Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL USO DE LA IMPLICACIÓN EN TEOREMAS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Isabel García-Martínez
Universidad Católica del Norte, igarcia@ucn.cl

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

Esta investigación presenta un estudio de la implicación con cuantificadores en el nivel universitario, a partir de los niveles Intra, Inter y Trans del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal, desde la teoría APOE, los cuales están caracterizados por relaciones, transformaciones y conservaciones, respectivamente. Se realizó un estudio de casos con seis estudiantes de magíster en matemáticas, para mostrar qué construcciones y mecanismos mentales evocan cuando se enfrentan a actividades matemáticas del álgebra lineal, que pueden ser resueltas aplicando teoremas. Se evidenció que el uso de teoremas del álgebra lineal se transforma en un medio para construir la implicación asociada al cuantificador universal.

Palabras clave: Teoría APOE, esquema, implicación, teoremas.

1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En esta investigación se presenta un estudio de la implicación en el nivel universitario. Varios autores (Reid, 1992; Epp, 2003; Durand-Guerrier, 2003; Alvarado y González, 2009, 2013) han reportado que los estudiantes universitarios presentan dificultades con la comprensión de la implicación, las cuales están asociadas con diversas problemáticas. La implicación con cuantificadores es de gran relevancia ya que está presente en los teoremas que sustentan las diversas teorías en matemática. Al observar las producciones de algunos estudiantes universitarios, se evidenció que estos presentan dificultad para comprender y efectuar demostraciones de teoremas matemáticos. En la Figura 1 se muestra una evidencia de esta problemática, donde un estudiante confunde una implicación con su recíproca.

Durand-Guerrier (2003) sostiene que las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la implicación están relacionadas con la complejidad de esta noción debido a sus diferentes aspectos. Quine (1950) considera que hay, por lo menos, cuatro tipos de sentencias condicionales, esta clasificación es retomada por Durand-Guerrier (2003) y es la siguiente:

- El entendimiento común (donde, en general, el antecedente falso no se considera).

ISSN: 2594-1046

- El conectivo proposicional (definido mediante la tabla de verdad).
- El condicional lógicamente válido (reglas de inferencia).
- El condicional generalizado (implicación con cuantificador universal).

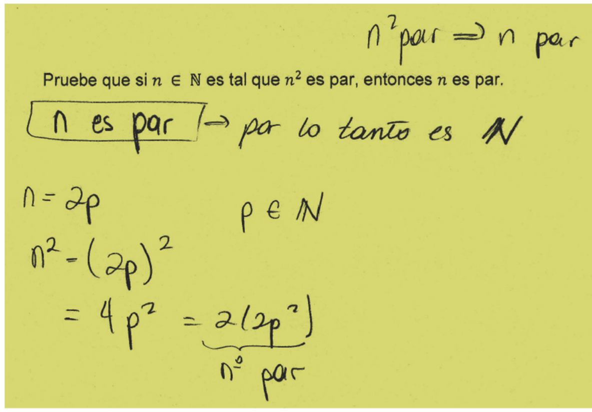


Figura 1: Demostración realizada por un estudiante universitario.

De acuerdo a Durand-Guerrier (2003), para que haya un verdadero entendimiento de la implicación deben considerarse los diferentes tipos de sentencias condicionales.

En la presente investigación se reporta la última de estas cuatro categorías, el condicional generalizado, ya que es la estructura lógica que rige a diversos teoremas matemáticos. En particular se considera en el ámbito del álgebra lineal, por ser éste un tópico abstracto en el cual los estudiantes presentan dificultades.

2. MARCO TEÓRICO

El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría APOE, cuyas siglas significan Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Ésta es una teoría cognitiva, creada y desarrollada por Ed Dubinsky y sus colaboradores, la cual se basa en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014).

2.1. Construcciones y mecanismos mentales

Un estudiante muestra una concepción acción de un conocimiento matemático o de una fracción del mismo cuando necesita de un estímulo externo para resolver un problema que involucre dicho concepto y debe realizar todos los pasos intermedios. Cuando ya no necesita más del estímulo externo y puede realizar algunos pasos mentalmente o puede saltarlos, se dice que dicho estudiante ha interiorizado la acción en un proceso. Dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener otro proceso. Cuando el estudiante percibe el concepto como un todo y puede actuar sobre él se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. La operación contraria a la encapsulación es la desencapsulación, que consiste en volver al proceso que generó un objeto, para poder coordinarlo con otros procesos y encapsularlos en otro objeto. El conjunto de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático determinado es denominado esquema, el cual es una estructura coherente e inacabada ya que un esquema puede asimilar un nuevo objeto y reacomodarlo en el esquema. La coherencia es una herramienta mental que evoca un individuo cuando se enfrenta a un problema matemático determinado. A su vez, un esquema puede ser visto como un objeto, en dicho caso se dice que el esquema se ha tematizado.

La forma como se pasa de una construcción mental a otra se denomina mecanismo mental; algunos de ellos son interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación. En la Figura 2 se muestra la forma cómo están relacionadas las construcciones y los mecanismos mentales.

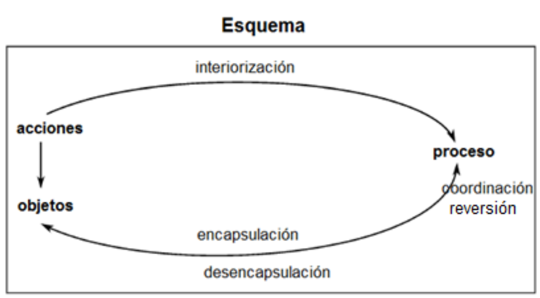


Figura 2: Construcciones y mecanismos mentales (Arnon *et al*., 2014).

2.2.Niveles del esquema

Los esquemas tienen niveles de desarrollo en la mente de un individuo. Cada nivel del esquema de un concepto está caracterizado por la tríada Intra, Inter y Trans. El nivel Intra está caracterizado por la presencia o falta de relaciones (lógicas) en las evocaciones de los informantes al enfrentarse a una actividad matemática; el nivel Inter se caracteriza por las transformaciones que pueda evocar el informante y el nivel Trans, por los invariantes que el estudiante pueda establecer (Parraguez, 2015).

Se indagará el nivel de esquema que evoca un estudiante al enfrentar un problema de álgebra lineal. La pregunta que guiará esta investigación es ¿cuáles son las construcciones y mecanismos

ISSN: 2594-1046

mentales que un estudiante universitario evoca cuando se enfrenta a actividades matemáticas del álgebra lineal, que pueden ser resueltas aplicando teoremas?

3. MÉTODO

Se realizó un estudio de casos (Stake, 2010), aplicando un cuestionario de nueve preguntas a seis estudiantes de magíster en matemática de una universidad de Chile (etiquetados como E1,…, E6), con la intención de mostrar el nivel de esquema que evocan, al enfrentarse a actividades matemáticas del álgebra lineal que pueden ser resueltas mediante la aplicación de teoremas.

Con base en la experiencia de aula en cursos de álgebra, álgebra lineal y matemática discreta, con estudiantes de primer y segundo año de dos universidades chilenas, se levantan indicadores para mostrar las componentes del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal. Estos elementos indicadores son: hipótesis, tesis, conectivos lógicos, cuantificadores y conjunto universal. Un estudiante que usa bien un teorema está mostrando las componentes y sus relaciones.

4. RESULTADOS

Se muestran las preguntas 1 y 3, de las cuales se analizan las respuestas dadas por los estudiantes E2, E5 y E6.

Pregunta 1: ¿Puede encontrar un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ que contenga a los vectores $\mathrm{A}(2{,}5)$ y $\mathrm{B}(5{,}5)$ indicados en la Figura 3?

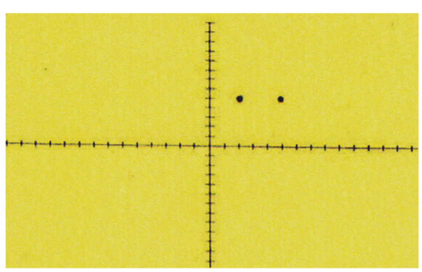


Figura 3: Corresponde a la figura de la pregunta 1 del cuestionario.

Pregunta 3: A partir de la Figura 4, ¿es posible afirmar que el vector w es combinación lineal de u y v?

ISSN: 2594-1046

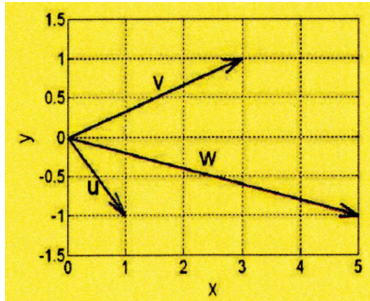


Figura 4: Corresponde a figura de la pregunta 3 del cuestionario.

Estudiante E2

El estudiante no logra responder la pregunta 1, se interpreta que considera que la recta que pasa por los puntos dados no es un subespacio vectorial y los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ (diferentes del espacio nulo) son rectas que pasan por el origen, pero no indica ninguna razón (Figura 5).

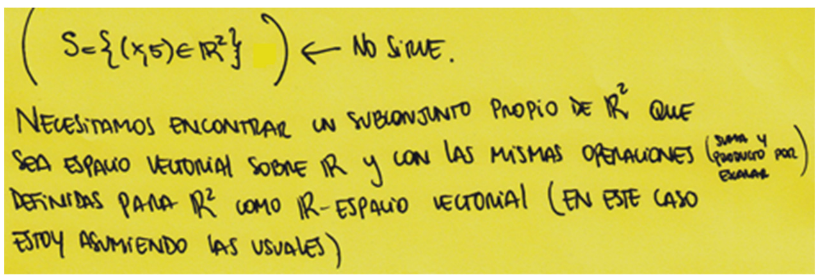
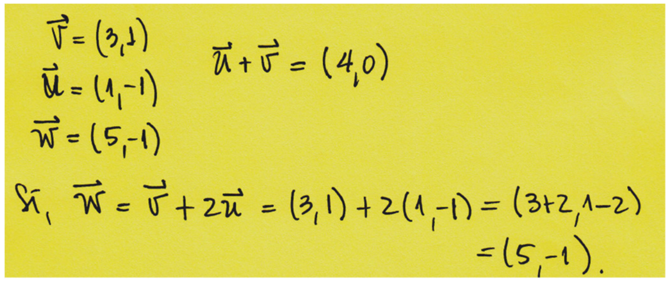


Figura 5: Respuesta de E2 a la pregunta 1.

En la pregunta 3, escribe los vectores como pares ordenados y encuentra una combinación lineal de v y u que es igual a w (Figura 6). No aplica el teorema esperado, que es el siguiente (para $n = 2$) "Un conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$". Sin embargo, aplica correctamente la definición de combinación lineal de vectores (la cual tiene una implicación): "Dados los vectores u, v y w de un espacio vectorial, se dice que w es combinación lineal de u y v, si existen escalares α y β tales que $w = \alpha u + \beta v$."

El estudiante E2 muestra bien instalada la implicación en las definiciones previas a los teoremas, pero ésta no es suficiente para establecer las relaciones esperadas y aplicarlos. Sin embargo, tiene un proceso mental construido que le permite encontrar los escalares para determinar la combinación lineal entre los vectores v y u de manera que sea igual a w.

ISSN: 2594-1046



$\vec{v} = (3,1)$

$\vec{u} = (1,-1)$ $\quad \vec{u} + \vec{v} = (4,0)$

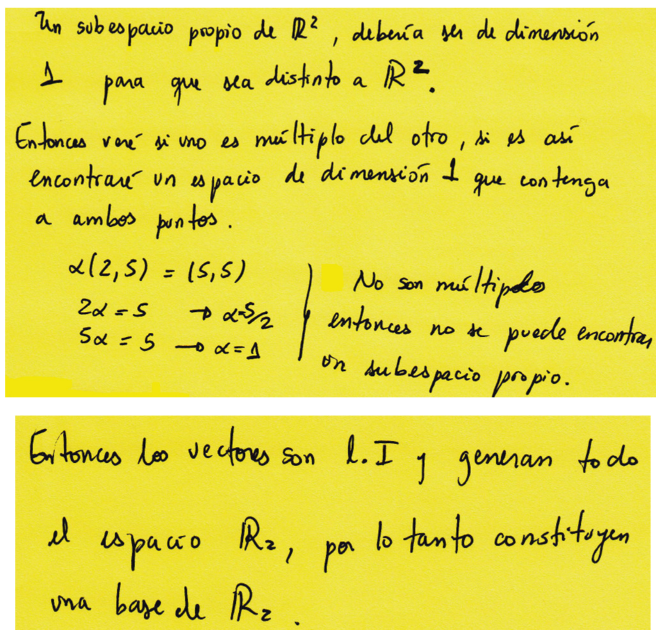
$\vec{w} = (5,-1)$

Sí, $\vec{w} = \vec{v} + 2\vec{u} = (3,1) + 2(1,-1) = (3+2, 1-2)$
$= (5,-1)$.

Figura 6: Respuesta de E2 a la pregunta 3.

Estudiante E5

Para responder la pregunta 1, el estudiante aplica correctamente teoremas, mostrando los indicadores hipótesis, tesis y negación (Figura 7).



Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$, debería ser de dimensión 1 para que sea distinto a $\mathbb{R}^2$.

Entonces veré si uno es múltiplo del otro, si es así encontraré un espacio de dimensión 1 que contenga a ambos puntos.

$\alpha(2,5) = (5,5)$

$2\alpha = 5 \rightarrow \alpha = 5/2$

$5\alpha = 5 \rightarrow \alpha = 1$

No son múltiplos entonces no se puede encontrar un subespacio propio.

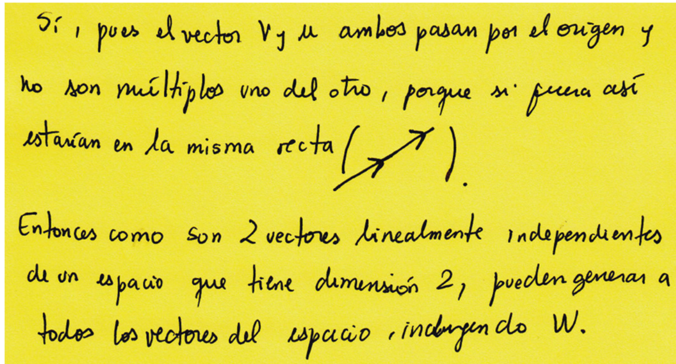
Entonces los vectores son l.I y generan todo el espacio $\mathbb{R}_2$, por lo tanto constituyen una base de $\mathbb{R}_2$.

Figura 7: Respuesta de E5 a la pregunta 1.

Se observa que en la última parte escribe $\mathbb{R}_2$ en lugar de $\mathbb{R}^2$.

Aplica teoremas de manera correcta para responder la pregunta 3 (Figura 8).

ISSN: 2594-1046


Sí, pues el vector V y u ambos pasan por el origen y no son múltiplos uno del otro, porque si fuera así estarían en la misma recta ( ).

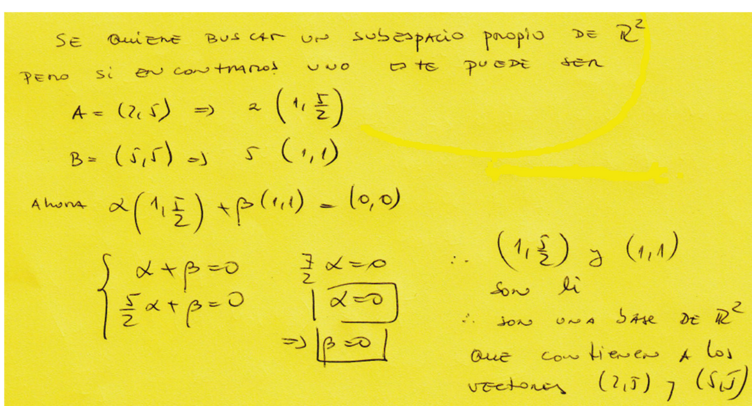
Entonces como son 2 vectores linealmente independientes de un espacio que tiene dimensión 2, pueden generar a todos los vectores del espacio, incluyendo W.

Figura 8: Respuesta de E5 a la pregunta 3.

Los teoremas que aplica E5 tienen muchas definiciones previas (vectores linealmente independientes, vectores linealmente dependientes, combinación lineal de vectores, subespacio vectorial propio), en las cuales también está presente la implicación. Dicho estudiante muestra relaciones entre las definiciones y los teoremas, va encadenando todo y hace que el teorema sea invariante a las situaciones que se le presentan; a partir de lo cual se puede concluir que este estudiante evoca el nivel Trans del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal.

Estudiante E6

Se interpreta que en la pregunta 1, el estudiante afirma que si existe algún subespacio propio debe ser generado por uno de los vectores dados, pero después dice que ellos son una base para $\mathbb{R}^2$. Aquí parece aplicar un teorema (un conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$), pero no concluye nada (Figura 9).


SE QUIERE BUSCAR UN SUBESPACIO PROPIO DE $\mathbb{R}^2$

PERO SI ENCONTRAMOS UNO ESTE PUEDE SER

$A=(2,5) \Rightarrow 2\left(1,\frac{5}{2}\right)$

$B=(5,5) \Rightarrow 5\,(1,1)$

Ahora $\alpha\left(1,\frac{5}{2}\right)+\beta(1,1)=(0,0)$

$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \frac{5}{2}\alpha+\beta=0\end{cases}$ $\quad \frac{7}{2}\alpha=0 \quad \boxed{\alpha=0} \Rightarrow \boxed{\beta=0}$

$\therefore \left(1,\frac{5}{2}\right)$ y $(1,1)$ son li

$\therefore$ son una base de $\mathbb{R}^2$ que contienen a los vectores $(2,5)$ y $(5,5)$

Figura 9: Respuesta de E6 a la pregunta 1.

ISSN: 2594-1046

Este estudiante visualiza la pregunta 3 geométricamente, luego dice que lo verificará algebraicamente (Figura 10), haciendo algo similar a lo realizado por el estudiante E2.

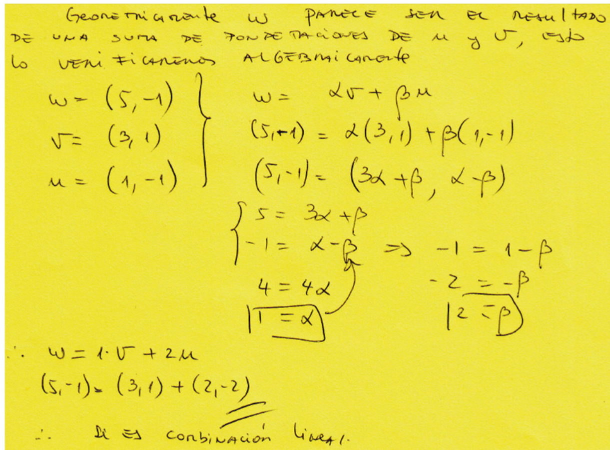


Figura 10: Respuesta de E6 a la pregunta 3.

El estudiante E6 evidencia relaciones entre algunas de las componentes del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal, las que se pueden interpretar como transformaciones.

5. CONCLUSIONES

El estudiante E2 tiene componentes del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal, pero casi ninguna de las relaciones entre ellas, por lo que evidencia estar en un nivel Intra del mismo esquema. En cambio, el estudiante E6 hace transformaciones entre las componentes del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal, aplicando un teorema, pero sin llegar a ninguna conclusión, por lo que muestra un nivel Inter del mismo esquema y el estudiante E5 muestra un nivel Trans al mostrar conservaciones entre las componentes del esquema de la implicación asociada al cuantificador universal.

Se evidencia que el uso de teoremas del álgebra lineal se transforma en un medio para construir el condicional generalizado de la lógica.

Si bien no es el objetivo de esta investigación, no podemos dejar de mencionar el mal uso que se le da al símbolo de implicación, como se puede ver en la Figura 9, donde este símbolo es usado para decir que de una cosa se continúa con otra.

ISSN: 2594-1046

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto FONDECYT Nº 1140801. Una de las autoras es Beneficiaria Beca Postgrado PUCV 2016. Las autoras manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, A., y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 73-84.

Alvarado, A., y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*(1), 5-34.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110*, 886-899.

Parraguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el uso de los conceptos básicos del álgebra lineal. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *Jornadas Nacionales de Educación Matemática XIX*, 48-56. Villarrica: SOCHIEM.

Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Reid, D. (1992). *Mathematical induction. An epistemological study with consequences for teaching.* (Thesis for the degree of Master of Teaching Mathematics). Montreal: Concordia University.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.