Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

Fortaleciendo los significados de las fracciones a través de situaciones didácticas

Strengthening the meanings of the fractions through didactic situations

Manuel Fernando Alva Alejos
Universidad Autónoma de Chiapas. manu3l.alva@gmail.com

Miguel Solís Esquinca
Universidad Autónoma de Chiapas. solise@unach.mx

RESUMEN

El presente trabajo es una investigación realizada sobre los diferentes significados que las fracciones tienen: parte-todo, cociente, medida y número racional. Se empleó a la Ingeniería Didáctica como metodología y a la Teoría de Situaciones como marco teórico para dar origen a la secuencia didáctica diseñada y aplicada a un grupo de alumnos del nivel básico, de edades entre 12 y 13 años. Los resultados demuestran que en una situación que integra diferentes significados de las fracciones, éstos emergen de manera intuitiva como respuesta a problemas vinculados con la división. Se describe y analiza la transición de la forma convencional de las fracciones a la decimal.

Palabras clave: Reparto, Significados de las fracciones, Situación Didáctica.

ABSTRACT

This paper is a research about the different meanings that the fractions have: part-whole, quotient, measure and rational number. Didactic Engineering was used as methodology and the Theory of Didactic Situations as a theoretical framework, to design a didactic sequence designed that was applied to a group of students at the basic level, aged between 12 and 13 years. The results show that in a situation that integrates different meanings of fractions, those meanings emerge intuitively in response to problems related to division. The transition from the conventional form of fractions to the decimal is described and analyzed.

Keywords: Division, Meanings of the fractions, Didactic Situation.

Recibido: Marzo 2, 2019. Aceptado: Agosto 3, 2019

1. INTRODUCCIÓN

Diversos trabajos de investigación como Gómez y Pérez (2016) mencionan que se puede hablar de las fracciones comparando dos medidas, como equivalencia, razón, cociente o números racionales en un mismo tema y es complejo, ya sea para el alumno o el docente. Acevedo, López, Guerrero y Morales (2013) mencionan que existe dificultad al visualizar la fracción mediante una representación. Fandiño (2005) menciona 14 significados que puede tener las fracciones. Todo lo anterior motivó a realizar el presente trabajo de investigación para integrar diferentes significados de las fracciones en una actividad por medio de una secuencia didáctica.

Con este trabajo se pretende saber si el alumno que cursa el primer año de secundaria logra transitar entre dos o más significados de las fracciones a través de una secuencia didáctica. Para poder realizar la investigación se empleó la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1998) porque propone las bases para la construcción de secuencias didácticas que permitan a los alumnos de primero de secundaria transitar en dos de los cuatros significados de las fracciones (parte-todo, cociente, medida y número racional).

La metodología seguida fue la Ingeniería Didáctica, pues siguiendo sus cuatro fases (análisis preliminar, análisis a priori, experimentación, análisis a posteriori y evaluación) da elementos para diseñar y proponer una secuencia didáctica acorde a los objetivos de la investigación. Se integraron los significados de las fracciones propuestos en la investigación, a la vez que permite validar la secuencia didáctica por medio de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

En cuanto a la estructura y desarrollo del presente trabajo se dedicó la primera sección a la metodología y marco teórico seguida en la investigación, se continúa con la investigación realizada de acuerdo a las etapas de la Ingeniería Didáctica. Por último, finaliza con las conclusiones.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Es relevante lograr reconocer un medio sin importar cómo se escriba $\left(\frac{1}{2} \text{ o } {}^{1}\!/_{2} \text{ ó } 0.5\right)$ así como ver a la fracción o número racional que representa dicha cantidad. Puede expresarse una raíz (√) usando fracciones como potencias: $(125)^{2/3}$ o la forma más convencional $(\sqrt[3]{125})^2$.

Castro (2008) habla acerca de l*a compresión del significado de los números, sus diferentes interpretaciones y representaciones* haciendo alusión al pensamiento numérico y las fracciones como una representación numérica. Y esto es lo que se espera, al ubicar a la fracción en una recta numérica, logrando percibir la equivalencia o reciprocidad que implica la fracción expresada y el número decimal (racional).

Se empleó la Teoría de Situaciones Didácticas porque se busca crear las condiciones necesarias para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, en este caso los significados de las fracciones empleados en la secuencia didáctica. Brousseau (1998) menciona que el saber o conocimiento matemático no se construye de manera espontánea. Por tanto, una situación didáctica debe estar organizada y contener momentos de aprendizaje que permitan al sujeto interactuar con un medio (papel, dispositivo digital, pizarrón, material didáctico, por citar algunos) para que aprenda. Las interacciones que puede haber entre el sujeto y el medio son: acción (donde el alumno actúa sobre un medio), formulación (un alumno o grupos de alumnos formula explícitamente un mensaje destinado a otro alumno o grupo de alumnos que debe comprender el mensaje y actuar) y validación (dos alumnos o grupo de alumnos deben ponerse de acuerdo sobre la veracidad o falsedad de sus hipótesis o supuestos).

Para integrar diferentes significados de las fracciones, se trabajó con la Ingeniería Didáctica como metodología (Douady, 1996), la cual proporciona elementos que permiten elaborar, diseñar y proponer una situación didáctica. Estas fueron seguidas en la investigación y se describen de manera breve.

1. Análisis Preliminar. Consiste en investigar y analizar los contenidos contemplados en la enseñanza (análisis epistemológico), el analizar la enseñanza tradicional y sus efectos

(análisis didáctico), análisis de las concepciones de los estudiantes, dificultades y obstáculos que determinan su evolución (análisis cognitivo).

2. Concepción y análisis a priori de las secuencias didácticas. El punto anterior provee de elementos al investigador para determinar que variables (macro-didácticas o micro-didácticas) intervendrán, así como la secuencia o fases. En el análisis a priori se basa en un conjunto de hipótesis, determinar pos-comportamientos de los estudiantes, determinar posibles acciones y decisiones al momento de realizar la puesta en escena. Existe una parte descriptiva y predictiva.

3. Experimentación. Esta etapa o fase consiste en el momento del contacto entre el investigador, profesor u observador con los estudiantes objeto de estudio (en la investigación). Es la aplicación de los instrumentos de investigación, el registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

4. Análisis a posteriori y evaluación. Son los datos recopilados en la experimentación, las producciones de los estudiantes, así como cuestionarios, entrevistas realizadas durante la experimentación. La evaluación o validación son las refutaciones o no, de la o las hipótesis, es decir la confrontación del análisis a priori y a posteriori.

3. DESARROLLO DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

3.1. Primera fase: Análisis preliminar

En esta etapa se indagó sobre los orígenes de las fracciones, encontrándose el papiro de Ahmes o Rhind que data del año 1650 a. C. Tiene 87 problemas que involucran el reparto y la multiplicación de fracciones. En la secuencia didáctica propuesta, se emplea un problema de reparto para lograr emerger el concepto de manera natural, sin usar el término fracción como tal.

Esta investigación se ha enfocado en 4 de los 14 significados que maneja Fandiño (2005). A continuación, se explicarán los cuatro empleados en el presente trabajo.

Las fracciones como *parte -todo* (continua o discreta) son la forma más convencional de utilizar las fracciones, así como de enseñarlas. Si consideramos su notación básica de $\frac{a}{b}$ donde $a < b$, Fandiño expone lo siguiente: qué pasa si la unidad es más de 1, es decir donde $a > b$, por ejemplo en el caso de la pizza. Si tenemos $\frac{5}{4}$ de pizza, la unidad es la pizza o las pizzas; es evidente que requerimos $\frac{1}{4}$ de otra pizza para tener las 5 rebanadas.

En la *Fracción como cociente*, Fandiño comenta que la escritura $\frac{a}{b}$ fue propuesta en términos $parte/todo$: dada una unidad, dividirla en b partes iguales, tomar a ya sea discreta o continua. Esta manera de representar sugiere una división indicada, que no necesariamente se puede efectuar quedando expresada la división, por ejemplo *" objetos y los dividiremos en b partes*.

Partiendo en este contexto tenemos $\frac{3}{5}$ y nos está indicando 3 objetos, los cuales distribuiremos en 5. Pero si se realiza la división expresada tenemos un cociente de 0.6.

Otra manera de leer la escritura $\frac{3}{5}$ (parte/todo) es: $\frac{1}{5}$ tres veces, pero se puede decir también 3 objetos a distribuir en 5 personas**.**

Para poder apreciar con mayor claridad el uso de la fracción como cociente se presenta un ejemplo (figura 1) de Hincapié (2011).

6 niños van a repartirse 5 chocolatinas. Cómo deben hacer la repartición si todos quieren comer la misma cantidad.

Figura 1. Ejemplo tomado del trabajo de Hincapié (2011)

En la fracción como medida, sabemos si en una botella de vino dice $0.750\ l$, entendemos la relación con $\frac{3}{4}$ del líquido, en este caso de un litro. Por esto Fandiño menciona que es una fracción en el sentido primitivo (unidad-todo dividido en 4 partes iguales), por lo tanto, es un número que expresa una cantidad.

Otro caso es una receta de cocina, al darnos la cantidad requerida (ingredientes) para cuatro comensales, ejemplo: verter 750 gramos de harina, 50 gramos de nuez moscada, 50 gramos de sal.

La fracción como *número racional* va enfocado principalmente a la operatividad y equivalencia entre fracciones; sí consideramos al número racional 0.5 podemos decir que es equivalente a $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{k}{2k} \ldots\right]$, donde $k = 1,2,3, \ldots$ Entonces son la clase de equivalencia formada por todas las parejas ordenadas de números $\frac{a}{b}$. Dando una notación más formal decimos que: a ϵ N, b ϵ N-{0} y entre los cuales aparece el par (1,2) o bien $b = 2xa$.

La manera en que se emplean los significados de las fracciones en la propuesta presentada (figura 2) es inicialmente cuando se propone una repartición (parte-todo) de la pizza, la cual es su forma convencional. Después al solicitar la representación se pretende inducir su forma como cociente, ya que la porción que recibe cada niño pertenece a la unidad, dicha representación está asociada a la forma a/b; la representación puede ser gráfica, numérica o literal. Cuando se solicita comparar las respuestas, está inmerso el uso de la fracción como medida. Finalmente, al ubicar en línea recta se espera ubicar a la fracción, aunque lo ideal es ubicarlo en forma decimal.

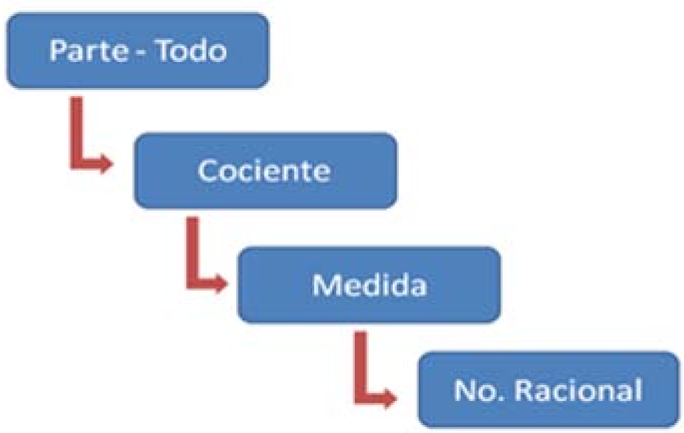


Figura 2. Significados de las fracciones empleados en la secuencia didáctica

Una vez definidos los significados que se emplearán en la secuencia didáctica se dispuso a buscar los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública de México, específicamente de primaria, pues se aplicará en alumnos del primer año de secundaria y es necesario determinar si cuentan con elementos suficientes para poder realizar la secuencia didáctica.

Al empezar con este trabajo de investigación no había suficiente información para poder trabajar con los nuevos planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública, además de considerar que los alumnos a quienes se aplicaría la secuencia didáctica tienen como referente educativo el Modelo Educativo del 2011.

Al iniciar el análisis de los programas y planes de estudio, se determinó que el primer contacto referente a las fracciones es en tercer año de primaria durante el bloque III, de acuerdo con el Mapa Curricular de la Educación Básica (SEP, 2011). Se encuentra al término del segundo periodo escolar comprendido del primer año al tercero de primaria. La edad de los alumnos es 8 años aproximadamente y de acuerdo con Piaget (1978) se encuentran en la tercera etapa, el periodo de las operaciones concretas, la cual comprende desde los 7 años hasta los 11. En esta etapa el niño es capaz de hacer operaciones que tienen relación directa con objetos y a continuación aprenderá a resolverlas de manera abstracta.

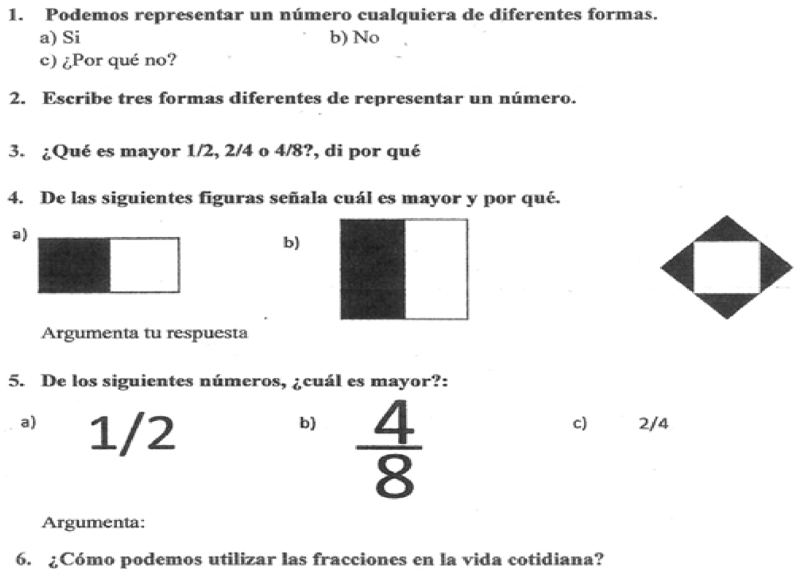
3.1.1 Prueba Diagnóstica

Se diseñó una prueba diagnóstica para garantizar que alumnos (18 alumnos; 11 niños y 7 niñas) contasen con elementos suficientes para la resolución. La prueba diagnóstica consistió en 6 preguntas formuladas de acuerdo a la tabla siguiente.

Reactivo	Tipo pregunta	Justificación	Observación
1	Cerrada	Saber el grado de conocimientos matemáticos y pensamiento numérico.	Al considerarse como respuesta correcta, se prepondera su noción acerca del dominio de conceptos matemática. Si bien no es del todo correcta, se puede complementar.
2	Abierta		
3,4 y 5	Opción múltiple	Determinar su percepción, respecto a las formas de representación (número, geométrica, literal y discreta)	Se pregunta lo mismo, pero se pretende saber si tiene capacidad de análisis para realizar la secuencia didáctica
6	Abierta	Pregunta detonadora del tema	Dominio del tema en la vida cotidiana

Tabla 1. Reactivo, preguntas y análisis para la prueba diagnóstica

Aunque la prueba diagnóstica cumple con criterios para poder cuantificar y ponderar una calificación, no se realizó. Como se aprecia en la tabla, se busca tener elementos para dar pauta e inferir qué tan claro está el concepto de las fracciones y sus nociones en relación a las matemáticas. Los resultados de la prueba diagnóstica nos permitieron inferir que los alumnos de primero de secundaria cuentan con elementos suficientes para la resolución de la secuencia didáctica.


1. Podemos representar un número cualquiera de diferentes formas.
a) Si b) No
c) ¿Por qué no?

2. Escribe tres formas diferentes de representar un número.

3. ¿Qué es mayor 1/2, 2/4 o 4/8?, di por qué

4. De las siguientes figuras señala cuál es mayor y por qué.
a) b)
Argumenta tu respuesta

5. De los siguientes números, ¿cuál es mayor?:
a) 1/2 b) $\frac{4}{8}$ c) 2/4
Argumenta:

6. ¿Cómo podemos utilizar las fracciones en la vida cotidiana?

Figura 3. Prueba diagnóstica diseñada y aplicada

Se muestra en la figura 4 las respuestas dadas por los alumnos en las preguntas 3, 4 y 5 donde se intercambió el orden de las respuestas, la notación o la representación. Se trabajó por género a fin de poder identificar, en caso de existir, alguna diferencia significativa en las respuestas. Sin embargo, se determinó que el comportamiento fue homogéneo.

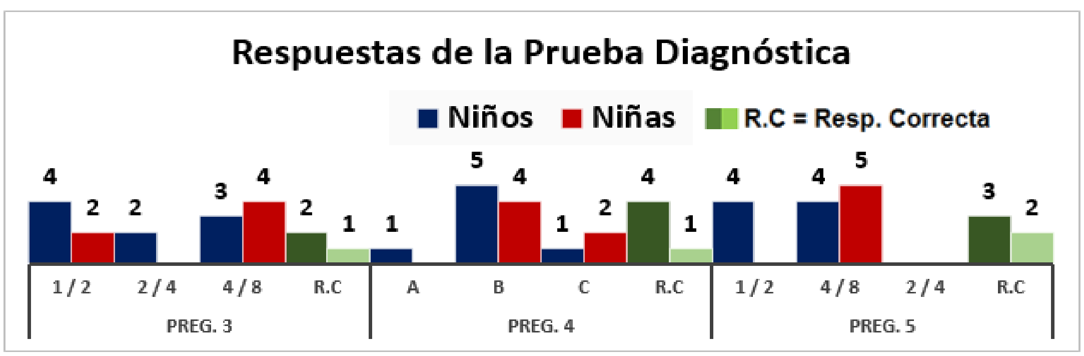


Figura 4. Respuestas de los alumnos en la prueba diagnóstica.

En la siguiente figura se aprecian las respuestas correctas, erróneas y no contestadas, sobre el universo total de alumnos (18) promediando un 50% de aciertos, pues tenemos un 17% de preguntas no contestadas.

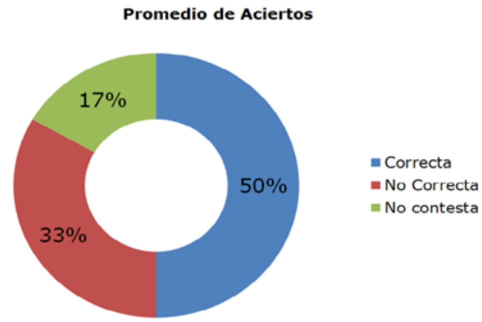


Figura 5. Total de aciertos vs respuestas erróneas de la prueba diagnóstica.

Con aciertos o respuesta correcta se consideró la argumentación del alumno; no existe una respuesta correcta en las primeras dos preguntas, para ejemplificarlo se muestra evidencia de dos respuestas (figura 6) totalmente distintas.

En la primera se da por válido porque para ser iguales tendríamos que hablar del mismo número. Es evidente que no asimiló la pregunta, pero con la prueba diagnóstica se pretendía indagar su forma de pensar en relación con el conocimiento de las matemáticas y el tema de las fracciones. Para el segundo menciona que sí, porque se puede representar en forma maya y romana. Debido al argumento, ambas se consideraron respuestas válidas.

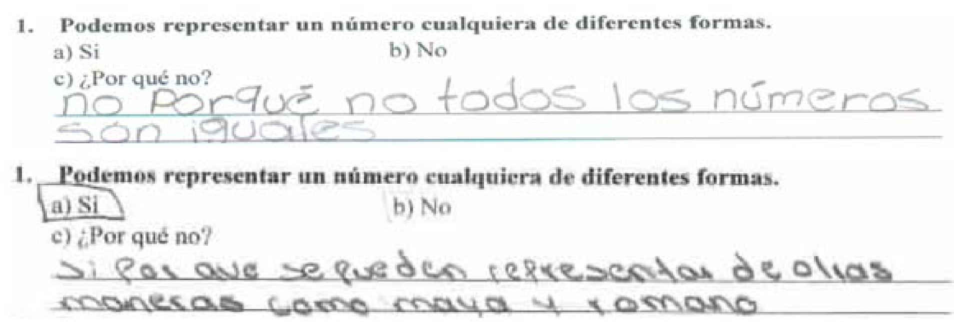


Figura 6. Evidencia "Prueba diagnóstica"

3.2. Segunda etapa: Concepción y Análisis a priori de la secuencia didáctica

Para el diseño de la secuencia didáctica se trabajó en tres tiempos: esbozo, prueba piloto y puesta en escena (figura 7). Además, se contemplaron tres momentos: hacer, analizar y validar.

Inicialmente se plantea el problema de repartir pizza entre una cantidad de niños y se solicita una serie de actividades donde deberán hacer uso de su conocimiento. Es aquí donde se introduce la primera variable didáctica: estar satisfechos, es decir distribuir la pizza de modo que todos los niños estén llenos con la porción recibida. La percepción es diferente en cada niño, por ejemplo, habrá quienes les fascine la pizza y dirán que no basta una; puede existir quizás un niño al que no le agrade la pizza y podrá conformarse con una. Tampoco existe restricción económica (acatarse a un presupuesto), por tanto los alumnos pueden sugerir las pizzas necesarias, repartiendo desde una rebanada de pizza por niño, hasta tres, cuatro o cualquier otra dependiendo la distribución propuesta.

Para la actividad dos, entra en juego el tamaño y equivalencia. Se les plantea la misma problemática, pero se cambia la forma de la pizza y dimensiones. De esta manera se introduce la segunda variable: el tamaño. Es aquí donde empezarán a replantear su respuesta, pues entra en juego ambas variables (estar satisfecho y el tamaño de la pizza).

El esbozo de la secuencia didáctica se puso en marcha con un alumno del segundo grado de secundaria a fin de contar con elementos suficientes para poder modificarla. Se analizó la resolución de la secuencia didáctica para determinar el correcto planteamiento de las preguntas para lograr la comprensión requerida en el desarrollo.

Tras modificar y realizar las correcciones pertinentes en la secuencia didáctica, se llevó a cabo la prueba piloto con cuatro alumnos del segundo año de secundaria. De igual modo que en el esbozo, se analizaron las producciones realizadas por parte de los alumnos y se aplicó un cuestionario de opinión sobre la secuencia didáctica.

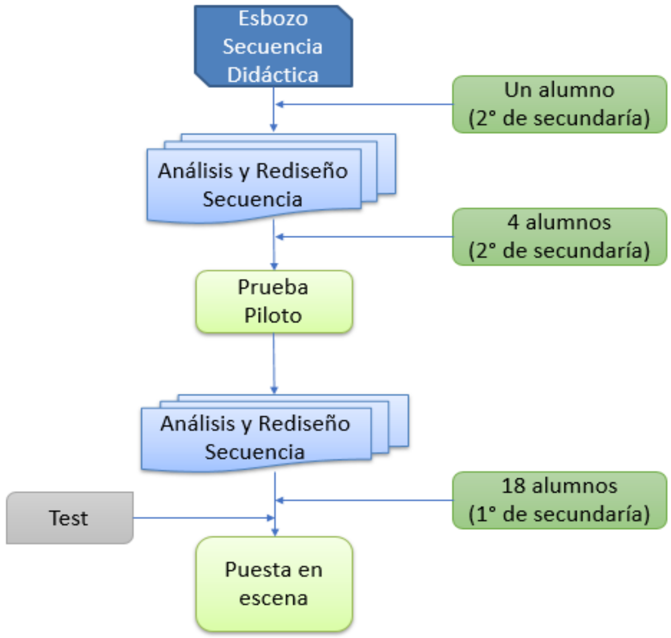


Figura 7. Diseño y concepción de la Secuencia Didáctica.

Esto permitió tener elementos suficientes para modificar por tercera ocasión la secuencia didáctica y poder llevar acabo la siguiente etapa de la Ingeniería Didáctica, la experimentación. El diseño final de la secuencia didáctica quedó así (figuras 8, 9 y 10):

Actividad 1

1.- Juan quiere preparar pizza para el cumpleaños de su sobrino, él estima cuatro rebanadas por pizza para que los niños queden satisfechos ¿Cuántas pizzas debe preparar para que alcancen todos los niños y no sobre mucha pizza? (considera a nueve niños).

- ✓ Haz una representación de la porción de pizza que recibirá cada niño.
- ✓ Si sobra pizza, representa la cantidad.

Cómo la pizza estaba sabrosa, todos quieren más pizza. Si te sobró pizza de la repartición que realizaste, reparte a cada niño de forma que todos alcancen.

- ✓ Intenta ubicar en la siguiente línea, las rebanadas que les tocó a cada niño, la parte que sobró y cómo la repartiste.

Figura 8. Actividad de la Secuencia Didáctica (Hacer)

Actividad 2

2.- Juan decide comprar la pizza en lugar de prepararla, por ello habló a Domino´s y elige la D4, por tamaño y precio... pero le preguntan para cuántas personas o cómo desea que la corten. Puedes ayudarlo para que sepa ¿Cómo serán los cortes de esta? Además, elige distintas especialidades (cuatro quesos, hawaiana, pepperoni y mexicana). Has una distribución procurando que refleje los diferentes tipos de pizza.

- ✓ ¿Cuántas porciones come cada niño?, sin importar la especialidad.
- ✓ Si te sobra pizza, representa la cantidad que sobró.
- ✓ De la cantidad que sobró, distribuye a cada niño para que no sobre pizza.
- ✓ Ubica en una recta numérica la cantidad que comió cada niño, la porción que sobró y cómo la distribuiste.

Figura 9. Actividad 2 de la Secuencia Didáctica (Analizar)

Actividad 3

- ✓ Trabaja con tu compañero, comparen su respuesta y distribución de la actividad 1 y 2. responde lo siguiente: ¿En qué cambia tu respuesta a la de tu compañero? ¿Ambas son correctas?
- ✓ Dibuja dos líneas, en la primera línea representa tu respuesta y distribución por niño de la **actividad 1** y la segunda has lo mismo con la respuesta de tu compañero.
- ✓ Si, quisieras que estén satisfechos, cual distribución eliges ¿la de tu compañero o la tuya?, y explica brevemente.

3.- ¿Consideras que existe otra alternativa?, ¿Cómo debe ser la distribución por niño? (Considera que estén satisfechos y no se desperdicie la comida)

Figura 10. Actividad 3 de la Secuencia Didáctica (Validar)

3.2.1 Análisis a priori de la secuencia didáctica

Se trabajó el análisis a priori determinando posibles soluciones de la secuencia didáctica así como dificultades que pudieran tener los alumnos al momento del desarrollo de esta. Se elaboró la tabla 2, mostrando alternativas o soluciones.

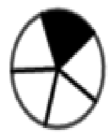
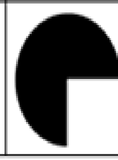
Preguntas	Análisis a Priori (Actividad 1)				
	Sol. 1	Sol. 2	Sol. 3	Sol. 4	Sol. 5
Pizzas necesarias	1 pizza	2 pizzas	3 pizzas	3 pizzas	9 pizzas
Rebanada por niño	1/9	1 / 5	1 / 3	1 / 4	9 pzas.
Sobrante	NO sobra	1 / 5	No sobra	3 / 4	NO sobra
Representación sobrante					

Tabla 2. Posibles respuestas o soluciones para la Actividad 1, de la secuencia didáctica.

Puede haber respuestas similares, ya que la pizza es una para para ambas actividades, como se muestra en la figura 11. Tienen diferentes características que se pueden distinguir por el tamaño y por el número de especialidades. Esta última no impacta mucho pues en la vida cotidiana puede solicitarse hasta cuatro especialidades distintas.

Figura 11. Del lado izquierdo, pizza de la actividad 1 y del lado derecho de la actividad 2

Se puede trabajar en dos formas distintas: una pizza en su totalidad para ambas, respetando así la distribución en ambos casos. La otra posibilidad es visualizar cuatro pizzas diferentes, con opción a la misma división; por eso en este punto se solicita cortes diferentes reflejando las distintas especialidades, a fin de inducir porciones distintas, como se aprecia en la figura 12. En ambas actividades se solicita ubiquen su respuesta en una recta numérica y trabajar así las fracciones en su forma decimal.

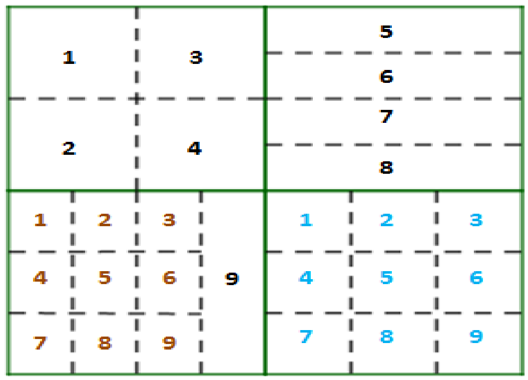


Figura 12. Probable distribución para la actividad 2

Pueden dar como posible respuesta una o dos rebanadas, considerando la rebanada como número entero; dicha rebanada pertenece a la pizza. No es lo mismo decir una rebana de pizza, a ¼ de pizza; esa noción de pertenencia respecto a la unidad denota o contextualiza la denominación de las fracciones. Esta pertenecía a un todo (pizza) lo cual da el sustento requerido para emplear las fracciones.

Al desarrollar la secuencia didáctica pueden utilizar la división, pues jamás se menciona el término fracción; en lugar de esto se emplea el término distribuir. Al emplear la división, el desarrollo de la secuencia será distinto, pues trabajarán con números enteros mientras lo esperado es el uso de las fracciones.

3.3. Tercera etapa: Experimentación

Se trabajó con 18 alumnos en la Secundaria Técnica Industrial No. 65, turno vespertino de primer año, integrado por 7 mujeres y 11 varones, durante un módulo de 45 minutos en el mes de mayo del 2018.

En los primeros 10 minutos se realizó la prueba diagnóstica, a fin de poder determinar el grado de conocimiento respecto a las fracciones, posteriormente la secuencia didáctica en un tiempo aproximado de 35 minutos. Se trabajó en parejas, salvo un equipo que estaba integrado por tres alumnos.

Durante el desarrollo de la experimentación, se entregó inicialmente la prueba diagnóstica, esperando a que todos la concluyeran y después se procedió a la entrega de la secuencia didáctica. No existió intervención del docente durante el desarrollo de la experimentación.

3.4. Cuarta etapa: Análisis a posteriori y evaluación

Inicialmente se planteó la secuencia didáctica de manera individual, sin embargo, al momento de la puesta en escena se trabajó por equipos a fin de poder incrementar la controversia o polémica al dar una respuesta.

Como resultado tenemos la siguiente tabla (tabla 3) lo cual facilita la evaluación o validación entre el análisis a priori versus análisis a posteriori. Para el presente trabajo, solo se aborda evidencia donde se aprecie el desarrollo correcto de la secuencia didáctica o donde aborde cuestiones no tan esperadas y que al inicio fueron desalentadores. Sin embargo, ayudarán para dar soporte a las conclusiones presentadas en el trabajo de investigación.

Podemos apreciar que en las producciones de los alumnos, se trabaja la fracción y la división de forma intuitiva. Antes de sumar es necesario el conteo; del mismo modo, antes de utilizar las fracciones tenemos a la división. La repartición del equipo 5 es correcta, sin embargo, solo menciona el número de las rebanadas (en forma entera) correspondiente a cada niño, careciendo de sentido las fracciones ya que pertenece a un ente (la pizza). Esto le da una denominación respecto a la pizza (la unidad). La cuestión aquí es ¿a cuánto equivale esa rebanada o rebanadas de la pizza?

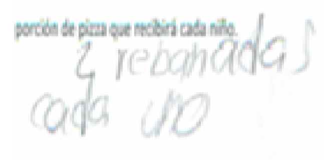
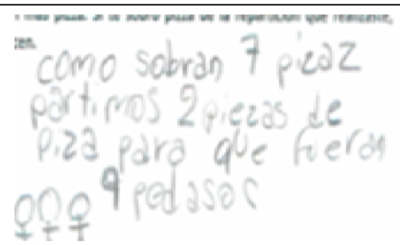
Equipo	ACTIVIDAD 1	
	Análisis a Posteriori	Evidencia
2	Utilizan las fracciones, su respuesta es un noveno (1/9), por ello no trabajan con el sobrante (porque no sobra) al ubicar sobre la recta numérica trabajan con enteros y no con la fracción.	
5	Trabajan con novenos (1/9), pero no utilizan la notación formal de la fracción. Al trabajar en la pregunta -Reparte el sobrante- consideran una pizza de nueva cuenta (cuando **no existió sobrante**). Al ubicar sobre la recta numérica trabajan con enteros y no con la fracción.	
6	Trabajan con octavos (1/8), consideran dos pizzas; existe 7 rebanadas de sobrante. Proponen fraccionar 2 rebanadas para obtener 9, de esta manera no sobra. Más no logran repartir en partes iguales. Al ubicar sobre la recta numérica trabajan con enteros.	

Tabla 3. Análisis y producción de la secuencia didáctica

De acuerdo con la repartición propuesta, puede o no existir sobrante de pizza. Esto es un riesgo considerado ya que al no existir sobrante no podrán realizar la segunda repartición que se solicita. Esto induce la segmentación sucesiva permitiendo así ubicar en la recta numérica. En la tabla 3, se puede apreciar lo anterior con el equipo 6.

Proponen dividir $2/8$, ya que sobran 7 rebanadas y al hacer esto tienen 9 rebanadas de pizza; en primera instancia se puede decir que no es equitativa ya que se solicita todos reciban la misma porción. Sin embargo, en lo cotidiano sucede ocasionalmente que las personas solicitan ayuda, pues consideran no poder terminar con la porción. Así cobra validez la respuesta, pero en el siguiente punto donde requieren ubicar su respuesta en la línea recta, no se logró (figura 13).

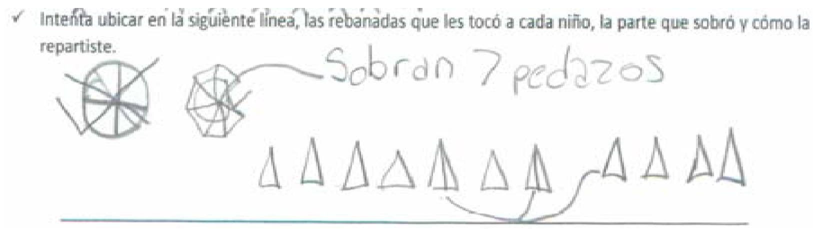


Figura 13. Producción del equipo seis

De manera general ubicar en la recta numérica fue la principal dificultad que tuvieron los alumnos en el desarrollo de la actividad, pues no todos lo hicieron y aquellos que lograron ubicar su respuesta en la recta numérica lo trabajaron con números enteros (figura 14).

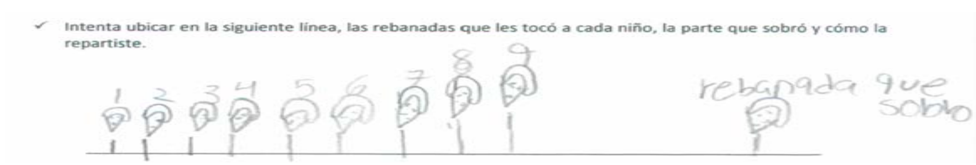


Figura 14. Producción del equipo 7 al ubicar en la línea la distribución y sobrante

Las producciones y análisis de la actividad 2, se pueden apreciar en la tabla 4. Lograron trabajar la actividad, salvo el equipo 7 quien no logró asociar las dos actividades, es decir proponen a 4 personas y con base a esto realizan la división.

La dificultad de ubicar su respuesta y el sobrante sobre la recta prevalece en la mayoría de los equipos, trabajando con enteros.

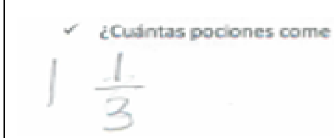
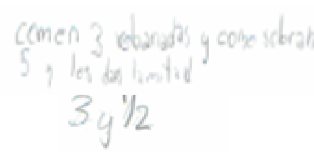
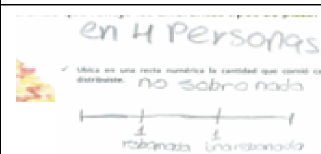
Equipos	ACTIVIDAD 2	
	Análisis a Posteriori	Evidencia
2	Dividen en veinticuatroavos (1/24), consideran 2 rebanadas por niños, sobrando 6 rebanadas de pizza que dividen en cuartos (1/4). Ubican las rebanadas por niño y el sobrante en forma entera.	
4	A cada niño le toca "1 1/3", (consideran como entero al doceavo), por lo tanto, no sobra. Realizan la segmentación en la recta numérica, pero identifican las cantidades en forma entera.	
6	Dividen cada especialidad de pizza en octavos (1/8), consideran 3 rebanadas y media por niño. Al sobrar 5 rebanadas dividen por mitades. No ubican en la recta numérica su respuesta.	
7	Trabajan con 4 personas (no lograron ligar la actividad 1) consideran 2 rebanadas por persona. No sobra. Identifican la respuesta sobre la recta numérica en forma de enteros.	

Tabla 4. Producción y análisis de la actividad 2

3.4.1 Evaluación

En el análisis preliminar se tenía una gran expectativa con la secuencia didáctica diseñada; sin embargo, con la prueba piloto fue evidente que el grado de reflexión no era suficiente.

Al realizar el análisis de las producciones fue evidente ciertas dificultades, como ubicar en la recta numérica su respuesta. Si bien está contemplada desde un inicio como parte del aprendizaje, se integra al final pues se consideran necesario ciertos elementos previos como medida para apreciar el significado de las fracciones como número racional.

Para el caso de la actividad 3, se consideró la institucionalización del conocimiento (significados de las fracciones) pues se solicitó un comparativo entre respuestas (con otro compañero) para que se percataran de diferentes soluciones.

Al comienzo se contempló resolvieran la secuencia didáctica de manera individual. Finalmente, se llevó a cabo en equipos, donde se solicita compararan sus repuestas, pero no existió el intercambio de ideas esperado, ya que al trabajar en equipos y tener una idea (solución o respuesta) desde el comienzo, fue difícil lograr nuevas ideas.

Esto se nota en las producciones (figura 15) de los alumnos, donde realizan las indicaciones, pero al trabajar con la misma respuesta (10 rebanadas) en la actividad 1 y 2, no pueden comparar debidamente. Además de considerar la misma medida, es difícil saber el tamaño de la pizza por medio de la línea..

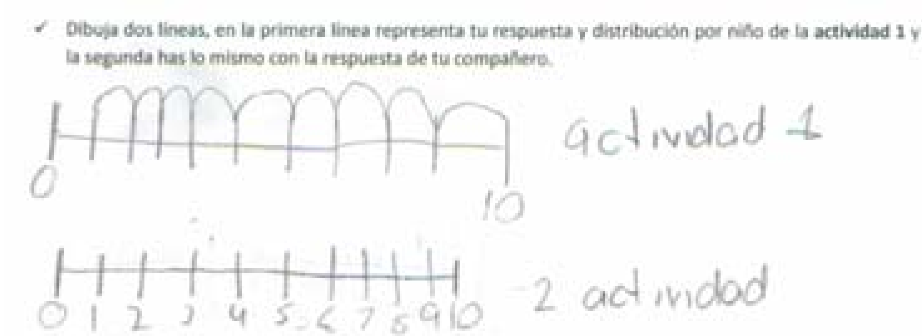
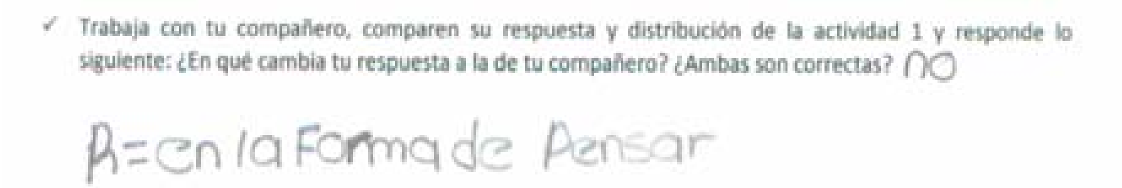


Figura 15. Producción del equipo uno, en la actividad 3

En las preguntas consideradas detonadoras para la institucionalización, se esperaba una mayor amplitud de las respuestas dadas por los alumnos, al determinar en qué o por qué cambia la respuesta o si ambas son correctas y poder contar con elementos necesarios para profundizar, generando la polémica o controversia requerida para la institucionalización. En cambio, son simples y ambiguas en la mayoría de las producciones, como lo apreciamos en la siguiente figura.

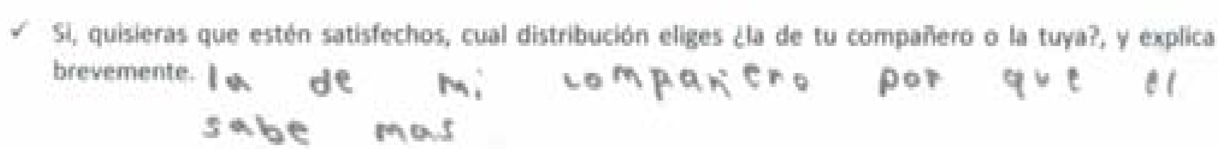


✓ Trabaja con tu compañero, comparen su respuesta y distribución de la actividad 1 y responde lo siguiente: ¿En qué cambia tu respuesta a la de tu compañero? ¿Ambas son correctas? no

R= en la Forma de Pensar

Figura 16. Respuesta del equipo siete

Un caso en particular es la producción del equipo 2 pues se aprecia que existe predisposición a la respuesta del compañero (figura 17), desechando con facilidad la suya. Esta argumentación no es válida debido a la carencia elementos pertinentes para demostrar que la respuesta del compañero sea mejor, ya sea por repartir una porción mayor o por sobrar menos pizzas.



✓ Si, quisieras que estén satisfechos, cual distribución eliges ¿la de tu compañero o la tuya?, y explica brevemente. la de mi compañero por que el sabe mas

Figura 17. Respuesta del equipo dos

4. CONCLUSIONES

Fue evidente que los alumnos antes de pasar a las fracciones mantienen la conceptualización de la unidad como entero, pues mencionan una rebanada de pizza o dos, sin lograr desprenderse de la parte entera y convertirlo en fracción. Esto es un factor importante al momento de ubicar el resultado en una recta numérica, pues en la prueba piloto y puesta en escena lo hacen refiriéndose a la unidad.

Los alumnos trabajan el concepto parte-todo de manera intuitiva, pues no se emplea en la secuencia didáctica el término fracción, al dar su respuesta lo hacen en forma entera. Es decir, sí proponen dividir la pizza en nueve pedazos y mencionan una rebanada o dos rebanadas de pizza, más no el término 1/9 de pizza, pese a realizar la representación gráfica del mismo. Esto influye al ubicar el resultado.

Hay elementos que indican que están acostumbrados, mecanizados, a trabajar las fracciones pues las ligan a las operaciones básicas, en este caso a la división o la repartición. Pero por ejemplo $5/3$, se requiere un tratamiento especial como fracción impropia para poder entender cómo puede existir 5 partes, cuando se habla de tercios.

En la prueba diagnóstica, se ve reflejado que los alumnos no consideran la forma de la figura para realizar el conteo de las partes y así determinar el tamaño de la figura.

En relación con el objetivo de hacer transitar a los alumnos en por lo menos dos significados de los cuatro inmersos en la secuencia didáctica (parte-todo, cociente, medida y número racional), se logra. Sin embargo, no es fácil transitar de la fracción a la recta numérica, pues se requiere un mayor desarrollo del pensamiento numérico.

Logran trabajar las actividades, en algunos casos de manera aislada, pues en la primera actividad su respuesta es en forma entera (una rebanada) y en la actividad 2 al preguntarles la porción por niño lo expresan en fracción o al inicio expresan su respuesta en forma fraccionaría y posteriormente se refieren en forma entera, como una rebanada.

Es preciso mencionar algunos retos en este trabajo de investigación, como las preguntas planteadas: que no fueran excesivas, pero sí claras y precisas, así como los ejercicios, teniendo inmerso cada significado de las fracciones (parte-todo, cociente, medida y número racional) para generar esa transición.

También se pretende ser una pauta para futuros diseños de secuencias didáctica rescatando elementos de esta investigación pues es una realidad que diseñar una secuencia didáctica desde ceros, no es tarea fácil.

5. REFERENCIAS

Acevedo, D., López, M., Guerrero, Y., y Morales, L. (2013). La fracción parte - todo a través de una mirada gráfica. *Educación científica y tecnológica*, edición especial, 291-295.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Castro E. (2008). Pensamiento numérico y educación matemática. En J.M. Cardeñoso y M. Peñas, *Conferencia en XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas*, pp. 23-32,Granada, España.

Douady, R. (1996). *Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collge-seconde.* Francia: Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Duval, R. (1993). *Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 37–65

Gómez, A., y Pérez, A. (2016). Tres enfoques para la enseñanza de los números. *Saber 28(4),* 819-827. Universidad de Oriente, Venezuela.

Fandiño, M. (2005). *Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Magisterio.

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota*. Recuperado el 22 de marzo de 2018, de http://www.bdigital.unal.edu.co/6084/1/43701138.2012.pdf.

Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Madrid: Siglo XXI.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes de Estudio* . Recuperado el 22 de febrero de 2019, de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf