



## CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE PRODUCTOS NOTABLES: UN ESTUDIO DE TRES CASOS

Judith Alejandra Graciano Barragán  
*Universidad de Colima, judith.graciano1c@gmail.com*

Lilia Patricia Aké Tec  
*Universidad de Colima, liliapatricia\_ake@uacol.mx*

### Resumen

Esta investigación de corte cualitativo tiene por objetivo identificar el conocimiento de productos notables de los futuros profesores de matemáticas en el marco del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). La investigación es un estudio de tres casos y pretende identificar el proceso de formación de 3 futuros profesores de matemáticas en cuanto a 4 subdominios de dicho conocimiento. Por lo que se refiere al principal interés, este hace énfasis en proporcionar elementos para la formación inicial de los profesores de matemáticas y la mejora en la práctica en el aula. En este sentido, los resultados que se obtuvieron mediante un cuestionario en dos etapas y una sesión de microenseñanza hacen hincapié en las áreas de oportunidad en relación al desarrollo de cada uno de los subdominios del MKT.

**Palabras clave:** Productos notables, conocimiento matemático para la enseñanza, formación de profesores, microenseñanza

### 1. INTRODUCCIÓN

El tema de productos notables resulta de difícil comprensión en el desarrollo del álgebra, por lo que los estudiantes ven el tema como barrera que limita sus estudios (Chang y Tsai, 2005). Al respecto, el aprendizaje de dicha temática es de vital importancia para continuar con éxito en temas que contiene el plan curricular de educación secundaria y media superior, como es el caso de la simplificación de fracciones algebraicas y el cálculo de límites aparentemente indeterminados (Vega, 2010).

En este sentido, García (2010) menciona que el aprendizaje de las matemáticas genera diversos errores y que el éxito depende de la formación de profesores, es decir el trabajo docente se encuentra relacionado con la calidad educativa tal y como lo expresa la OEI y UNESCO en el 2010.

Profundizar en el problema del aprendizaje de productos notables en relación a la formación de profesores de matemáticas es de suma importancia, ya que según Ball, Lubienski y Mewborn (2001), las matemáticas que aprenden los estudiantes y el cómo las aprenden depende de la enseñanza que reciben por parte del profesor. Por lo tanto, es necesario centrarse en la formación de los docentes en relación al conocimiento de productos notables, principalmente porque éste debe saber a profundidad el tema a



enseñar, así como conocer los procedimientos, estrategias y representaciones que favorecen el aprendizaje del estudiante en este tema.

La formación de profesores de matemáticas, es de particular interés para los estudiosos de la Matemática Educativa, ya que a través de esta se puede aportar a la formación inicial de profesores de matemáticas, desde la estructura del programa curricular, hasta la mejora de la práctica del aula (como se citó en Castro, 2015). Es en este sentido, que interesa identificar el conocimiento matemático para la enseñanza de productos notables de los futuros profesores de matemáticas que cursan la Licenciatura en Educación Media Especializado en Matemáticas (LEMEM) de la Universidad de Colima.

Se indaga desde perspectiva de la formación del profesor, algunos de los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008), es decir, en el conocimiento común del contenido, en el conocimiento especializado del contenido (conocimiento del contenido) y el conocimiento del contenido y los estudiantes y conocimiento del contenido y la enseñanza (conocimiento pedagógico del contenido). Para lo cual se propone una investigación guiada por la siguiente pregunta:

¿Cuál es el conocimiento matemático para la enseñanza de productos notables de los futuros profesores de Matemáticas que cursan la Licenciatura en Educación Media Especializado en Matemáticas?

## 2. MARCO TEÓRICO

En la actualidad “el profesor es el encargado principal de enseñar y por ende, es él, quien ha de afrontar profesionalmente las tareas que su labor conlleva, para lo cual debe poseer un conocimiento profesional” (Sosa, 2011, p. 11). Shulman (1986) señaló la necesidad de considerar el papel determinante que desempeñaba el conocimiento del profesor durante los procesos de enseñanza. Es decir, que el profesor de matemáticas como profesional debe desempeñar el conocimiento de la asignatura y además debe desarrollar un proceso de enseñanza adecuado para los estudiantes.

En este sentido, el conocimiento profesional del profesor de matemáticas debe considerar el conocimiento tanto teórico como práctico del contenido en específico. Por tal motivo, se asume que el



conocimiento matemático para la enseñanza es un elemento clave en el conocimiento profesional del profesor.

## 2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza

El concepto de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) es definido por como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el aula” (Hill *et al.*, 2008, p. 374).

Al respecto, la investigación se fundamenta en dicho conocimiento, para de tal manera evitar el fracaso en el tema de productos notables, ya que como se mencionó anteriormente el profesor debe desarrollar no solamente el conocimiento matemático del tema, sino también el conocimiento en relación a la enseñanza del mismo.

El MKT está conformado en dos categorías, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido tal y como se observa en la Figura 1.

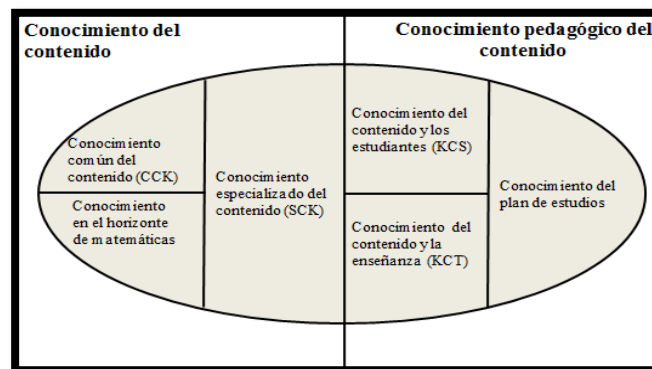


Figura 1: Conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 337)

Como se aprecia en la Figura 1, el conocimiento del contenido se encuentra dividido en tres subdominios, el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y el conocimiento en el horizonte de matemáticas los cuales son descritos a continuación de acuerdo a la interpretación de algunos autores.

- **Conocimiento común del contenido:** Es descrito por Hill *et al.* (2008) como “aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas” (p. 377).



En este mismo sentido Ball, Thames y Phelps (2008) menciona que se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades para resolver las tareas que como profesores les asignan a sus alumnos.

- **Conocimiento especializado del contenido:** Es el conocimiento necesario para la enseñanza, es decir las habilidades propias de la profesión de los profesores de matemáticas. Al respecto, Hill *et al.* (2008) mencionan que este conocimiento “permite ofrecer explicaciones matemáticas de las reglas y los procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, así como también analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema” (p. 378).

En relación, a la comprensión de los métodos inusuales se hace hincapié al razonamiento de las soluciones inesperadas que dan los alumnos para ver si estas podrían funcionar de forma general (Sosa, 2011).

- **Conocimiento del horizonte de matemáticas:** Según Sosa (2011) es considerado como el conocimiento de cierto contenido en diferentes etapas educativas, además de que incluye las habilidades para comprender la importancia del contenido en su trayectoria curricular. De modo similar, es definido como “el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo” (Ball *et al.*, 2008, p. 403).

Por otra el conocimiento pedagógico del contenido se divide en: conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del plan de estudios. A continuación se realiza una breve descripción de estos subdominios.

- **Conocimiento del contenido y los estudiantes:** Según Hill *et al.* (2008) es “el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre cómo los estudiantes piensan, conocen y aprenden este contenido particular” (p. 375).

Es decir, es el conocimiento necesario para predecir lo que los alumnos harán en las tareas asignadas. Así mismo, se relaciona con la identificación de las dificultades y las concepciones erróneas que tienen los alumnos del contenido (Sosa, 2011).

- **Conocimiento del contenido y la enseñanza:** Es descrito por Ball *et al.* (2008), como “un conocimiento que combina por un lado, saber sobre la enseñanza y por otro saber sobre las matemáticas” (p. 401). Por ejemplo, implica discriminar entre los ejercicios para comenzar



un contenido y los ejercicios a utilizar para llevar a los estudiantes a profundizar sobre el mismo.

En este sentido, muchas de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático del diseño de la instrucción e incluso involucra el saber que representaciones son las adecuadas para enseñar cierto contenido.

- **Conocimiento del plan de estudios:** Trata del conocimiento sobre el plan de estudios, en relación a los objetivos, contenidos que se imparten normalmente en los niveles educativos, evaluaciones, orientaciones curriculares, recursos y materiales que permiten a profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes (Ball *et al.*, 2008).

En relación al conocimiento matemático para la enseñanza del tema de productos notables, cabe mencionar que para cuestiones de la investigación tan solo se seleccionaron cuatro subdominios, de los cuales son dos de cada una de las categorías. De la primera categoría, se seleccionó el CCK y el SCK. Mientras que, de la segunda categoría, se eligió el KCS y el KCT.

## 2.2.Productos notables

Cabe rescatar, que la razón principal de la elección de esta temática es debido a la importancia que tiene para continuar con éxito en diversos temas del álgebra que contiene el plan de estudios (Vega, 2010). En este sentido, Acevedo (2007) menciona que los profesores comúnmente enseñan el tema de productos notables de forma mecánica y exigiendo la memorización de las fórmulas. Sin embargo, el tema de productos notables se presta para el enfoque constructivista, a consecuencia de que los alumnos pueden descubrir las fórmulas para cada producto notable o por medio de interpretaciones geométricas comprendan el tema (Acevedo, 2007).

Se parte de la definición de Vega (2010) de que “los productos notables pertenecen al conjunto de identidades algebraicas” (p. 26). Al respecto, hace hincapié que estos son resultado de la multiplicación de ciertos binomios y como toda identidad algebraica los productos notables están compuestos por dos expresiones equivalentes que difieren en su forma. Por lo tanto, a cada uno le corresponde una factorización que nos regresa del resultado de la multiplicación de los binomios a la representación en factores (Vega, 2010).



Para cuestiones de esta investigación se han escogido los siguientes seis productos notables más comunes en la práctica escolar.

- Cuadrado de la suma de un binomio  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Cuadrado de la resta de un binomio  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Binomios conjugados  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Cubo de la suma de un binomio  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- Cuba de la resta de un binomio  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- Binomios con término común  $(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$

### 3. MÉTODO

La investigación tiene un enfoque primordialmente cualitativo, se trata de un estudio de tres casos, en el que se identifica el proceso de formación de 3 futuros profesores de matemáticas en cuanto a 4 subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (CCK, SCK, KCS y KCT). Se aplicó un cuestionario de respuesta abierta en dos etapas como instrumento de recogida de datos, con el cual se realizó un análisis de los subdominios antes mencionados. Después, se realizó una sesión de 50 minutos de microenseñanza sobre binomios conjugados, con la cual, por medio de la observación no participante con grabación de video y audio, se describieron el conocimiento del contenido y los estudiantes y el conocimiento del contenido y la enseñanza. En este sentido, para el análisis de datos se realizó una clasificación de las producciones de los futuros profesores tomando como referencia la literatura (criterios de análisis de cada subdominio), a través del análisis de conceptos y procedimientos empleados. Los participantes son 3 docentes en formación de quinto semestre de la LEMEM de la facultad de Ciencias de la educación de la Universidad de Colima, siendo estos parte de una investigación más amplia, los cuales fueron seleccionados a partir de los resultados del cuestionario, puesto que al inicio dicho cuestionario fue aplicado a 33 futuros profesores.

### 4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos han demostrado que los futuros profesores tienen un conocimiento matemático para la enseñanza limitado, lo cual hace énfasis en algunas áreas de oportunidad en relación del cumplimiento de algunas características que el MKT especifica en su interpretación.



En este sentido, los futuros profesores muestran tendencias en algunos de los subdominios plasmados en el MKT, lo que indica que, aunque muestren características de los demás subdominios, es de suma importancia buscar el desarrollo de éstos, ya que dichas características buscan el aprendizaje significativo. A continuación, se muestran dichas tendencias al igual que las características en relación a cada uno de los subdominios.

En específico el futuro profesor 6, tal y como se observa en la Tabla 1, muestra una tendencia hacia el conocimiento del contenido y los estudiantes, es decir, tiene el conocimiento necesario para identificar las dificultades y las concepciones erróneas que tienen los alumnos del contenido de productos notables, por consiguiente, esto hace referencia a la necesidad de explotar el CCK, SCK y KCT.

Subdominio del MKT	Características del futuro profesor 6
CCK	Identifica los productos notables en la simplificación de fracciones.
SCK	Conoce las dificultades para generalizar a partir de la división y explica procedimientos de forma aritmética, dejando de lado el objetivo del producto notable.
KCS	Identifica las concepciones erróneas de los alumnos en los temas de binomio al cuadrado, binomios conjugados y binomio al cubo. Además de las dificultades que pueden presentar los alumnos en los ejercicios, al igual que como los estudiantes conocen y aprenden el tema.
KCT	Realiza una explicación de binomios conjugados por medio del desarrollo de multiplicaciones, es decir, solo con el seguimiento de algoritmos, pero presenta de forma gráfica el tema para dar muestra a lo que mencionó, es decir comprobó el algoritmo de binomios conjugados. También, muestra ejemplos acordes al momento de la clase y a la necesidad del alumno.

Tabla 1: Características del futuro profesor 6 de cada uno de los subdominios del MKT

Por otra parte, el docente en formación 7 se direccionó hacia el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y los estudiantes, siendo éste el conocimiento matemático para la enseñanza más completo, ya que el futuro profesor tiene el conocimiento necesario para resolver actividades y ejercicios que le asigna a sus alumnos, así como también analizar y comprender métodos inusuales, ofrecer explicaciones matemáticas a reglas y procedimientos e identificar las dificultades y las concepciones erróneas que tienen los alumnos sobre el tema de productos notables. Véase Tabla 2.





Subdominio del MKT	Características del futuro profesor 7
CCK	Identifica productos notables en la simplificación de fracciones, al igual que en el cálculo de límites aparentemente indeterminados.
SCK	Conoce diversos métodos para realizar simplificación de fracciones y no se basa únicamente en la división e identifica los conceptos involucrados en el tema de binomio al cubo y explica procedimientos realizados por el alumno de acuerdo a los productos notables.
KCS	Identifica las concepciones erróneas de los alumnos en los temas de binomio al cuadrado, binomios conjugados y binomio al cubo, además, de las dificultades que pueden presentar los alumnos en los ejercicios. Asimismo, presenta diversos ejemplos de acuerdo como los estudiantes conocen y aprenden el tema.
KCT	Realiza una explicación de binomios conjugados mediante la comparación de binomio al cuadrado y binomios conjugados, por lo que tan solo se basa en el seguimiento de algoritmos. Por otro lado, identifica la dificultad de generalizar un ejercicio aritmético sobre binomios conjugados si este es utilizado al inicio del tema.

Tabla 2: Características del futuro profesor 7 de cada uno de los subdominios del MKT

Por último, el futuro profesor 29 tiende al conocimiento común del contenido de productos notables, pues como se observa en la Tabla 3, tiene el conocimiento matemático y las habilidades para resolver las tareas o actividades de productos notables que como profesor les puede asignar a sus alumnos, lo que indica una necesidad en buscar alternativas para el desarrollo del SCK, KCS y KCT.

Subdominio del MKT	Características del futuro profesor 29
CCK	Identifica productos notables en la simplificación de fracciones, al igual que en el cálculo de límites aparentemente indeterminados.
SCK	Identifica la dificultad para generalizar por medio de la división la simplificación de fracciones y explica procedimientos realizados por el alumno de acuerdo a los productos notables.
KCS	Identifica las dificultades y las concepciones erróneas que pueden presentar los alumnos en los ejercicios o tareas asignadas.
KCT	Realiza una explicación directa del algoritmo de binomios conjugados y sobre la simplificación de fracciones por medio del repaso de la factorización y los productos notables, es decir una explicación únicamente procedimental y expositiva.

Tabla 3: Características del futuro profesor 29 de cada uno de los subdominios del MKT

## 5. CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados tanto del cuestionario como de la microenseñanza se aprecia que el conocimiento matemático para la enseñanza es limitado, pues los futuros profesores no desarrollan





cada uno de los subdominios del MKT, es decir, algunos se encuentran en vías de desarrollo, dado que aún tienen diversas áreas de crecimiento.

En este sentido, y partiendo de la información arrojada en este estudio, es considerado de suma importancia que la institución encargada de la formación inicial de dichos profesores cubra las necesidades que se rescatan. Es necesario que durante los siguientes semestres los futuros profesores desarrollen los conocimientos del MKT para lograr un desempeño profesional que busque desenvolver un proceso de enseñanza adecuado para los alumnos y genere un aprendizaje significativo.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acevedo, H. D. (2007). *Enseñanza de productos notables por medio del aprendizaje cooperativo*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on Teaching mathematics: The unsolve problema of teachers' mathematical knowledge. In V. Richarson (Ed.), *Hanbook of Research on Teaching (4<sup>th</sup> ed.)*. New York: Macmilian.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Castro, E. (2015). Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.
- Chang, C., & Tsai, Y. (2005). An alternative Approach for the Learning of  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . *The 3rd East Asia Regional Conference in Mathematics Education*. Recuperado de <http://ir.ncue.edu.tw/ir/handle/987654321/14569>
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada, España.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Upacking Pedagogical Content knowledge Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal of Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- OEI y UNESCO (2010). *Metas educativas 2021: Desafíos y oportunidades. Informe sobre Tendencias Sociales y Educativas en América Latina 2010*. 115-145. Recuperado de [http://www.siteal.iipe-oei.org/sites/default/files/siteal\\_informe2010\\_capitulo2-pdf](http://www.siteal.iipe-oei.org/sites/default/files/siteal_informe2010_capitulo2-pdf)
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis doctoral no publicada. Huelva, España.
- Vega, D. C. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Granada, España.