UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2012, Número 32, páginas 157-164
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Estudio discreto del movimiento Browniano: Memorias de una hormiga caminante

Gamaliel Salomón Cerda Morales

Resumen

Descubrir nuevas sucesiones matemáticas no parece un trabajo sencillo, y menos aún, orientar su enseñanza y aprendizaje en la educación formal. Este documento muestra como la técnica de ensayo y error, permite generar recurrencias lineales novedosas, entre ellas, una nueva secuencia generalizada de Fibonacci, visualizada a través de la resolución de un problema clásico de paseos al azar.

Abstract

Discover new mathematical sequences seems not an easy job, let alone direct their teaching and learning in formal education. This paper shows how the technique of trial and error, permit generate novel linear recurrences, including a new generalized Fibonacci sequence, viewed through solving a classic problem of random walks.

Resumo

Descobrir novo seqüência matemática não parece uma tarefa fácil, muito menos seu ensino e aprendizagem na educação formal. Este artigo mostra como a técnica de tentativa e erro, gera novas recorrências lineares, incluindo uma nova seqüência de Fibonacci generalizada, visto através da resolução de um problema clássico de passeios aleatórios.

1. Introducción

En 1827 el biólogo inglés, Robert Brown, notó algo que lo dejó perplejo, los granos de polen que estaban en una suspensión acuosa bajo el lente de su microscopio bailaban en todas direcciones, siguiendo caminos zigzagueantes. Probó, para ver, con otros granos de polen, que habían estado almacenando durante un siglo, y constató que bailaban de la misma forma.

El primero que logró adelantar una buena explicación del baile de los granos de polen, que pasó a llamarse desde entonces movimiento Browniano, fue Desaulx en 1877, quien dijo: "Este fenómeno es simplemente un resultado de la agitación térmica de las moléculas de agua". Efectivamente, cada partícula en suspensión en una solución acuosa, que no está tan quieta como parece, es bombardeada aleatoriamente, sin cesar, desde todos lados por las moléculas de agua. Si la partícula es suficientemente pequeña, estos impactos la propulsarán en una dirección, y en seguida en otra, en forma errática e imprevisible. Estos pequeños y aleatorios saltos generan entonces el movimiento browniano.

La primera teoría matemática del movimiento browniano fue propuesta por Albert Einstein en 1905. Por este trabajo, recibió el premio Nobel de Física. Hoy en día, las aplicaciones de los modelos matemáticos del movimiento browniano son ubicuas, por ejemplo, en el tratamiento de imágenes médicas, robótica, economía, construcciones fractales, simulaciones gráficas, ecología, propagación de aerosoles, etc. Matemáticamente, podemos mirar el movimiento browniano como un paseo al azar en que la partícula paseante da en cualquier instante un salto de dirección y magnitud arbitraria.

En este documento, estudiaremos por ensayo y error, un análogo discreto de este tipo de movimientos, en que nuestra partícula da saltos de la misma magnitud a sitios prescritos de su espacio ambiente. En particular, consideraremos el caso de un espacio con sólo cuatro sitios, y veremos que incluso este fenómeno matemático permite modelar sistemas interesantes de la vida cotidiana.

2. Diferentes visiones de un problema probabilístico

Es común en la enseñanza de las matemáticas, introducir el análisis y cálculo de probabilidades con la consigna de paseos al azar, es decir, interesándose en el devenir de un ser u objeto que se pasea al azar por algún espacio o estructura.

Un ejemplo imaginable de paseo al azar es el siguiente, que proponemos como un módulo de trabajo dirigido al estudiante de enseñanza secundaria (15-16 años):

> *Una hormiga se pasea alegremente por los vértices de un tetraedro regular (ver figura 1), caminando cada vez desde un vértice a cualquiera de los otros tres, con igual probabilidad.*

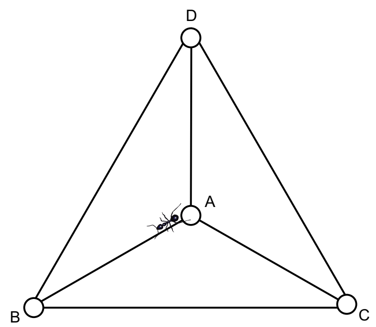

Figura 1. Grafo planar del tetraedro regular.

> ***Interrogante:***
> *Si la hormiga reside inicialmente en el vértice A del tetraedro, ¿Dónde estará después de su primera caminata, segunda caminata, tercera caminata,..., n-ésima caminata?*
> *¿A qué vértice(s) conviene apostar con el tiempo?*

Podemos resolver la problemática desde un punto de vista determinista, imaginemos que en lugar de la hormiga caminante y aleatoria, nos encontramos con la siguiente situación, en la que no vemos azar, sino que un futuro totalmente determinado. Una partícula, de masa 1, se encuentra en el vértice A del tetraedro (figura 1), y de pronto, se fisiona en tres partes iguales, que van a parar, cada una, a uno de los otros tres vértices. En seguida, cada tercio de partícula sufre el mismo destino, dividiéndose en tres partes, que van a aterrizar a los otros tres lugares, y así sucesivamente. Este proceso de fisión continúa indefinidamente. ¿Cuál es la repartición de masa que se va produciendo en los vértices del tetraedro, instante tras instante. ¿Qué ocurre a la larga con la fisión de masa?

¿Ves alguna similitud entre los dos problemas? Podrías haber pensado que como la hormiga no sabe a cuál de los otros tres vértices caminar, se divide en tres, de modo que cada tercio de hormiga va a cada uno de los vértices restantes. Notar que las fracciones de hormiga, o de partícula, que van quedando en los distintos vértices te dan exactamente las probabilidades de presencia de la hormiga en dichos vértices. ¿Estarás de acuerdo entonces que el hecho de visualizar un tercio de hormiga en un vértice equivale a observar muchas veces la pulga, después de una caminata, aproximadamente un tercio de las veces en ese vértice?

3. Una solución por ensayo y error

3.1. Conjeturas a priori en el camino de la hormiga

Si etiquetamos los vértices del tetraedro como indica la figura 1, y sabemos que inicialmente la hormiga reside en el vértice A, podemos indicar a simple vista la probabilidad de encontrarnos con la hormiga en los vértices del tetraedro, analizando sus primeras caminatas. Notar que la probabilidad de encontrarnos con la hormiga en los vértices B, C y D es la misma. Lo anterior, se describe en la tabla 1, donde IP(X) denota la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice X, y X recorre los vértices A, B, C y D del tetraedro.

Tabla 1. Probabilidades en las primeras caminatas de la hormiga

Caminata	IP(A)	IP(B)	IP(C)	IP(D)
0	1/1	0/1	0/1	0/1
1	0/3	1/3	1/3	1/3
2	3/9	2/9	2/9	2/9
3	6/27	7/27	7/27	7/27
4	21/81	20/81	20/81	20/81
5	60/243	61/243	61/243	61/243

Numéricamente, la probabilidad de encontrar a la hormiga en los vértices del tetraedro tienden a equipararse, acercándose cada vez más al valor 0,25 ¿Cómo podemos comprobar matemáticamente esta aseveración?

Algo aquí podemos advertir, la suma total de las cuatro probabilidades es 1, esto se podría llamar “ley de conservación de la hormiga”. Un ejemplo concreto, la probabilidad de estar en el vértice B:

Tabla 2. Probabilidades de estar en el vértice B.

Caminata	0	1	2	3	4	5
IP(B)	0	1/3	2/9	7/27	20/81	61/243

Según tabla 2, el denominador es una potencia *n*-ésima de 3, y el numerador, un término de la secuencia (0, 1, 2, 7, 20, 61,…). Verifiquemos que los términos de la secuencia anterior, forman exactamente una sucesión recursiva.

Si lo anterior es cierto, al cabo de su *n*-ésima caminata, podemos comprobar con exactitud la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice B, y los términos de la secuencia en función del estado anterior. Entonces,

$$\left.\begin{array}{r} 1 = 3\cdot 0 + 1 \\ 2 = 3\cdot 1 - 1 \\ 7 = 3\cdot 2 + 1 \\ 20 = 3\cdot 7 - 1 \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = 3b_{n-1} + (-1)^{n+1}, n \geq 1 \qquad (1)$$

donde b_n denota el término *n*-ésimo. Miremos algebraicamente lo anterior:

$$b_1 = 1 = 3^{1-1}$$
$$b_2 = 3b_1 - 1 = 3 - 1 = 3^{2-1} - [3^{2-2}]$$
$$b_3 = 3(3b_1 - 1) + 1 = 3^2 b_1 - 3 + 1 = (3^{3-1} + 3^{3-3}) - [3^{3-2}]$$
$$b_4 = 3(3^2 b_1 - 3 + 1) - 1 = 3^3 b_1 - 3^2 + 3 - 1 = (3^{4-1} + 3^{4-3}) - [3^{4-2} + 3^{4-4}]$$
$$b_5 = 3(3^3 b_1 - 3^2 + 3 - 1) + 1 = 3^4 b_1 - 3^3 + 3^2 - 3 + 1 = (3^{5-1} + 3^{5-3} + 3^{5-5}) - [3^{5-2} + 3^{5-4}]$$

....

La secuencia b_n depende de la paridad de *n*. Si *n* es par, el término *n*-ésimo es descrito por:

$$b_n = \left(\sum_{k=1,3,\ldots,n-1} 3^{n-k} \right) - \left[\sum_{k=2,4,\ldots,n} 3^{n-k} \right]. \qquad (2)$$

A partir de este resultado inicial, calcular la probabilidad de que la hormiga se ubique en el vértice B, sigue siendo una fórmula matemáticamente aceptable desde un punto de vista exploratorio. Primero, dividamos el término *n*-ésimo de b_n por 3^n:

$$\frac{b_n}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 2\left[\sum_{k=2,4,\ldots,n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right].$$

Al primer sumando, restamos los números de exponente par agrupados dos veces. Considerando en el segundo sumando, el cambio de variable $k = 2t$. Por la simple factorización del exponente, obtenemos:

$$\mathrm{IP}(B) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 2\left[\sum_{t=1}^{n/2} \left(\frac{1}{9}\right)^t \right] = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right). \qquad (3)$$

El caso impar es análogo, y se resuelve de la misma manera. En ambos, la probabilidad de estar en los vértices B, C y D está dada por $\frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

De esto, la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice A, está dado por:

$$\mathrm{IP}(A) = 1 - 3\mathrm{IP}(B) = 1 - \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right). \qquad (4)$$

Sobre la problemática del juicio final, existe una relación poco estudiada en la escolaridad, reflejo del concepto de límite sobre la sucesión obtenida, y cuyo valor representa una respuesta consistente a la memoria de nuestra hormiga. Esto es, deducir que la probabilidad de estar en el vértice B, C o D, tiene valor 1/4, cuando *n* tiende a infinito. Aparentemente, desde un punto de vista práctico, la respuesta es poco sugerente, sin embargo, en el ámbito determinista, no tiene discusión, pues la distribución de una partícula de masa 1, con el tiempo tiende a equiparse en los vértices del grafo planar del tetraedro regular.

3.2. Una representación algebraica

Es de común conocimiento en educación, que el estudio de series de Taylor, permite visualizar el comportamiento gráfico de una función determinada, dado su tipo diferenciable en un punto del dominio. En nuestro caso, recurrir al estudio de una serie o suma infinita, permite establecer una relación entre el concepto recursivo de una secuencia y su aproximación funcional. Primero, descubramos un patrón en la sucesión b_n que aparece en la tabla 2, y es el denominador de IP(B).

Sea a_n el numerador de IP(A) y dado que $a_n = 2b_{n-1}$, para todo $n \geq 1$ (viendo tabla 1). Podemos utilizar la relación:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & n=1 \\ 2b_{n-1}+3b_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}, \qquad (5)$$

para definir una función polinomial f(x) de grado infinito, que corresponde a la suma de los términos $b_n x^n$, con *n* no negativo. Bajo esta condición, y por simple desarrollo algebraico, la función f es:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n = x + \sum_{n\geq 2} b_n x^n = x + \left[2\sum_{n\geq 2} b_{n-1}x^n + 3\sum_{n\geq 2} b_{n-2}x^n\right]. \qquad (6)$$

Despejando en función de x, obtenemos:

$$f(x) = x + 2xf(x) + 3x^2 f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-2x-3x^2}. \qquad (7)$$

Esta función tiene asíntotas verticales $x=-1$ y $x=1/3$. Una descomposición parcial f(x) está dada por:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(1-3x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{1-3x},$$

donde a y b son números reales.

Es fácil notar que $a=-1/4$ y $b=1/4$. Finalmente, todo se reduce a estudiar las funciones de descomposición en f(x), las que son series de potencias, centradas en cero; y deducidas de forma general sobre la suma de x^n, con $n \geq 1$. Es así, como obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{1-(-x)} + \frac{1}{1-(3x)}\right] = \frac{1}{4}\left[-\sum_{n\geq 0}(-x)^n + \sum_{n\geq 0}(3x)^n\right] = \frac{1}{4}\left[\sum_{n\geq 0}[3^n-(-1)^n]x^n\right],$$

y la sucesión que regula el comportamiento analítico de f(x) es precisamente

$$b_n = \frac{3^n-(-1)^n}{4}, \forall n \geq 0. \qquad (8)$$

Nuevamente, la aproximación por Taylor permite desarrollar una regla general que es múltiplo de 1/4, y que al ser dividida por la potencia *n*-ésima de 3, representa un factor neutro en el producto de probabilidad estudiada.

3.3. Un ejemplo análogo sobre el cuadrado

Un ejemplo concreto es observable si nuestra hormiga se mueve a través de los vértices de un cuadrado. En este caso, la hormiga camina a alguno de los dos vértices contiguos con igual probabilidad, el proceso se reitera con cada caminata, al igual que en el tetraedro, pero esta vez solamente con dos opciones. La pregunta es, ¿Cuál es la probabilidad de que la hormiga esté en uno de los cuatro vértices, luego de *n* caminatas?

Tabla 3. Primeras 6 caminatas en el cuadrado

n	IP(1)	IP(2)	IP(3)	IP(4)
0	1	0	0	0
1	0	1/2 = 0,5	0	1/2 = 0,5
2	2/4 = 0,5	0	2/4 = 0,5	0
3	0	4/8 = 0,5	0	4/8 = 0,5
4	8/16 = 0,5	0	8/16 = 0,5	0
5	0	16/32 = 0,5	0	16/32 = 0,5

Las conclusiones son inmediatas, la probabilidad de que la hormiga esté en un vértice del cuadrado es 0,5 ó 0. Para un número de recorrido par, la probabilidad de estar en los vértices 1 y 3, es de 0,5; mientras que en los otros, es cero. Y si el número de recorrido es impar, la probabilidad de estar en los vértices 2 y 4, es 0,5.

4. Un paso por el álgebra de matrices

Una deducción entorno al uso de sistemas lineales, aproxima nuestro problema de la hormiga caminante. Si representamos los estados en el tiempo (*n+1*) de la hormiga para los vértices A, B, C y D, respecto al numerador:

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

donde $3^n j_n$ denota la probabilidad de estar en el vértice j, y $j \in \{A, B, C, D\}$

En este caso, el vector de estado es (A_n, B_n, C_n, D_n), y su matriz de transición P es simétrica, de ceros en su diagonal y 1/3 en los demás lugares. Para analizar el comportamiento del sistema, utilicemos el vector inicial $(1,0,0,0)$ (tabla 1). De esto, la matriz de transición, define una transformación lineal invertible y diagonalizable.

Su polinomio característico $x^4 - (2/3)x^2 - (8/27)x - 1/27$ tiene valores propios $\lambda_1 = -1/3$ y $\lambda_2 = 1$, y los subespacios propios asociados son

$$W_1 = \langle (-1,1,0,0); (-1,0,1,0); (-1,0,0,1) \rangle \text{ y } W_2 = \langle (1,1,1,1) \rangle,$$

respectivamente.

Precisamente, son estos vectores los que determinan la matriz conjugada G a P, tal que $G^{-1}PG = D$, donde D es la matriz diagonal [-1/3, -1/3,-1/3, 1]. Un simple cálculo aritmético, nos permite determinar la potencia *n*-ésima de la matriz de transición, que define el comportamiento que deseamos predecir.

De esta manera, una argumentación sobre el desarrollo de las potencias de P, equivale a considerar:

$$P^n = GD^nG^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1/3)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo valor, según el estado inicial, respeta la primera columna del producto anterior, y es precisamente un análisis análogo a lo realizado hasta ahora. Por lo tanto,

$$(A_n, B_n, C_n, D_n) = \frac{1}{4}\left(1+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n, 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). \qquad (10)$$

5. Conclusión

Un vector propio de la matriz de transición, es precisamente $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, lo que permite analizar el comportamiento estable sobre la igualdad que negamos a creer en primera instancia. Por ejemplo, sobre una situación real, cuatro personas que tienen un vaso con un litro de jugo, y deciden repartir equitativamente a sus vecinos cercanos en igual porción, tienden a equipar la entrega, aunque la fisión no resulte tan exacta (al igual que el concepto de infinitud), ¿Podría ser comprobado matemáticamente este comportamiento? ¿Cuál es su veracidad?

Una pregunta interesante, sería generalizar para un polígono de *n* lados, e incluso sugerir una representación piramidal modificada. Es decir, podemos tratar de cambiar los caminos de la hormiga, y suponer que algunos de ellos están prohibidos (como muestra la figura 2).

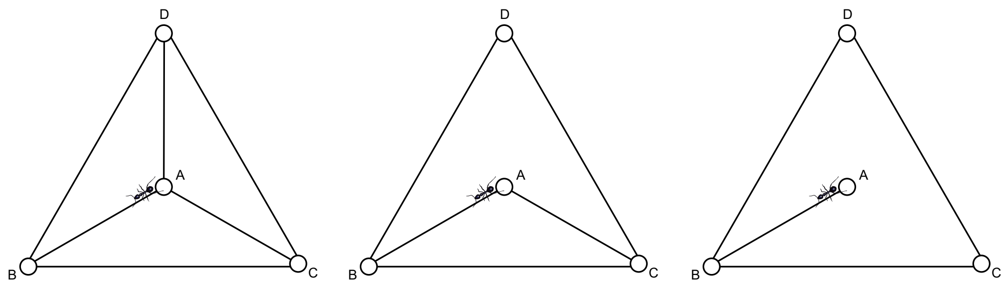

Figura 2. Tipos de caminos en el tetraedro regular.

¿Cuántas soluciones hay en cada caso?, ¿Cuál es la probabilidad de estar en el vértice A, si solamente se camina a B?, o ¿Cuántas sucesiones se pueden generar en los tipos anteriores?

Estas interrogantes son sugeridas aquí, como mecanismo de aprendizaje y enseñanza en educación secundaria. No tan sólo, como forma discreta de analizar un problema de tipo probabilístico, sino como herramienta matemática para verificar conjeturas que suelen ser advertidas en este tipo de contenidos.

Bibliografía

Brousseau, G. (1988). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Sáiz, (compiladores), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Argentina, Paidos Educador.

Caro, P., Cognigni, R. (2012). Ideas para Enseñar: Modelización de problemas estadísticos mediante grafos, *UNIÓN*, Revista Iberoamericana de educación matemática, 31, pp.153-160.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

González, P., Soto-Andrade, J. (2002). *Matemática Activa*, Tercero año medio, Ministerio de educación, Chile. Editorial Mare nostrum, Santiago.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es un número? *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *19*, pp. 34-46.

Gamaliel Salomón Cerda Morales: Magíster en Matemáticas y Licenciado en Educación de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Actualmente, estudiante doctoral en ciencias con mención en matemáticas en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile, becado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT. Profesor asistente jornada completa en el instituto de matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Correo electrónico: **gamaliel.cerda.m@mail.pucv.cl**