Nora Zon
Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina
nzon@exa.unrc.edu.ar

Análisis a priori de una secuencia sobre procesos recurrentes para la Educación Básica

Resumen

En este artículo se presenta un estudio desarrollado en el marco de una investigación sobre la problemática didáctica en torno a la generalización, en particular sobre algunas cuestiones ligadas con la recurrencia. Tomando como base la Teoría de las Situaciones, se elabora una secuencia didáctica destinada a alumnos de la EGB que aborda el tratamiento de los procesos de generalización mediante el uso de números triangulares y cuadrados. En la secuencia se trabaja sobre casos particulares y se apunta al establecimiento de fórmulas generales cerradas, el paso inductivo, la elaboración de conjeturas, la utilización de la escritura algebraica y la configuración geométrica como apoyos para la construcción y validación de conjeturas. Cuando el docente piensa en su trabajo frente a los alumnos, selecciona las tareas que estos deben realizar. Si bien esta selección es un punto importante de la planificación, es imprescindible realizar un análisis a priori de la situación. Así, lo que se trata de hacer es un análisis de lo probable, de las interacciones de los alumnos con el problema y de una posible intervención del docente. Este último colabora tanto en la devolución de la secuencia como en el progreso de los alumnos ante las dificultades que se pueden presentar.

Palabras clave: situación didáctica, procesos de recurrencia, análisis a priori, estrategias.

Abstract

This paper reports on a study carried out to explore generalisation in didactics. More precisely, issues related with recurrency. Departing from Situations Theory, a didactic sequence addressed to EGB students was planned. The sequence dealt with generalisation processes by using triangular and square numbers. In the sequence, particular cases were studied. The aim was to establish closed general formulas, inductive thinking, hypothesising, use of algebraic writing and geometric configuration as scaffolding for the elaboration and validation of hypotheses. Planning a sequence implies anticipating, making an a priori analysis of the situation. This means anticipating what is probable as to students' interaction with the problem and planning possible teacher intervention. It is understood that this will help to improve the sequence and students' performance.

Keywords: *didactic situation, recurrency processes, a priori analysis, strategies.*

Introducción

Este artículo forma parte de una investigación sobre un "Estudio didáctico de procesos recurrentes en la Educación Básica". El interés de la misma radica en los procesos de generalización, entendiendo que estos se encuentran en el corazón de toda actividad matemática, por lo que se propone un estudio didáctico de dichos procesos, en particular aquellos que involucran la recurrencia.

Este estudio se focaliza en el tercer ciclo de la Educación General Básica, y pretende contribuir a la comprensión didáctica de distintos fenómenos relacionados con el desarrollo en las aulas de actividades que involucren procesos de generalización. Interesa estudiar las diferentes estrategias en el espacio colectivo de la clase de matemática.

Se pueden distinguir diferentes aspectos en las actividades de generalización:

- la búsqueda de generalidades, en relación con un conjunto de ejemplos;
- la generalización de soluciones y resultados y,
- la investigación de la validez de generalizaciones efectuadas, incluyendo aquí la determinación del posible dominio de validez de la generalización.

Inscribimos esta investigación en el marco teórico de la Teoría de las Situaciones (Brousseau, 1986) y tiene por objetivo estudiar la problemática didáctica en torno de la generalización, especialmente en cuestiones ligadas con la recurrencia. En particular, el objetivo de este artículo es realizar el análisis a priori de una secuencia didáctica para el tratamiento de los procesos de generalización mediante el uso de números figurados.

La investigación incluye las siguientes fases:

- *Análisis preliminares:* se procede a realizar un estudio matemático de los procesos recursivos, que son aquellos que se definen en función de sí mismos; un estudio sobre las posturas de diferentes matemáticos y psicólogos sobre el razonamiento por recurrencia; una búsqueda de antecedentes didácticos sobre el tema y un estudio bibliográfico sobre generalización.

Estos estudios llevan a confirmar que uno de los procesos esenciales de la actividad matemática, y de los que a menudo se ponen en juego, es la generalización. Esta puede ser una de las vías de entrada al álgebra, tanto para poder expresar la generalidad como para proveer de un dispositivo de validación de conjeturas apoyado en las reglas de transformación de escrituras.

La tarea de encontrar términos generales y llegar a su expresión simbólica resulta, a menudo, difícil para muchos alumnos. Cuando se realiza por primera vez, si no se hace un tratamiento didáctico adecuado, puede paralizar iniciativas durante mucho tiempo. La dificultad estriba a menudo en encontrar el modo de abordar y enfocar el problema, sobre todo cuando se trata de los primeros contactos con sucesiones.

Una de los conflictos más frecuentes aparece al intentar presentar la expresión simbólica de una relación, ya que en el momento de escribir letras y relaciones es posible encontrar errores del tipo de los de traducción, que aparecen cuando se simbolizan las expresiones verbales de los problemas.

La generalización es una potente herramienta para entender y explicar hechos y relaciones que afectan a un cierto número de situaciones distintas, pero, como ocurre con otros conceptos, puede también provocar errores debidos a un uso incorrecto o abusivo.

Estos errores son intentos de adaptar reglas o propiedades a una situación distinta de aquélla en la que se usan habitualmente. Es una forma de generalizar: ampliar el ámbito de aplicación de una ley, de un concepto, extendiéndolo a un campo donde no se había definido, ya que esta extensión debe hacerse comprobando su validez en la nueva situación.

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente,

al analizar libros de texto de uso cotidiano en las escuelas de nuestro país correspondientes al 8[vo] y 9[no] año de la EGB, se encuentran tareas con el fin de hallar la construcción de una sucesión. A menudo en las situaciones planteadas no se enuncia explícitamente la regularidad que permite continuar la secuencia, y se transforman entonces en problemas donde el alumno debe "descubrir" la generalidad, como si estuviera unívocamente asociada con los ejemplos que se presentan.
Una de las tareas encontradas en los textos mencionados es:
Hallar el término general de la sucesión 1; 3; 7; 13; 21;...
- En esta sucesión puede ocurrir que los alumnos que tratan de generalizar se queden con una propiedad que verifican todos los ejemplos y dar como ley que "todos los números son impares".
- La conjetura de que "para pasar de cada uno al siguiente se multiplica por 2 y se suma uno", cierta para los tres primeros términos, puede dejar satisfechos a algunos, que no ven la necesidad de comprobar si es generalizable a todos los casos. La idea puede llegar a convertirse en un obstáculo.

La falta de contexto, que, por otra parte, favorece el manejo de expresiones algebraicas, es un campo para la generalización sin fundamento. El alejamiento de la situación que ha originado una expresión permite, normalmente, procesar mejor la información, pero dificulta la comprobación de la aplicabilidad de una propiedad en un momento dado.
De esta forma, al manejar expresiones algebraicas es habitual encontrar razonamientos de transferencia, mediante los cuales se considera que lo que es válido para un caso particular lo es también para otro. Así, es frecuente que se generalice una propiedad en virtud de la similitud de una forma nueva con respecto a aquélla para la que se definió.
La estructura $(a.b)^2 = a^2 \cdot b^2$ en la que se distribuye la potenciación respecto de la multiplicación *se extiende fácilmente al caso de la suma* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ de un modo inconsciente, "natural", con absoluta seguridad, a veces incluso después de ser cuestionado por otra persona.
De la misma forma que con la potenciación sucede con la radicación: la distributividad con respecto al producto $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}\,.\sqrt{b}$, *se extiende a la suma* $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Para el tratamiento de estos errores se pueden ensayar distintas estrategias e incluso usar diferentes materiales pero, si bien en el momento se evitan de forma significativa después de algún tiempo tiene más fuerza el recuerdo de la generalización y vuelve a aparecer el error.

- *Análisis a priori*: pensando entonces en el tratamiento de procesos de generalización en el aula y, en particular, en los procesos recursivos, se propone una secuencia didáctica para trabajar con números figurados, y un análisis a priori de la misma, que es objeto de este artículo. La secuencia favorece la elaboración de conjeturas y la producción de fórmulas, recurso algebraico que aparece como un medio para resolver situaciones que implican la exploración de regularidades.
Como marco matemático para la elaboración de la secuencia se eligen los números figurados, pensando que los alumnos a los que está dirigida se encuentran en el inicio de la enseñanza media y tienen un amplio dominio sobre los números naturales. El objetivo es centrarse en la incursión a las primeras nociones de expresiones algebraicas y en el estudio de las cuestiones didácticas asociadas con la generalización en procesos recurrentes y, parece pertinente buscar un conocimiento matemático de base suficientemente consolidado por los alumnos como son los números naturales.
El diseño de esta secuencia da lugar a diferentes métodos de cálculo y, por ende, a una variedad de fórmulas, hecho que permitirá una discusión sobre la validez y la equivalencia de las mismas.

Por otra parte, exige la puesta en funcionamiento de un proceso de generalización y abre un espacio para el trabajo sobre la problemática de la validación en la clase de matemática, en particular la validación de un proceso de generalización.

- *Análisis a posteriori:* se lleva a cabo la experimentación de la tarea, que se implementa en un octavo año de la EGB, donde el grupo de alumnos está acostumbrado oralmente o por escrito a la demanda de explicitación y/o justificación de los procedimientos que utilizan; y un análisis a posteriori, basado en las observaciones realizadas durante la implementación de la secuencia y las producciones escritas de los alumnos.

Se recuerda que el objetivo de este artículo se circunscribe al desarrollo de la fase análisis a priori de la secuencia diseñada para la investigación.

Situación presentada a los alumnos

El enunciado completo del problema presentado a los alumnos es el siguiente:

El problema de la verdulería.

En un barrio de la ciudad la competencia entre las verdulerías es muy grande.

Don Antonio, el dueño de la verdulería más antigua, está muy preocupado por la apertura de una nueva verdulería en la otra cuadra y quiere hacer una vidriera que llame la atención y poder seguir manteniendo su clientela.

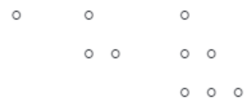
Juancito, su ayudante, y muy hábil para matemática, le pregunta:

- *Don Antonio... ¿Por qué no hace una vidriera con las naranjas en forma de triángulo rectángulo isósceles?*

- *¿Qué dices?* –le contesta don Antonio– *¿qué es eso?*

Juancito, un poco asustado pero muy decidido, le explica,

- *Si tengo 3 o 6 naranjas las puedo acomodar, respectivamente, como:*



rango	*1*	*2*	*3*
número	*1*	*3*	*6*

De esta manera puedo ir formando triángulos rectángulos que originan los ***números triangulares de rango 1, de rango 2 y de rango 3****, entendiendo por* ***rango*** *la cantidad de naranjas que hay en la base. El número 4, por ejemplo, no es un número triangular porque no se puede formar un triángulo como los que vimos.*

Don Antonio, muy entusiasmado, le dice:

- *Buena idea, a ver Juancito, me ayudás a hacerlo con las naranjas.*

a) *¿Cuántas naranjas se pueden acomodar si se arma un triángulo de rango 4?*

b) *¿Cuántas naranjas se necesitan si se quiere formar un triángulo de rango 12?*

c) *Si se tienen 36 naranjas y se quieren acomodar en un triángulo, ¿cuántas naranjas hay que poner en la base? ¿Qué rango tiene el triángulo formado?*

d) *Suponiendo que se quiere armar un escaparate triangular que tenga 1.000 naranjas en la base, ¿cuántas naranjas se necesitan?*

e) *¿Se puede armar un escaparate en forma de triángulo con 153 naranjas?*

Don Antonio, muy alegre, dice:

- *Si intentamos con cuadrados, es posible que quede bien.*

Juancito, muy entusiasmado, le responde:

- *Probemos, don Antonio.*

f) *¿Cuántas naranjas se necesitan si se quiere formar un cuadrado de rango 17?*

g) *¿Se puede construir un escaparate cuadrado con 150 naranjas?*

h) *Si se agregan 39 naranjas a un cuadrado para*

obtener el cuadrado siguiente, ¿qué rango tiene el cuadrado que se obtiene?
i) *Don Antonio dijo que él tiene una cantidad de naranjas que le permiten formar un cuadrado y Juancito, con la misma cantidad de naranjas, puede formar dos triángulos, uno con una naranja menos que el otro en el rango. ¿Qué tamaño pueden tener el cuadrado de don Antonio y los dos triángulos de Juancito?*

Organización de las clases

Primera clase

Se entrega a cada alumno una copia que contiene la primera parte del enunciado del problema, que incluye hasta el ítem "e" y las etapas a desarrollar en la clase.
Primera etapa: los alumnos trabajan individualmente en la resolución del problema.
Segunda etapa: cuando todos los alumnos llegan a una respuesta el docente propone que se formen grupos de cuatro o cinco alumnos y discutan el problema. En el momento en que se llegue a un acuerdo cada grupo confecciona un afiche, en el que deben figurar los procedimientos y las conclusiones a las que arriba para convencer a los otros de la validez de sus resultados.

Segunda clase

Los afiches confeccionados en la clase anterior se colocan en el pizarrón para analizar y discutir las diferentes estrategias.
Si en el análisis de los afiches:
- no surge la enunciación de una fórmula general para encontrar números triangulares, el docente induce a buscarla. Supongamos que ahora queremos tener una fórmula, de modo de aplicarla para contar la cantidad de naranjas a partir de un rango dado. Nombramos con la letra "n" ese rango que no conocemos. ¿Podrían armar una fórmula ustedes? ¿Cómo la justificarían?
- si la fórmula general aparece en algún afiche el docente interroga al grupo y/o grupos sobre cómo llegaron a ella, y someterá la producción al resto de la clase.

Luego se entrega a cada alumno una copia con las subtareas a resolver en esta clase y las etapas de la misma:
- Los enunciados f), g) y h)
Primera etapa: los alumnos se reúnen en equipos con el fin de encontrar una respuesta al ítem a trabajar.
Segunda etapa: una vez que se arribe a un acuerdo, el grupo redacta las conclusiones a las que arriba con el fin de poder presentar y convencer a los otros de sus logros.
Tercera etapa: el docente interroga a cualquier grupo con el fin de conocer la estrategia utilizada en cada ítem, para el análisis y discusión de toda la clase. Luego pregunta si algún grupo hizo algo distinto.

En este momento, al analizar la subtarea g), el docente pregunta –si es que no surge de parte de algún grupo–: ¿cuál es el cuadrado más grande que se puede formar? ¿Cuántas naranjas sobran? ¿Se podrá encontrar una fórmula general para hallar cualquier número cuadrado? ¿Cómo se podría justificar?
En la puesta en común de los diferentes incisos de esta clase, el docente ha ido introduciendo la notación C_n para los números cuadrados y para finalizar plantea el desafío:
¿Cómo se puede completar la fórmula $C_n + \ldots = C_{n+1}$ *para que resulte verdadera para cualquier n?*
Se observa que aquí se pone en juego un aspecto diferente del concepto de fórmula. Ya no se trata de una expresión para contar o medir algo, a partir de ciertos datos, sino de la expresión de una relación entre distintos números (cada uno de los cuales es a su vez el resultado de haber "aplicado" una fórmula a ciertos datos). Para los alumnos puede ser extraño este nuevo uso que se

hace de la palabra fórmula y, quizás sea necesario dedicar un tiempo a discutir sobre lo que se está pidiendo ahora, hasta que se entienda bien qué es lo que ellos deben buscar.

Tercera clase

Se recuerda a los alumnos que: "en la clase anterior se ha encontrado la fórmula $C_n + 2n + 1 = C_{n+1}$, que en el dibujo quería decir que si se cuentan los puntos de un cuadrado de lado n y se le agrega un número de puntos igual al impar consecutivo de 2n, se obtiene el número cuadrado siguiente".

Luego se entrega una copia a cada alumno con el ítem i) y las etapas de la última clase.

Primera etapa: trabajan en parejas en la resolución de esta subtarea.

Segunda etapa: una vez que se encuentre una solución, la pareja redacta las conclusiones que encuentra, con el fin de presentarlas y defenderlas ante sus compañeros.

Tercera etapa: se lleva a cabo la puesta en común, el docente solicita lo realizado por cada pareja y escribe en el pizarrón para proceder al análisis y la discusión de las diferentes resoluciones.

Al finalizar la puesta en común, si es que no surge, se pregunta ¿cómo se puede representar con una fórmula *la relación entre números triangulares y cuadrados* encontrada? Nuevamente está en juego el sentido de la fórmula como expresión de una relación entre distintos números-resultados.

Finalmente, se recuperan las fórmulas cerradas y recurrentes de números cuadrados y triangulares y se propone a las parejas, para cerrar esta actividad, dos problemas más:

- *¿Cómo se calcula la suma de los números impares hasta 59? No vale sumarlos 1 a 1.*
- *¿Cómo se calcula la suma de los números pares hasta 48? No vale sumarlos 1 a 1.*

Se discuten las estrategias que emplean las parejas y se les solicita que analicen cómo generalizar.

El docente escribe en el pizarrón, con objeto de ser completado con la opinión de los alumnos, lo siguiente:

- *la suma de los n primeros números impares es igual a ......*
- *la suma de los n primeros números pares es igual a ......*

Al finalizar esta clase y como cierre de toda la secuencia se propone a los alumnos que realicen un trabajo individual escrito, que deben entregar, sobre la resolución completa del problema de la verdulería, ya que asegura que el alumno se enfrente solo a la situación trabajada y trate de hacer una selección adecuada de las estrategias discutidas.

Análisis a priori de la situación

Llevar a la práctica una tarea exige del docente *anticipar la situación didáctica*.

¿Qué significa? Es frecuente que el docente, cuando piensa en su trabajo frente a los alumnos, se centre en seleccionar las tareas que ellos deberán realizar.

Si bien éste es un punto importante de la planificación es imprescindible realizar un *análisis a priori* de la situación, cuyo objetivo es establecer de qué manera la selección de las tareas incluidas en ella permite anticipar comportamientos posibles de los alumnos y lo que esto significa. Dicho análisis se basa en un conjunto de hipótesis.

Es conveniente aclarar que el docente está limitado para llevar a cabo este tipo de trabajo en cada una de sus clases, ya que hoy las condiciones con las que cuenta en la actualidad no son las ideales.

Este análisis a priori comprende una parte descriptiva y un análisis de posibles trayectorias de sujetos interactuando con la secuencia, tomando a éstos como conjunto de conocimientos.

Es decir, se trata de hacer un análisis de lo probable, de las interacciones de los alumnos con

el problema y de una posible intervención del docente que colabore, tanto en la devolución de la secuencia como ante diferentes dificultades que se les pueden plantear a los alumnos, así como prever alternativas para analizar mejor los resultados a posteriori.
Seleccionada una tarea se cree necesario analizar las *variables didácticas* de la misma. En esta tarea se encuentran:
- ligadas con el contenido: el *número de puntos* que dibuja el alumno, el *rango del número triangular* y *cuadrado* solicitado
- ligadas con el desarrollo de la secuencia: la *forma de trabajo*, individual o grupal, la *formulación por escrito* de procedimientos y el *tiempo*(1) que se le dará en los distintos momentos a la clase a efectos de que conjeturen con el fin de encontrar la estrategia adecuada para la construcción del término general de una sucesión y la relación entre distintas secuencias.

En esta tarea se piensa que el alumno interactuará con distintos objetos que pueblan este medio: las disposiciones de *puntos* que usarán para la representación de los números triangulares y cuadrados, los *números triangulares* y *cuadrados anteriores*, con sus escrituras específicas, la ley de formación dada en el campo gráfico en las consignas elaboradas por el docente y la *interacción* que se producirá entre los compañeros debido a la organización de la clase.
Anticipar el juego didáctico a partir de un problema supone tener en cuenta no sólo el enunciado del mismo, por lo que se va a hablar del enunciado que se les da a los alumnos y del juego didáctico que se pretende desplegar a su propósito.
Éste incluye además anticipar cuáles pueden ser las actividades cognitivas de los alumnos, cuáles serían las acciones e interacciones que se generarán y para qué, así como las posibles intervenciones docentes en las diferentes instancias.
Se organiza el análisis a priori por clase y para esto se tiene en cuenta los conocimientos con que cuenta el alumno para enfrentar la tarea, el procedimiento de base, la diversidad de procedimientos que pueden surgir en la clase y las intervenciones docentes que se cree necesarias para mantener una relación estable con la situación.
Los conocimientos y experiencias que los alumnos han tenido antes de enfrentar la resolución de la tarea son:
- números naturales;
- sistema decimal de numeración;
- desarrollo aritmético de los números, sea aditivo o multiplicativo;
- búsqueda de términos de sucesiones;
- pasaje del lenguaje coloquial al simbólico o algebraico;
- verificación de series numéricas que respondan a leyes de formación y,
- cálculo de perímetros y de áreas de superficies considerando unidades no convencionales.

La teoría didáctica que sustenta este análisis afirma que es necesario que el alumno tenga un *procedimiento de base*, un recurso para enfrentar la situación, pero que este procedimiento le sea insuficiente para resolverla (de lo contrario no se produciría ningún aprendizaje, ningún cambio).
En esta actividad las *configuraciones puntuales* permiten interpretar la situación y abordar el problema planteado.
El objetivo general de la primera parte es favorecer la detección de regularidades en el conjunto de números triangulares, que facilite la construcción de una fórmula para el término general de la sucesión.
Este objetivo se selecciona con objeto de que al finalizar la puesta en común, en la segunda clase, surja la fórmula cerrada y recurrente para números triangulares.

Los objetivos de la primera clase y la fundamentación de su elección son:
- Hallar números triangulares para rangos pequeños
Se elige con el fin de que el alumno disponga de

al menos una estrategia, el uso de puntos, para la resolución de los ítems a) y b) lo que le permita entrar en el juego.

- Explorar la relación inversa "números triangulares$\rightarrow$rango", apoyándose en valores ya conocidos de la relación directa rango$\rightarrow$número triangular

En el ítem c) se plantea el problema inverso: a partir de la suma de todas las naranjas encontrar el rango. La ubicación de esta tarea en la secuencia alienta a apoyarse en lo ya conocido: 4 filas$\rightarrow$10 naranjas, 12 filas$\rightarrow$78 naranjas, para "moverse" desde allí y ubicar la cantidad de filas para 36 naranjas.

Es posible esperar que la relación recurrente para los números triangulares surja en el seno de la resolución de la primera parte, aunque no se pregunta nada específico sobre eso.

- Provocar el bloqueo de estrategias anteriores con el fin de que surjan métodos de conteo inteligentes

Se lo selecciona para los ítems d) y e).

En la resolución del ítem d) surge un cambio en la variable “rango” con el fin de bloquear las estrategias usadas hasta el momento y provocar métodos de conteo diferentes.

Esta subtarea es pensada con la idea de que “si uno puede contar para 1.000 lo puede hacer para cualquiera”. La idea entonces es que de contar para 1.000 a la obtención de un procedimiento general de conteo hay poco costo. Todavía faltará trabajar para pasar del procedimiento a una fórmula.

La subtarea e) apunta a la reversibilidad, al igual que el ítem c), para que el alumno se resista al uso de la estrategia del dibujo e incluso para ver si lo usado para contar en d) sirve para resolver esto. Es decir, si el procedimiento para obtener el número final de naranjas puede ser sistematizado tanto como para ser utilizado “al revés”.

En esta clase se les solicita que intenten abordar las primeras cinco sub-tareas.

Las variables didácticas seleccionadas posibilitan que aparezca en el aula una gran diversidad de *procedimientos de resolución* por parte de los alumnos.

Con respecto a la subtarea a), es posible que únicamente lo resuelvan en un *registro gráfico*, mediante el uso de puntos con el fin de dibujar un triángulo que tenga cuatro en la base y luego contar.

Se piensa que en este ítem las posibles estrategias desarrolladas por los alumnos se van a basar en la representación, la cual es usada como un recurso visual para analizar la estructura de los números solicitados.

Es posible que para enfrentar la subtarea b) los alumnos traten de hacerlo en campos diferentes.

- Si trabajan con el registro gráfico al realizar la subtarea anterior pueden dibujar nuevamente.
- Puede haber alumnos que prefieran no dibujar y trabajen en el campo numérico, como por ejemplo: sumen de 1 a 12 o de 12 a 1, lo que les permitiría obtener 78 que es el número triangular de rango 12; realicen sumas parciales de las dos primeras filas, comenzando de arriba hacia abajo o viceversa, luego a esa suma se le adiciona el número de puntos de la siguiente y así sucesivamente hasta agregar 12 o 1, respectivamente, y obtener 78 que es el número triangular de rango 12.
- También puede haber alumnos que intenten buscar relaciones de formación en función de la posición que ocupa cada número triangular en la sucesión; como ser: sumarle al número triangular anterior el número del rango del siguiente, para obtener el nuevo número triangular; si al número triangular de rango 11 se le suma el rango del siguiente o sea 12, se puede formar el número triangular de rango 12; el cual puede ser un camino para obtener todos los demás.
- Puede ocurrir, por otra parte, que el alumno considere el dibujo del triángulo como la representación gráfica del objeto geométrico “triángulo”, e intente calcular la cantidad de puntitos apoyándose en la fórmula del área. En este

caso obtendría (12 x 12): 2= 72. Si los alumnos prueban esta manera de contar para el ítem a) detectarían que están contando de menos.

En este momento, probablemente sería necesaria una intervención docente que sugiera considerar dos triángulos al mismo tiempo y acoplarlos de alguna manera: una posibilidad es hacerlo de modo que las hipotenusas queden frente a frente, pero invertidas. Esto puede llevarlos, mediante la observación, a darse cuenta que la figura obtenida es un rectángulo cuya base es 13 y su altura 12. Si calculan su área, ahora *sí* coincide con la cantidad de puntitos del rectángulo (es uno de los sentidos de la multiplicación el que está en juego) teniendo en cuenta que se han dibujado dos triángulos con todos sus puntos, pueden afirmar que su área es la mitad del área del rectángulo, es decir que pueden formar el número triangular de rango 12 o sea $T_{12.}$

Otra posibilidad es que superpongan las hipotenusas; a través de la observación esto los puede llevar a afirmar que queda formado un cuadrado de lado 12. Si calculan su área y afirman que lo que buscan es la mitad del área del cuadrado, los llevaría a cometer un error en el cálculo del número triangular de rango doce ya que harían (12 x 12):2 = 72; estarían contando naranjas de menos. Esto se produce porque omitirían contar los puntos de la hipotenusa sólo una vez.

Para resolver la subtarea c), es probable que los alumnos traten de trabajar en diferentes campos.

- Si usan un registro gráfico pueden dibujar un triángulo partiendo de un punto, luego dos y así sucesivamente hasta llegar a colocar los 36 puntos.
- Si algunos trabajan el ítem anterior, en el campo numérico, con sumas parciales de arriba hacia abajo, pueden a 1 sumarle 2, a 3 sumarle 3, a 6 sumarle 4 y así siguiendo hasta llegar a 36 que es la cantidad de naranjas que tienen que acomodar, donde 2, 3, 4, ... sería el rango de cada número triangular, lo que los llevaría a obtener el rango del número triangular 36. Se espera que surja esta estrategia ya que llegarían a contar *recursivamente*, sin hacer dibujo, a partir de 1.
- Los alumnos a quienes les gusta la geometría y han trabajado en este campo en la tarea anterior, pueden pensar que "descubrieron" que un número triangular es la mitad de un rectángulo, en el cual la base es el rango del número triangular más uno y la altura es el rango de dicho número; y como el dato que se les da es el número triangular deben buscar en qué caso el producto de dos números consecutivos es el doble de 36. El menor número de éstos es el rango del número triangular 36, o sea la cantidad de naranjas que tienen que poner en la base.

Aquellos alumnos que han enfrentado dos triángulos, superponiendo las hipotenusas y encontraron un cuadrado, pueden poner en juego la relación "que el producto de un número por sí mismo" les debería dar el doble de 36, y esto los puede llevar a descartar la posible "solución" ya que no encontrarían ningún número que lo verifique.

Se espera que al enfrentar la subtarea d), los alumnos que han trabajado en el registro gráfico contando sobre el papel e incluso con el numérico de una manera muy artesanal, puedan sentirse desconcertados y molestos ante la posibilidad de no saber qué hacer. Se cree conveniente recordar que se incorpora esta subtarea para producir intencionalmente bloqueos con las estrategias usadas hasta el momento y que dé lugar a la aparición de métodos de conteo diferentes.

Es probable que surjan de la clase expresiones como *"no tiene solución"*, *"es muy difícil"* pero, generalmente los alumnos se resisten a dejarlo sin contestar. Pueden surgir enojos por parte de alguno de ellos ya que no pueden cumplir con la obligación que sienten con el docente de matemática, pero al mismo tiempo pueden pensar que debe haber alguna forma para resolverlo.

En esta tarea, las estrategias del dibujo y de la suma "a mano" de los números consecutivos hasta el 1.000 se ven fuertemente limitadas; resulta casi imposible dibujar un triángulo con mil puntos en la base y sumar sería muy lerdo, aun con una calculadora, corriendo el riesgo de distraerse y cometer errores.

La idea es que el trabajo con los números triangulares en las tareas anteriores les permita encontrar alguna regularidad. Se cree que podría darse que sumen de uno a diez, luego de once a veinte y así siguiendo hasta sumar de noventa y uno a cien. Esto les permitiría calcular la suma de los cien primeros números naturales y así siguiendo para los cien siguientes con el fin de detectar alguna regularidad; tomen al escaparate como un triángulo rectángulo, calculen su área y al comparar con el número triangular buscado detecten que hay "algo" distinto. Esto lo pueden "trabajar" para los números triangulares encontrados en los ítems anteriores; los alumnos a los que les gusta el trabajo geométrico pueden pensarlo como una figura geométrica, y recordar lo "descubierto" en la tarea anterior: que un número triangular surge como la mitad del área de un rectángulo, en el cual la base es el rango del número triangular más uno y la altura es el rango del número considerado. En este caso el rango es 1.000, que es la base, y la altura 1.001 por lo que se puede calcular.

Aunque no se espera que esta sea una relación que encontrarían los alumnos espontáneamente, la idea de sumar la última y la primera fila, la antepenúltima con la segunda, etc. y observar la invariancia de ese número, 1.001, es un camino que el docente anticipa como una posible vía para llegar al cálculo pedido.

En esta tarea es central considerar la gestión de la clase por medio de una diversidad de intervenciones del docente.

Serán necesarias ciertas intervenciones del docente dirigidas a que los alumnos no se desanimen e intenten buscar una pertinente estrategia de solución; con respecto a la pertinencia se intentará que abandonen el registro gráfico, ya que les resultaría imposible llegar a una solución. Una posible intervención del docente en este sentido, puede ser: "algunos chicos pueden preguntar, *¿tenemos que hacer un triángulo que tenga mil puntos en la base?* A lo que el docente puede responder: *¿es posible hacer eso? ¿No habrá otro camino?*".

Otra intervención puede apuntar a que todos los alumnos de un grupo identifiquen si es suficiente, con probar para algunos casos particulares, afirmar que calculando el área del triángulo y comparando con el número triangular solicitado basta con sumar la mitad del rango. Por ejemplo: *"ustedes probaron para el triangular de rango ocho, ¿les alcanza para poder afirmar que lo pueden hacerlo para el de rango 1.000?"*.

Para la tarea e) que solicita si se puede armar un escaparate en forma de triángulo con 153 naranjas, pensamos que puede darse: el alumno que no logra despegarse de trabajar con el registro gráfico lo intente nuevamente, donde el dibujo pasaría a ser un esquema, una "figura de análisis", sobre la cual puede armar una estrategia de resolución. Si esto ocurre la docente puede preguntar: *si dejas de lado el dibujo, ¿habrá otra forma de resolverlo?*; pueden utilizar el procedimiento: a 1 le suma 2, a 3 le suma 3, a 6 le suma 4 y así siguiendo hasta ver si llega a 153 que es la cantidad de naranjas que tiene para armar un escaparate en forma de triángulo, donde 2, 3, 4,... es el rango de cada número triangular; si han trabajado como la suma de números consecutivos, pueden intentar enfrentar la tarea sumando del 1 al 13 y así siguiendo hasta llegar a encontrar que la suma del 1 al 17 le da la cantidad de naranjas que tiene que ubicar; si trabajan en el *campo geométrico* y detectan que un número triangular es la mitad de un rectángulo, en el cual la base es el rango del número triangular más uno y la altura es el rango de dicho número, pueden intentar averiguar si 153 es un número triangular, lo que le permitirá saber si se puede armar un escaparate como el solicitado; donde nuevamente el dibujo puede seguir jugando el papel de organización aunque estén trabajando con números grandes.

Al concluir la resolución de esta subtarea en forma individual el docente propone que se reúnan en grupos, lo que puede llevar a la aparición de conflictos ya que el logro de diferentes resultados puede llevarlos a discusiones profundas.

El trabajo grupal les permite aprender a argumentar en favor de sus trabajos, a pensar si acuerdan o no con las conclusiones a las que arriban sus compañeros, a elegir con fundamento posibles estrategias utilizadas por otros y a modificar las propias en relación con la validación de la situación propuesta.

Hasta este momento, el docente no se debe mostrar ni a favor ni en contra de las estrategias individuales o grupales, ya sean correctas o incorrectas; debe estar activo y participar, pero no debe validar las distintas respuestas a las que van arribando los grupos, ni dar "pistas" sobre la resolución de la situación.

Evitar dar estas "pistas" es una condición para todas las situaciones en que se quiera que los alumnos desplieguen procedimientos de resolución propios, desarrollen modos de pensamiento acordes a las tareas planteadas y en las que realmente cobren sentido los momentos de discusión.

En la segunda clase se les informa que se continúa con el trabajo de la clase anterior y se solicita llevar a cabo una puesta en común mediante la técnica del afiche para analizar y reflexionar sobre los procedimientos utilizados por cada grupo, correctos e incorrectos.

El objetivo de la primera parte de esta clase es: *la discusión de los procedimientos y la elaboración de fórmulas, si no aparecen, o la discusión sobre ellas si surgen*.

Si se produce malestar en la resolución de la situación, ésta puede persistir en la confección del afiche si es que los grupos no pueden justificar bien los resultados a los que arriban.

Puede darse el caso de que en algún grupo se tenga en cuenta el rol que cada alumno tiene a diario en la clase y el grupo decida dar como aceptado el resultado que tiene el "alumno que se destaca".

Si en el análisis de los afiches aparecen resultados diferentes puede continuar la inquietud de parte de los alumnos; en este caso es fundamental la intervención del docente haciéndose cargo de ese malestar y ayudando a reflexionar sobre la situación. Estas intervenciones del docente pueden ser de gran utilidad para mantener la relación del alumno con la tarea.

Desde el punto de vista del docente, en la puesta en común está previsto: fomentar las discusiones acerca de los diferentes procedimientos utilizados por los alumnos. Se apunta llegar en este momento de la clase a establecer la fórmula general para los números triangulares.

En caso de no aparecer en el trabajo de los alumnos la enunciación de una fórmula general, el docente induce a buscarla mediante preguntas como: *Teniendo en cuenta lo que han hecho para 1.000 ¿Se podrá encontrar una fórmula que permita calcular cualquier número triangular, sabiendo que su rango es n? ¿Cómo la justificarían?*

Si al discutir los afiches surge la fórmula general, el docente solicita al grupo y/o grupos la explicación de cómo llegaron o si están seguros que la fórmula encontrada es correcta; esta explicación tiene que ser aceptada o rechazada por los otros.

También puede proponer a la clase cómo sería convertir en fórmula alguno de los procedimientos desplegados para contar con rango 1.000.

En la puesta en común, ya sea por medio de los afiches o con las preguntas del docente cuando empiezan a aparecer las fórmulas, está previsto un trabajo sobre la equivalencia de las fórmulas.

En el cierre de la primera parte de la secuencia, el docente institucionalizará:

“La fórmula recurrente para un número triangular es: $T_n + n + 1 = T_{n+1}$“.
“La fórmula cerrada para obtener números triangulares es $T_n = \frac{n\,.\,(n+1)}{2}$“
“La suma de los primeros n números naturales es $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = T_n = \frac{n\,.\,(n+1)}{2}$“

El docente saca conclusiones a partir de lo producido por los alumnos, recapitula, sistematiza, ordena, vincula lo que se produce en diferentes momentos de la clase, con el fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.
El objetivo de la segunda parte de esta clase es
-Trabajar con números cuadrados: encontrar el término general de una nueva sucesión y la relación recurrente entre un término y el otro.
Este objetivo se selecciona para que al finalizar la puesta en común surja la fórmula cerrada y recurrente para números cuadrados.
Trabajan nuevamente en forma grupal, lo que permite que los integrantes puedan confrontar sus puntos de vista sobre cómo abordar las subtareas f), g) y h). Estas confrontaciones pueden ser correctas o no, no importa, pues lo determinante para que se produzca un progreso intelectual es la posibilidad de comparar los diferentes puntos de vista.
Al enfrentar la subtarea f) se piensa que los alumnos pueden usar distintas estrategias: dibujar un cuadrado de base 17, calcular su área, lo que nos permitiría ver que no disponen de una representación mental de la situación; trabajar en el campo numérico, recordando conocimientos anteriores como que el cuadrado sale de multiplicar el lado por sí mismo, la potencia cuadrada de un número significa multiplicar el número por sí mismo o usar la definición de raíz cuadrada.
Se piensa que los alumnos que tienen inclinaciones por la búsqueda de relaciones pueden intentar encontrar alguna, las cuales pueden darse en función de la posición que ocupa el número cuadrado con relación a los puntos del lado: el rango de los números cuadrados coincide con el número de puntos del lado del cuadrado o el lado del cuadrado tiene la medida del rango que me dan.
Algunos pueden trabajar en el campo geométrico, desprendiéndose del registro gráfico, calcular el área del cuadrado.
Para enfrentar la subtarea g), es probable que ya abandonen el registro gráfico, ya que sería un trabajo denso y aburrido.
Se cree que pueden intentar hacerlo de distintas maneras: calcular la raíz cuadrada de 150 usando calculadora, pero al no dar una raíz cuadrada exacta afirmar que no se puede construir un escaparate cuadrado con 150 naranjas; realizar aproximaciones multiplicativas, probando con varios números, buscando un número que multiplicado por sí mismo dé 150.
Con respecto al ítem h) se piensa que pueden intentar: confeccionar una tabla en la que comparen el primer número cuadrado con el segundo, el segundo con el tercero y así siguiendo con respecto a la cantidad de naranjas que se agregan para obtenerlos o imaginar un cuadrado y agregar puntos, hasta llegar a ver qué obtienen cuando acomodan treinta y nueve.

En caso de que ningún grupo logre resolver esta subtarea el docente preguntará
- “Si tengo el cuadrado de rango 5 ¿cuánto hay qué agregar para obtener el cuadrado de rango 6? ¿Será cierto que siempre se agrega un número impar para pasar de un cuadrado al siguiente? ¿Por qué?
Estas preguntas se eligen con el fin de que los integrantes de los diferentes equipos encuentren una posible estrategia de resolución.
Con esta última tarea, se intenta movilizar la relación de recurrencia entre un número cuadrado y el siguiente.
Luego se realiza una puesta en común en el pizarrón para analizar y reflexionar sobre los resultados que obtiene cada grupo, remarcando los aspectos que se pretenden destacar. Esto tiene

como objeto convertir el conocimiento individual en conocimiento de grupo y, en este proceso de socialización, mejorar y hacer progresar el conocimiento individual, proporcionando, entre otras cosas, más riqueza de información.

El docente interroga a uno de los grupos sobre el ítem f y escribe en el pizarrón la respuesta que le dan, luego mira al resto de los grupos y pregunta si alguno hizo algo diferente.

En caso de que surjan respuestas diferentes el docente las escribe en el pizarrón y debe hacer notar la diversidad de procedimientos tratando de que encuentren diferencias y semejanzas.

Luego cuestiona sobre lo hecho con respecto a la subtarea g y al analizarla, si es que no surge de algún grupo, el docente pregunta por el cuadrado más grande que se puede formar al tener 150 naranjas y cuántas naranjas sobrarían, para cerrar con el interrogante: *¿cuál es la fórmula general para hallar cualquier número cuadrado?*

Luego de la discusión de las estrategias que surjan con respecto a los ítems f) y g) el docente dice *"al cuadrado de rango n se lo llama C_n, por lo que se puede escribir, si es que no aparece por parte de algún grupo, $C_n = n^2$"*.

Por último, se interroga a los grupos sobre las estrategias empleadas para la resolución del ítem h) y se discute sobre las mismas.

Una vez que se termina la puesta en común de todos los ítems de esta clase, el docente pregunta *"¿Cuánto hay que sumar al cuadrado de algún número para obtener el siguiente? ¿Se animan a completar esta fórmula C_n + ... = C_{n+1} para que resulte verdadera, para cualquier n?"*

Si al discutir las estrategias empleadas en la resolución del ítem h) los alumnos entienden que si a un número cuadrado se le adiciona la suma entre su rango y su rango consecutivo se puede obtener el número cuadrado siguiente, pueden trabajar sin tener dificultades.

En caso que de la clase surja una respuesta a lo solicitado y los alumnos no intenten verificar si realmente lo dicho es correcto, el docente puede intervenir solicitando: *¿pueden validar la afirmación que hicieron?*

Estas tareas conducen a un nuevo momento de *institucionalización* por parte del docente; quien escribe en el pizarrón e informa:

"La fórmula cerrada para obtener números cuadrados es $C_n = n^2$"

"La fórmula recurrente para obtener el número cuadrado siguiente es $C_n + 2n + 1 = C_{n+1}$"

En la tercera clase el docente escribe en el pizarrón las fórmulas encontradas en la clase anterior y dice: *"ayer encontramos la fórmula recurrente para los números cuadrados. En el dibujo quería decir que si se tiene un cuadrado de rango n y se le agrega un número de puntos igual a 2n+1, se obtiene el número cuadrado siguiente. Hoy vamos a continuar con la resolución del problema"*.

Luego se les entrega una copia con el ítem i).

Esta tarea tiende al logro del objetivo: *reconocer criterios que determinan una relación entre números y expresarlos a través de una generalización*.

Se selecciona este objetivo para apuntar a la elaboración de conjeturas que relacionen los números triangulares y cuadrados, tratando de que justifiquen todo lo realizado.

Se les solicita que formen parejas y se aboquen a la resolución de la misma.

Para tratar de resolver este ítem, se piensa que los alumnos pueden recordar cuáles son los números cuadrados y cuáles son los números triangulares apoyados en el registro gráfico y tratar de buscar relaciones.

Algunos alumnos pueden intentar hallar la fórmula general de la relación entre los números triangulares y números cuadrados, trabajando al mismo tiempo en el campo numérico y gráfico para los primeros números cuadrados con el fin de poder detectar alguna conclusión. Como por ejemplo:

- Si tomo el número cuadrado de rango dos puedo observar que

◆ ◆
◆ ◆ **4 = 3 + 1**

Por lo tanto: el número cuadrado de rango dos está formado por dos números triangulares, el de rango dos y el de rango uno.

Es decir: $C_2 = T_1 + T_2$

Por lo que los puede llevar a concluir que *cada número cuadrado está formado por la suma de dos números triangulares, el de mismo rango y el de rango anterior. Esto no vale para el primer número cuadrado, ya que es igual al primer número triangular.*

$C_1 = T_1$ y $C_n = T_n + T_{n-1}$

En la búsqueda de la relación anterior pueden aparecer otras relaciones no necesariamente correctas, que son importantes de tener en cuenta, tales como:

- en un número cuadrado siempre hay dos números triangulares con la misma cantidad de puntos, a partir del cuadrado de rango dos. Los dos triángulos de igual rango no son disjuntos;
- el número triangular es la mitad del número cuadrado, a partir del cuadrado de rango dos;
- si se dibujan diagonales a los cuadrados te salen números triangulares;
- los números cuadrados se pueden escribir como la suma de triangulares.

Los primeros triangulares son: 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; 55; ...

Los primeros cuadrados son: 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; ...

Por lo tanto, por ejemplo:

$C_4 = T_5 + T_1 = 15 + 1 = 16$

$C_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_5 = 1 + 3 + 6 + 15 = 25$

C_6 no se puede como la suma de varios, solo

$C_6 = T_6 + T_5 = 21 + 15 = 36$

$C_7 = T_6 + T_6 + T_3 + T_1 = 21 + 21 + 6 + 1 = 49$

C_1 no se puede escribir de esta manera.

Si llegan a surgir algunas de estas relaciones se va a poder observar que los alumnos consideran a las configuraciones puntuales como figuras continuas, por lo que siempre el cuadrado se puede dividir en dos o más triángulos iguales.

Si las relaciones que surjan son erróneas también deben ser objeto de discusión, ya que estos procedimientos dan lugar a un trabajo muy rico pues exigen análisis y reflexión sobre los conocimientos puestos en juego. Esto no sólo beneficia a los autores del procedimiento sino a todos los que produjeron otras respuestas, ya sean correctas o incorrectas.

Una vez que las parejas encuentran una posible respuesta, redactan las conclusiones para comunicarlas y defenderlas ante sus pares y docente. El docente escribe en el pizarrón las conclusiones por cada pareja y plantea una discusión sobre las soluciones que aparecieron, ya sean correctas o incorrectas.

En alguna de estas resoluciones debe haber aparecido la fórmula que relaciona los números triangulares y cuadrados; en caso de que esto no ocurra el docente puede interrogar a la clase, basándose en que se buscaron relaciones entre números triangulares y cuadrados, si es posible encontrar una propiedad general y cómo se podría escribir como fórmula.

Si en este ítem los alumnos trabajan siempre con el registro gráfico o con ejemplos, el docente también puede solicitar que transformen las expresiones obtenidas usando las fórmulas que surgen en las clases anteriores; es decir, solicitarles a los alumnos que llegaron a esta propiedad con dibujos y ejemplos, que reemplacen usando las fórmulas de los números triangulares y cuadrados.

El docente escribe en el pizarrón la fórmula que aparece en este momento $T_n + T_{n-1} = C_n$. Y pregunta: *¿será cierta esta igualdad?*

Al ser interrogados con respecto a la veracidad de la fórmula y solicitarles verificar que lo escrito en el pizarrón es correcto, deben trabajar en el campo algebraico recordando las conclusiones obtenidas en las puestas en común de las clases anteriores.

Una vez finalizada la puesta en común de este ítem, el docente recuerda y escribe en el pizarrón todas las fórmulas que aparecen a lo largo de toda la secuencia, con el fin de discutirlas nuevamente y observar que los alumnos entiendan lo que quieren decir.

Esto último apunta a una nueva *institucionalización* donde el docente extrae los aspectos relevantes de toda la secuencia, oficializa los conocimientos dándoles carácter de objetos matemáticos y perfecciona las relaciones encontradas por los alumnos ajustando la forma y el uso del lenguaje específico con el fin de ayudar a la descontextualización de las nuevas relaciones establecidas.

Por último, el docente plantea para cerrar la actividad dos desafíos:

- *¿cómo se calcula la suma de los números impares hasta 59? No vale sumarlos 1 a 1.*
- *¿cómo se calcula la suma de los números pares hasta 48? Tampoco vale sumarlos 1 a 1*

Ante estas preguntas puede surgir desconcierto. El docente puede intervenir recordando si no es posible tener en cuenta el trabajo realizado hasta ahora.

Los alumnos trabajan nuevamente en parejas, y pueden intentar ver qué ocurre para los primeros casos:

1+3= 4 1+3+5= 9 1+3+5+7= 16

Esto les puede "mostrar" que todos los resultados son números cuadrados, y que además existe una relación con el número de términos que se suman, pues: si suman dos términos da el cuadrado de 2, si suman tres términos da el cuadrado de 3 y así sucesivamente.

Es esperable que puedan relacionar esta situación con el hecho que han estudiado antes: *para pasar de un cuadrado de n al de n+1, se suma un número impar, 2n+1*. La disposición espacial de los puntos rodeando al cuadrado más chico puede ser un punto de apoyo para la extensión a números más grandes hasta llegar a la suma de los números impares hasta 59. Como en este caso se suman treinta términos, se llega a que la suma de los números impares hasta 59 es: $30^2 = 900$.

Con respecto a la otra pregunta, puede ocurrir que los alumnos que han entendido bien lo que es la suma de los n primeros números naturales puedan usarla pensando que en este caso n es igual a 48 y recordar lo hecho para la pregunta anterior, contar la cantidad de términos que hay en la suma de los números impares hasta 47 y al ver que son 24, decir: la suma de los números impares hasta 47 es: $24^2 = 576$. Por lo que la suma de los números pares hasta 48 puede surgir de hacer la diferencia entre las dos sumas encontradas.

Otros pueden comenzar a trabajar con los primeros casos:

2+4= 2. (1+2)
2+4+6= 2. (1+2+3)
2+4+6+8= 2. (1+2+3+4)

y observar que todos los números de la suma tienen un "factor común 2", por lo que la suma de los pares hasta 48 se puede reducir al doble de la suma de los primeros números hasta 24.

Una vez encontrada una resolución por parte de las parejas el docente los interroga y escribe en el pizarrón, si surgen, las diferentes estrategias usadas y se las discute.

Una vez que se concluye con esta discusión, la docente pregunta: *¿han encontrado relaciones que permitan responder las preguntas? ¿Cuáles?* y solicita que traten de completar lo siguiente:

- *la suma de los n primeros números impares es igual a ......*
- *la suma de los n primeros números pares es igual a ......*

Se cree que nuevamente se puede producir un momento de malestar y de incertidumbre, por lo que es posible que sea necesaria una nueva intervención docente: A ver *¿qué pasa si les pido que busquen la suma de los 5 primeros números impares? ¿Y la suma de los 6 primeros números impares?*

Estas preguntas los van a llevar a hacer cuentas:

1+3+5+7+9= 25 para la primera pregunta y luego 1+3+5+7+9+11= 36, lo que les va a permitir darse cuenta que la suma de los 5 primeros números impares es 25 o sea el cuadrado de 5, y lo mismo para la suma de los 6 primeros números impares es 36 que es el cuadrado de 6.

Con esto y, teniendo en cuenta la puesta en común de la última tarea para 59, es esperable que surja la relación usada anteriormente *para pasar del cuadrado de n al de n+1, se suma un número impar, 2n+1*. Como la suma tiene n términos pueden llegar a la conclusión que la suma de los n primeros números impares es n^2.

Para poder completar la segunda sentencia, con la pista anterior, es posible que intenten comenzar con casos particulares.

Si comienzan usando esta estrategia e incluso lo hacen para otros casos, es esperable que puedan relacionar esta situación con la puesta en común realizada para la suma de los números pares hasta 48, usar dos fórmulas ya validadas: *si tienen que sumar los n primeros números pares, pueden partir de tener en cuenta que 2n es la cantidad de términos que incluyen los n primeros números pares y que en la misma hay n números impares, es decir, hacer la diferencia entre la suma de los 2n primeros números naturales y la suma de los n primeros números impares*.

También puede darse que algunos alumnos, recordando la forma general de un número par, escriban: 2+4+6+.....+2n y al sacar factor común 2 lleguen a ver que les queda el producto 2. (1+2+3+4+....+n) donde el segundo factor es la suma de los primeros n números naturales, de la cual encontraron una fórmula, por lo que al reemplazar les queda: $2 \, . \, \frac{n \, . \, (n+1)}{2} = n \, . \, (n+1)$, lo que les va a permitir completar la sentencia.

Una vez que se completa lo solicitado se concluye la clase y, como cierre de toda la secuencia el docente, propone a los alumnos que realicen un trabajo individual escrito que deben entregar, sobre la resolución completa del problema de la verdulería.

Consideraciones finales

La elaboración de la situación y su análisis a priori, nos permite concluir globalmente que:

- Para que los alumnos puedan evolucionar en sus conocimientos es necesario, entonces, que *actúen* para resolver la situación; es decir, se piensa que la tarea seleccionada les va a provocar la elaboración y la puesta en funcionamiento de conocimientos implícitos; que los *puedan explicitar*, que los *expresen en un lenguaje* comprendido por todos y *que validen* su utilización por medio de pruebas.
- Los intercambios que se van a producir a lo largo de la resolución de la tarea van a permitir generar avances en los conocimientos de nuestros alumnos, ya que se piensa que se van a dar momentos de explicitación, justificación y debates que es importante se desarrollen en el trabajo áulico.
- La situación planteada tiene una dimensión adidáctica ya que es un problema que es confrontado con los alumnos, y la organización de esta situación permite la evolución de sus conocimientos matemáticos. La intencionalidad del docente está siempre presente aunque es el alumno, y no aquél, quien pone en escena el conocimiento en función de lo solicitado en la tarea.
- Puede ocurrir que los alumnos utilicen estrategias distintas para la resolución del problema. Va a resultar tan productiva la búsqueda de soluciones, como la discusión de todas ellas y distinguir las diferencias y alcances de cada una.
- La interacción que se va a producir entre los distintos alumnos potencia la formulación de conjeturas y la justificación de los distintos resultado con diferente nivel de complejidad.
- Los papeles que cumplen el trabajo individual, grupal o colectivo son diferentes en el desarrollo del aprendizaje. En la confección de esta actividad se han tenido en cuenta los tres: el *trabajo grupal*, que permite la interacción entre los miembros del grupo ya que a través de la discusión, el análisis y la selección de las propuestas de solución de cada integrante del grupo se puede llegar a justificar

adecuadamente la respuesta elegida; el *trabajo colectivo*, ya que es de suma importancia y se da en el momento de la institucionalización y, por último, el *trabajo individual*, ya que permite que el alumno se enfrente a la situación planteada por sí solo y trate de compatibilizar individualmente todas las estrategias trabajadas.

- El docente cumple un papel fundamental en este tipo de tareas. Es él quien propone las actividades a desarrollar, así como la forma de hacerlo. Sugiere un determinado tipo de agrupamiento de alumnos, facilita las interacciones de los alumnos con el problema y las interacciones entre alumnos en la aparición de diferentes estrategias. Con sus intervenciones sostiene la interacción de los alumnos con el problema.
- Es una secuencia que permite poner en funcionamiento varios juegos de marcos y distintos registros de representación, lo cual transversalmente apunta a un enriquecimiento del conocimiento de los alumnos en cada uno: en el *marco geométrico* la consideración de áreas de figuras geométricas, en el *marco numérico* las diferentes operaciones con números naturales y la búsqueda de relaciones entre términos de una sucesión, en el *registro gráfico* si se utilizan representaciones de triángulos y cuadrados, las cuales pueden aparecer como fuentes de conjeturas, guía de justificaciones o instrumentos de control y en el *marco algebraico* la posible designación con letras a valores numéricos desconocidos pero que corresponden a contextos llenos de sentido para los alumnos.
- Es una tarea que da lugar a formas diferentes de trabajo, en cuanto al papel que juegan los ejemplos en las generalizaciones que establezcan; a que aparezcan diferentes niveles en cuanto a la validación de reglas generales y a la aparición de procesos de construcción de leyes generales.

La implementación de esta secuencia y el análisis de las clases llevan a detectar problemas matemáticos que no han sido considerados en este análisis a priori. Por lo que se recuperan las reflexiones de Patricia Sadovsky

Pensar el análisis a priori como predictivo comporta dos riesgos serios: a) encerrarse en las categorías que se han definido como punto de partida y no estar disponible para la construcción de nuevos observables y b) restringir el margen de acción del docente a partir de comunicarle la situación en términos "de lo que va a suceder". Esto fuerza al docente a que ocurra lo que debe ocurrir, desdibujando su propia intencionalidad, y desnaturalizando el sentido de la situación de la misma (Savdosky, 2004).

En una clase particular, la trama en la cual se inscriben los procesos de producción individual y grupal se constituye con diferentes elementos, no todos identificables en el análisis a priori de las situaciones.

En esta investigación se asume la doble función de docente-investigador. Eso nos hace más difícil el análisis de la "gestión docente efectiva", al no contar con la distancia necesaria observador/observado. Por otro lado, la intencionalidad de lograr que la investigación "funcionará" no siempre resulta del todo compatible con el complejo de restricciones que operan sobre el docente.

En una secuencia confluyen tareas propuestas a los alumnos, acciones y formulaciones producidas por ellos, discursos que justifican sus acciones, intervenciones docentes, interacciones entre pares... Para un docente, actor de esta trama, no siempre es accesible esta complejidad como un todo. Esta investigación ha permitido atraparla y comprenderla de manera más profunda. Bienvenida sea la comprensión para un trabajo docente presente y futuro.