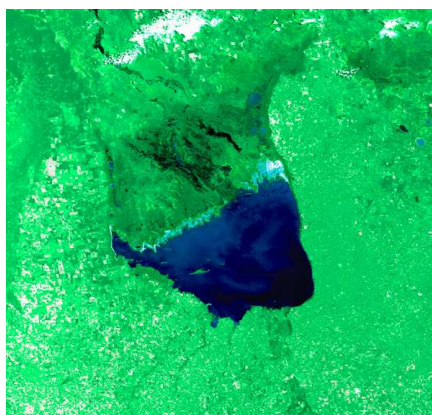


Figura 2: Objeto de estudio

Así sucesivamente se fue subdividiendo la región y se contabilizaron la cantidad de veces que el contorno aparecía. Para nuestro ejemplo se presenta la Tabla 1:

Tabla 1

r	N( r)
1/2	4
1/4	10
1/8	17
1/16	33
1/32	69

Luego de observar los datos obtenidos, se deben representar r y N(r) en un sistema de ejes coordenados. Como la escala de representación es distinta para ambas variables y podría resultar que el gráfico no pueda observarse con facilidad, entonces es muy útil hacer uso de las propiedades de los logaritmos, aplicándolos sobre ambas variables (Tabla 2):

Tabla 2

ln r	ln N( r)
-0,69314718	1,386294361
-1,386294361	2,302585093
-2,079441542	2,833213344
-2,772588722	3,496507561
-3,465735903	4,234106505

En esta instancia el profesor se encuentra con dos caminos: el primero consiste en graficar los puntos obtenidos mediante la transformación log-log y observar si los mismos siguen algún comportamiento, en particular una función lineal con pendiente negativa. Además pueden obtenerse otras conclusiones sobre el análisis del gráfico y finaliza su ejercicio.

Es importante destacar que el objeto de estudio es efectivamente un elemento fractal ya que la disposición de los puntos indica que la normalización de los mismos y su posterior representación toma la forma de una función lineal, con pendiente negativa.

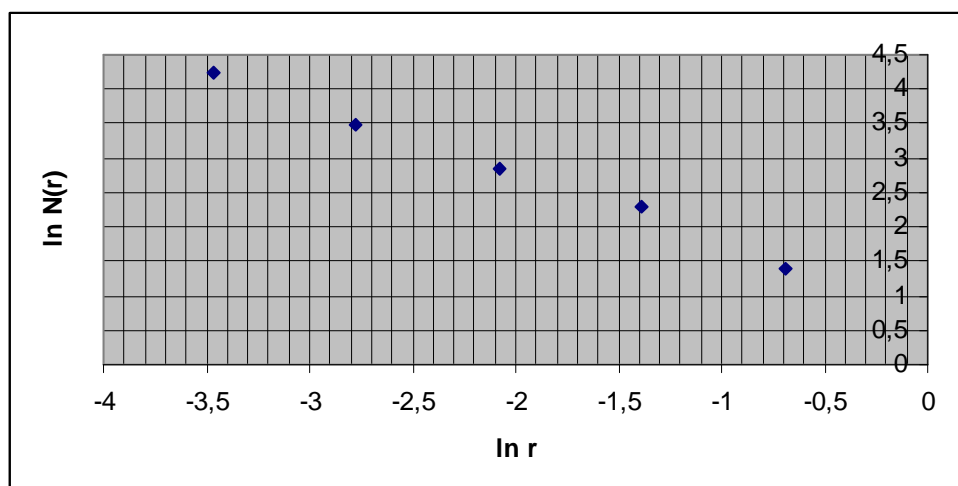


Figura 2: Recta de regresión

Una segunda opción es que el profesor prosiga su estudio y avance sobre temas de estadística pudiendo trabajar con el concepto de recta de regresión, el concepto de pendiente cuando se trata de averiguar la dimensión fractal, lo cual haría una explicación más concreta y detallada de lo que se pretende estudiar.

## Conclusiones

El objetivo de la propuesta es la innovación en el aula, mostrar contenidos que no se encuentran en los planes de estudio, pero pueden ser comprendidos parcialmente por los alumnos. Permanecer inmóviles en las indicaciones marcadas por el diseño curricular es válido. Sin embargo aunque la actividad fundamental en las clases de Matemática sea el razonamiento, la enseñanza será tanto más activa cuanto más haga funcionar la imaginación y la creatividad de los alumnos. Al mismo tiempo los alumnos pueden estar entretenidos, interesarse o descubrir conceptos nada triviales. Lo interesante de la enseñanza de la matemática es desmitificarla, sacarla de ese papel riguroso que se impone en las aulas e incluirla en casos concretos o inusualmente tratados.

## Bibliografía

- Corbalán Yuste, F. (1995). La matemática aplicada a la vida cotidiana. Serie Didáctica de las Matemáticas. Editorial GRAÓ.
- Falconer, K. (1990) Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley and Sons
- Kluwer, J. F. (1988) Fractals. Academic/Plenum Press.
- Papert, S. (1987). Desafío a la mente. Ed. Galápagos.

**Alejandra Cañibano.** Agrimensora, por la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) y Magister en Investigación Biológica Aplicada por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina). Profesora Adjunta del Área Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Comparte su trabajo con la enseñanza de la matemática en el nivel medio y adultos de escuelas estatales. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. [mac@faa.unicen.edu.ar](mailto:mac@faa.unicen.edu.ar)

**Patricia Sastre Vázquez.** Agrimensora, por la Universidad Nacional del Sur (Argentina) y Doctora en Matemática Aplicada, por la Universidad de Alicante (España). Profesora Titular del Área de Matemática de la Facultad de Agronomía de Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, UNCPBA, (Argentina). Profesora Titular de Análisis II y Matemática, de la Facultad de Agronomía de la Universidad de Morón (Argentina). Es directora del Proyecto: “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”. Secretaria de Ciencia y Técnica de la UNCPBA. Ha dictado cursos de posgrado en el país y en el extranjero. Tiene publicados trabajos en el área de la Educación Matemática y otras disciplinas relacionadas con la Agronomía y la Modelización, en Revistas Nacionales e Internacionales. Es autora de libros y capítulos de libros tanto de investigación como de docencia. Ha integrado tribunales de Tesis Doctorales en España. Formó parte de numerosos comités científicos de Congresos Internacionales. [psastre@faa.unicen.edu.ar](mailto:psastre@faa.unicen.edu.ar), [pasava2001@yahoo.com.ar](mailto:pasava2001@yahoo.com.ar)

**Marcelo Gandini.** Licenciado en Ciencias Biológicas (UBA). Doctor de la UBA en Ciencias Biológicas. Profesor Adjunto Cátedra de Ecología General de la UNICEN. Docente de Posgrado en la Maestría en Teledetección y SIG de la UNICEN. Ha presentado numerosos trabajos en temas de ecología y teledetección en congresos nacionales e internacionales.  
[mgandini@faa.unicen.edu.ar](mailto:mgandini@faa.unicen.edu.ar)