El Teorema de la Existencia y Unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden: análisis de las dificultades de los alumnos para su co

Claudia Zang, Gretel Fernández von Metzen y María Natalia León
claudiamzang@gmail.com,
gretelalefernandez@gmail.com
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Misiones, Argentina.

Resumen

Este trabajo nace de la inquietud de un grupo de docentes de Matemática ante las dificultades observadas para la comprensión, por parte de los estudiantes, del teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales de primer orden. Dicho teorema forma parte del programa analítico de la asignatura Análisis IV de los profesorados de Matemática y de Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Misiones (FCEQyN–UNaM), que se centra en el estudio de las ecuaciones diferenciales, de los sistemas de ecuaciones diferenciales y en un estudio introductorio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Este documento tiene el propósito de, por un lado, mostrar sintéticamente la perspectiva con que se aborda el estudio de dicho teorema en diferentes libros de texto sugeridos desde la cátedra; y por el otro, la propuesta que se realiza, desde el equipo de docentes, para evaluar su aprendizaje y por último, exponer los resultados obtenidos en dicha evaluación. El análisis de las respuestas dadas por los alumnos refleja las dificultades que tienen para reconocer la estructura lógica subyacente a todo teorema y el manejo inadecuado de los razonamientos lógicos detectado los lleva a establecer conclusiones erróneas.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, teorema de existencia y unicidad, enseñanza, aprendizaje, ingeniería didáctica.

Abstract

This work is developed by the investigators in view of the concern to handle the perceived difficulties, on the part of students, in understanding the theorem of existence and uniqueness of first–order differential equations. This theorem forms part of Analytical Program of Analysis IV of the faculties of Mathematics and Physics, from the Faculty of Exact, Chemical and Natural Sciences dependent of the National University of Misiones (FCEQyN–UNAM), which focuses on the study of differential equations, systems of differential equations and an introductory study of partial differential equations.

First, this document is intended to show, synthetically, the perspective from which the study of this theorem is discussed in different text books suggested from the subject, and on the other hand, we display the proposal which is made by the team of teachers to assess learning to, finally present the results obtained in this evaluation. The analysis of the answers given by students reflects the difficulties to recognize the underlying logic of the whole structure theorem, so in this way, improper handling of logical reasoning leads them to establish erroneous conclusions.

Keywords: *differential equations, existence and uniqueness theorem, teaching, learning, didactic engineering.*

1. Introducción

En los últimos años, el equipo de cátedra de la Asignatura Análisis IV[2] de los Profesorados en Matemática y en Física de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales dependiente de la Universidad Nacional de Misiones (FCEQyN–UNaM) ha detectado, a partir de observaciones de clase y del análisis de las producciones de los alumnos, una serie de dificultades en lo referente al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (ED). La asignatura mencionada centra su atención en el estudio de las ED, de los sistemas de ED y en un estudio introductorio de las ED en derivadas parciales.

Este trabajo se deriva de las investigaciones que los docentes han venido realizando en el marco de un proyecto de investigación[3] cuyo principal propósito es caracterizar en qué medida los estudiantes recurren a conocimientos adquiridos, en instancias iniciales de su trayectoria universitaria, como un recurso para los primeros aprendizajes en el ámbito de las ED.

El objetivo es mostrar las dificultades halladas a partir del análisis de las producciones de los estudiantes referentes al teorema de existencia y unicidad (TEyU) para un problema de valor inicial de primer orden. Dicho problema se extrajo de la bibliografía sugerida[4] desde la cátedra después de haber realizado una revisión bibliográfica para situar el lugar que ocupa el TEyU como objeto de estudio y la importancia institucional que se le otorga.

Se sostiene que la perspectiva adoptada en los libros de texto puede influir en la comprensión de los estudiantes de determinados contenidos. En ellos se reflejan la concepción de la Matemática y de la enseñanza a la que adhiere el autor y, de forma indirecta, las teorías vigentes relativas a la forma en que deben presentarse los diferentes temas. Los libros, según Campanario y Otero (2000), influyen significativamente en el aprendizaje porque, por un lado, los docentes los consultan habitualmente para orientar y dirigir muchas actividades que conforman sus propuestas áulicas y, por el otro, los alumnos los usan como material de estudio. Es por eso que se estimó conveniente realizar un análisis preliminar de la presentación que hacen los libros de texto del TEyU de soluciones para ED de primer orden.

Por otro lado, en lo referente a la enseñanza en general y de las ED en particular, los investigadores coinciden en que es posible lograr aprendizajes significativos, en términos de Ausubel, Novak y Hanesian (1983), recuperando los conocimientos previos de los alumnos para que éstos funcionen como anclaje de los nuevos que se espera construir. Estas premisas fueron tenidas en cuenta en la formulación de las actividades propuestas a los alumnos. En tanto, Artigue (1995a) señala que las dificultadas que se observan en la enseñanza del cálculo en el ámbito universitario han llevado a que, en los últimos años, se desarrollen muchos trabajos de investigación y de innovación. Sin embargo, advierte que no hay una comunicación fluida entre los investigadores debido a la diversidad de marcos teóricos que sustentan tales trabajos de investigación. Esta ausencia de un paradigma dominante también es reconocida por otros investigadores, que además sostienen que en ciertos momentos esta diversidad puede ser enriquecedora. Sin embargo, el avance de la disciplina y la potenciación de sus aplicaciones prácticas demandan unificar esfuerzos para constituir un verdadero programa de investigación. (Godino, Batanero y Font, 2007).

Artigue (1995a) realiza una reseña de las investigaciones que se han venido realizando en los últimos años en el marco de la enseñanza del cálculo e indica algunos problemas que tienen los estudiantes para el aprendizaje de dicha área, los vincula a una comprensión incompleta de algunos conceptos, como los de número real, límite, función, etc. Entre ellas, se destacan las ligadas con la identificación de lo que es una función: plantea que se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función (para la conversión de un registro a otro o para trabajar dentro de un mismo registro, por ejemplo en el

registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información, sobre la función y su derivada). Esto influye, en efecto, en el abordaje de la solución de una ED dado que el proceso requiere hallar una función conocido el comportamiento de su variación.
Moreno Moreno y Azcárate Giménez (2003) coinciden con Artigue y también advierten que las dificultades se ven potenciadas por el estilo de enseñanza predominante en el ámbito universitario, centrada en el enfoque algebraico y en desmedro de los enfoques cualitativos que resaltan el valor de las ED como poderosas herramientas de modelación del mundo real. Para intentar solucionar estas falencias se recomienda el estudio de las ED mediante la integración de los enfoques analítico, numérico y gráfico. Esta postura también la mantiene Habre (2000, citado por Dullius, 2009), quien señala que los avances tecnológicos hicieron que el estudio de los enfoques numérico y cualitativo no tenga impedimentos.

2. Metodología

Considerando las descripciones de Bardín (1996) y Ander–Egg (2010) sobre las diferentes metodologías de investigación en Ciencias Sociales, la modalidad seguida aquí responde a un enfoque descriptivo: se usaron técnicas de análisis de contenido que posibilitaron la recopilación de datos. Éstas fueron usadas simultáneamente con las que provee la metodología de la Ingeniería Didáctica. Esta última se caracteriza por plantear un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, diseñadas a partir de un trabajo de concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
En la Ingeniería Didáctica es fundamental el registro de los estudios de casos, y la validación, a diferencia de otros tipos de investigación, es interna y se efectúa mediante la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.
La Ingeniería Didáctica se ejecuta siguiendo las siguientes fases: 1) análisis preliminar, 2) concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas, 3) experimentación y 4) análisis *a posteriori* y evaluación (Artigue, 1995b).

3. Puesta en práctica de la Ingeniería Didáctica

3.1. Análisis de la bibliografía

En el marco de las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica se realizó un análisis epistemológico para identificar las características del saber en juego; se inspeccionó una muestra de seis libros escogidos intencionalmente atendiendo a un único criterio: estar sugerido en la bibliografía propuesta en el programa analítico de la asignatura antes mencionada. El propósito de dicha revisión bibliográfica fue ubicar el TEyU caracterizando la secuencia propuesta en los libros de texto, analizar la profundidad con que se lo aborda y a partir de allí inferir la relevancia que se le confiere.
Como producto de tales acciones se deriva una serie de reflexiones: en general el TEyU para problemas de valor inicial de primer orden es abordado en todos los libros examinados. La secuencia seguida por los autores es similar en la mayoría de ellos: el teorema se presenta luego de haber definido la terminología específica y explicitado la simbología relativa a las ED y antes de los métodos para resolver ED de primer orden (Zill, 1997; Edwards y Penney, 2001; Nagle, Saff y Snider, 2001; Zill y Cullen, 2002). Sin embargo, en un libro se estudian en primer lugar las ED lineales, se enuncia y demuestra el TEyU para éstas, luego se presentan métodos analíticos para resolver ED de primer orden, finalmente el TEyU para problemas de valor inicial de primer orden y su demostración se deja para otra sección (Boyce y DiPrima, 2000). Y en el último de los libros analizados este teorema se presenta luego de finalizado el Capítulo 1, que se ocupa del estudio de los métodos analíticos

de resolución de ED de primer orden (Kreyszig, 2002). Una reflexión que se deriva de este análisis es que sería más productivo e interesante poder establecer si la ED en cuestión en realidad tiene solución antes de arremeter con la búsqueda de la misma. Es por ello que llama la atención que este teorema recién sea tratado después de que se hayan presentado los métodos de resolución analíticos. Por otra parte, en todos los libros analizados la demostración no acompaña al enunciado del teorema sino que se deja para otra sección, generalmente está en los apéndices.

En algunos de los libros sondeados no se incluye la demostración quizás porque implica la utilización de conocimientos que no son desarrollados en el texto (Zill, 1997; Zill y Cullen, 2002). En otros se establece la equivalencia entre el problema de valor inicial y la posibilidad de construir una ecuación integral. Luego se utiliza el método iterativo de Picard para generar aproximaciones sucesivas que convergen a la solución (Nagle, Saff y Snider, 2001; Boyce y Di Prima, 2000; Edwards y Penney, 2001; Kreyszig, 2002). A propósito de este proceso constructivo, en las propuestas que realizan Kreyszig, Boyce y DiPrima, y Edwards y Penney, se aclara que la hipótesis de la continuidad de las derivadas incluida en el teorema es más rigurosa de lo que se requiere, puede ser sustituida por una condición menos restrictiva denominada condición de continuidad de Lipschitz[1] que asegura convergencia en el método de Picard.

3.2. Análisis de eventuales dificultades de los estudiantes y diseño de la propuesta didáctica implementada

Para continuar con las dos primeras fases de la Ingeniería también se estudiaron las dificultades que tienen los estudiantes para la comprensión del teorema, detectadas a partir de observaciones áulicas en años anteriores. Se seleccionó un problema que involucra al TEyU sobre la base de objetivos concretos prefijados por los profesores. Para finalizar estas primeras fases de la Ingeniería se llevó adelante la resolución experta del problema a fin de detectar las eventuales dificultades que podrían surgir para los estudiantes y finalmente se anticiparon los posibles procedimientos para su resolución.

Con respecto al teorema en estudio, en la bibliografía se presentan diferentes enunciados del mismo, todos ellos equivalentes. El trabajo durante las clases de la asignatura Análisis IV fue extraído de Zill (1997) y se expone en la Figura 1.

A fin de identificar conflictos a los que se enfrentan los alumnos y obtener indicios del nivel de comprensión del teorema antes citado se elaboró la siguiente actividad (Figura 2).

Resolver: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0$ **(2)**

TEOREMA 1.1 **Existencia de una solución única**

Sea R una región rectangular del plano xy, definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, **que contiene al** punto (x_0, ya). **Si** $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en F, entonces existe un intervalo I, **centrado** en x_0, y una función única, $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor **inicial** expresado por las ecuaciones (2).

Figura 1.
TEyU trabajado en clase.

Demuestre que en el intervalo $[0, \pi]$ ambas funciones $y_1 = 1$ e $y_2 = \cos x$ satisfacen el siguiente problema de valor inicial :

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$$
$$y(0) = 1$$

¿Por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad?

Figura 2. *Actividad propuesta a los alumnos.*

La resolución experta del problema permitió identificar una serie de conocimientos inherentes al mismo pero que no son inmediatos para el alumno, por ejemplo, las relaciones que existen entre los siguientes conjuntos del eje x real: el dominio de la función $y(x)$, el intervalo I en el que la solución está definida o existe, y el intervalo I_0 donde la solución existe y es única. En ocasiones los tres conjuntos mencionados no coinciden, como en el caso que nos ocupa. La función $y=\cos x$ está definida en todo el eje real, en tanto que la solución del problema de valor inicial existe solo en la región del plano en que $f(x,y) = -\sqrt{1-y^2}$ es continua, esto es para $y \in [-1,1]$. Este intervalo posible para y concuerda con el conjunto imagen de la función $y = \cos x$, en consecuencia x puede tomar cualquier valor real. Por último, la solución del problema de valor inicial es única solamente en el intervalo en que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(-\sqrt{1-y^2}\right)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

es continua, es decir, la variación de y estará limitada al intervalo $(-1, 1)$. Esto conduce a la exclusión de los puntos del dominio de la función $y=\cos x$ que tienen como imagen a $y=1$ y a $y=-1$, es decir, la variable independiente x pertenece a alguno de los intervalos abiertos $(n\pi, (n+1)\pi)$ para n entero. Para el problema en cuestión, la condición inicial $y(0) = 1$ implica que el punto (x_0, y_0) al que hace referencia el teorema no esté dentro del intervalo de existencia y unicidad, por lo que no se verifican las hipótesis y en consecuencia, nada puede asegurarse sobre la tesis del mismo. Eligiendo cualquier condición inicial en que y_0 sea estrictamente mayor que -1 y estrictamente menor que 1, el problema tendría solución única.

Volviendo a la cuestión de cómo demostrar que las funciones sugeridas son solución, dado que es lo primero que solicita la consigna, se pueden seguir dos caminos: uno es la simple sustitución en la ED a fin de verificar la igualdad, y el otro es resolverla y corroborar que las soluciones que se obtienen coinciden con las dadas en el enunciado del problema. Si bien ambas son viables, en ellas subyacen dos formas diferentes de pensar a la ED. La primera implica reconocer y utilizar el concepto de ecuación y lo que significa la solución de una ecuación desde un punto de vista algebraico. En tanto, la segunda requiere el conocimiento de algún método de resolución de ED.

Elegir resolver la ecuación supone el manejo de diferentes saberes matemáticos, no solamente aquellos relacionados con una técnica de resolución. Es de destacar que se requiere tener presentes conceptos de trigonometría, diferenciabilidad y continuidad de funciones y al mismo tiempo es necesario reconocer que la función constante $y(x)=1$ es una solución singular de la ED que se pierde en el proceso de separación de variables, dado que no hay elección posible de la constante de integración que conduzca a la misma.

A continuación, como parte del análisis de cómo lo resolvería un experto, se presenta la resolución siguiendo el segundo camino descrito, es decir, resolviendo la ED:

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-y^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2}$$

Usando el método de variables separables, para valores de y en $(-1, 1)$:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int dx$$

$$arcsen(y) = -x + C$$

$$y = sen\,(-x + C)$$

La expresión obtenida antes corresponde a la solución general de la ED, puesto que genera infinitas soluciones de acuerdo a los diferentes valores que admite la constante de integración C. Se llama solución particular de la ED a la que se obtiene de la solución general asignando cualquier valor determinado a la constante arbitraria C. Atendiendo a la consigna, se usa la condición inicial $y(0)=1$ del problema en análisis, se tiene:

$$1 = sen(C) \Rightarrow C = \frac{1}{2}\pi + 2n\pi$$

En este caso, debido a la periodicidad de la función que resuelve la ED, se obtiene como solución particular una expresión que incluye un parámetro que da cuenta de esta periodicidad. La expresión simbólica de la solución particular que satisface la condición inicial dada en el enunciado del problema es:

$$y = sen\left(-x + \frac{1}{2}\pi + 2n\pi\right)$$

Es natural elegir $n=0$, y teniendo en cuenta la identidad trigonométrica siguiente:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

se obtiene la solución $y=cos\,x$ dada en el problema, con lo cual se ha probado que la misma es una solución del problema de valor inicial. En el intervalo sugerido en el enunciado del problema, la función $cos\,x$ es inyectiva y su conjunto imagen incluye al intervalo en que

$$\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial y}$$

es continua, esto es al intervalo abierto $(-1,1)$.
Hay que notar que para la otra solución propuesta, es decir, $y(x)=1$, no hay elección posible de la constante de integración C que permita deducir esta solución particular a partir de la solución general $y = sen\,(-x + C)$. En efecto, si $y(x)=1$, para todo valor de x, se tiene:

$$1 = sen\,(-x + C)$$

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi = -x + C$$

$$C = \frac{\pi}{2} + 2n\pi + x$$

Que contradice el hecho de que C sea una constante puesto que depende del valor de x.
Por otra parte, la ED también admite otras soluciones, por ejemplo, la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos(x) + C & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}.$$

Cabe aclarar que esta solución tiene relación con otros conceptos matemáticos ya estudiados, como por ejemplo funciones definidas por partes, su continuidad y existencia de su derivada, particularmente en $x = 0$.
Por otra parte, cuando se anticiparon los posibles procedimientos de resolución de los alumnos, se esperaba que no tuvieran dificultades para demostrar, por sustitución, que las funciones dadas son solución de la ED. Por el contrario, se pensó que las dificultades se presentarían si los estudiantes decidían resolver la ED, dado que en el proceso se obtiene una solución implícita que debe ser llevada a su forma explícita a fin de poder compararla con la dada en el problema, y además al ser ésta una función trigonométrica, tal como

se mostró en las líneas precedentes, hay infinitos valores de la constante de integración que satisfacen la condición inicial dada, por lo que es conveniente elegir uno de ellos y mediante identidades trigonométricas conocidas, deducir que la solución dada se desprende de la solución general. También se supuso que resultaría conflictivo el reconocer que el teorema establece condiciones suficientes pero no necesarias para la existencia de solución. En este sentido, se esperaba que surja el razonamiento incorrecto que consiste en negar la tesis del teorema una vez corroborada que no se cumplen las hipótesis del mismo. Es decir, se anticipó que, al no verificarse una de las condiciones que establece la hipótesis del teorema ($\frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua), los alumnos responderían que el problema de valor inicial no tiene solución.

3.3. Implementación de la propuesta didáctica

Por otro lado, la fase de experimentación consistió en la puesta en escena de la actividad elegida. La misma se ejecutó en el contexto del primer examen parcial de la asignatura mencionada (cohorte 2012). El problema en estudio era el primero de un total de cinco ejercicios que conformaban el examen. El examen fue resuelto en forma individual y se destinaron tres horas para su resolución. Esta evaluación se realizó con posterioridad al tratamiento, por parte de la docente, de los tópicos relacionados con métodos analíticos, gráficos y numéricos de resolución de ED de primer orden, resolución de ED de orden superior con coeficientes constantes y Transformadas de Laplace aplicadas a la resolución de ED.

El propósito de incluir esta actividad relacionada con el TEyU en un examen parcial estaba relacionado con fomentar instancias evaluativas que permitan mostrar aprendizajes no memorísticos dado que la resolución de la situación elegida demanda la comprensión del teorema en cuestión más que su recitado. Al mismo tiempo requiere prestar especial atención a la estructura lógica que subyace al teorema, puesto que un manejo inadecuado de los razonamientos lógicos por parte de los alumnos lleva al establecimiento de conclusiones incorrectas.

3.4. Discusión de los procedimientos empleados por los estudiantes

A partir de lo observado en el transcurso de los últimos años, se infiere que la comprensión de este teorema resulta ser una ardua tarea para los estudiantes.

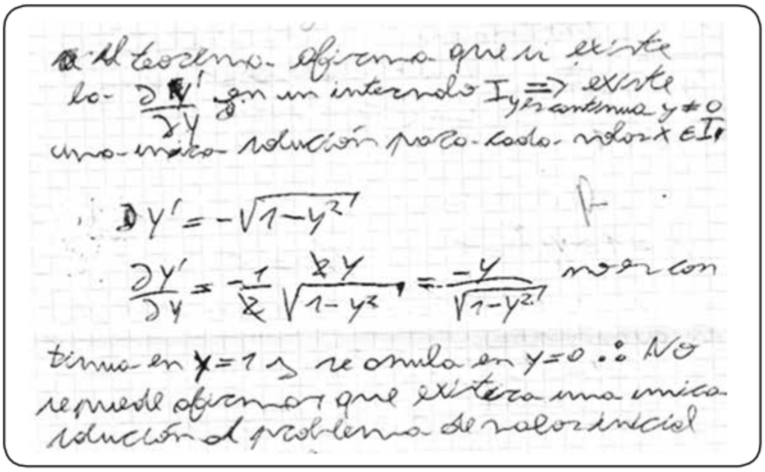
Las cuestiones más sobresalientes que surgen del análisis realizado sobre la base de las producciones de los estudiantes se discuten a continuación. El número de alumnos que realizó el examen fue de 25, de los cuales 11 resuelven en forma correcta el problema en cuestión y los demás dan respuestas incorrectas pero con resoluciones que denotan diferente nivel de apropiación de los conceptos evaluados. Se puede notar que de aquellos que no logran una comprensión adecuada del teorema hay cuatro que no tienen dificultades para mostrar que las funciones dadas (por sustitución) son solución de la ED, y sin embargo no pueden justificar porque no se contradice el teorema. Otros citan correctamente el teorema pero identifican incorrectamente el objeto $f(x,y)$ al que dicho teorema hace referencia, puesto que consideran toda la ecuación diferencial como dicha función. La respuesta dada por un alumno se limita a considerar la continuidad de la derivada de la función $f(x,y)$ con respecto a y; fundado en ello concluye que, como tal derivada no es continua y se anula para $y=0$ (esta última cuestión señalada es totalmente ajena al TEyU), no se puede asegurar que exista una solución única al Problema de Valor Inicial (figura 3). A su vez, se puede señalar una confusión en la notación, puesto que el estudiante escribe la derivada parcial de y' con respecto a y en lugar de la derivada de f con respecto a y. Posiblemente dicha confusión tenga su origen en el hecho de que al escribir la ED en la forma $y' = f(x,y)$, y derivar ambos miembros con respecto a y se obtiene la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial y}\, y' = \frac{\partial}{\partial y}\, f(x,y)\ .$$

En caso de elegir trabajar con el primer miembro de dicha expresión, surge el inconveniente de que se pierde de vista la relación de dependencia que hay entre las variables x e y (Figura 3).

Otros alumnos analizan la continuidad de las soluciones y con sustento en estos análisis obtienen conclusiones sobre la existencia y unicidad de éstas, es decir, sobre la base de la continuidad de las soluciones concluyen que éstas existen. Siguiendo este razonamiento habría que hallar la solución de una ED y analizar su continuidad, pero si la solución se puede hallar es porque existe, y en ese caso no tendría sentido formular un teorema. Procedimientos de esta índole se muestran en la Figura 4. Cabe destacar que la idea de recurrir al teorema es justamente probar que la ED tiene solución antes de emprender la tarea de resolverla. El problema principal que se infiere de estos razonamientos es que los alumnos no pueden identificar la estructura lógica que subyace al teorema, consecuentemente no pueden sacar conclusiones acertadas sobre la relación que debe existir entre la hipótesis y la tesis del mismo.

Otros dos alumnos concluyen que como la derivada de $f(x,y)$ con respecto a y no es continua queda asegurada la existencia de más de una solución. Este razonamiento fue anticipado por las autoras del presente trabajo en las fases de análisis a priori de la Ingeniería. Además, uno de ellos no toma en cuenta la otra condición del teorema que



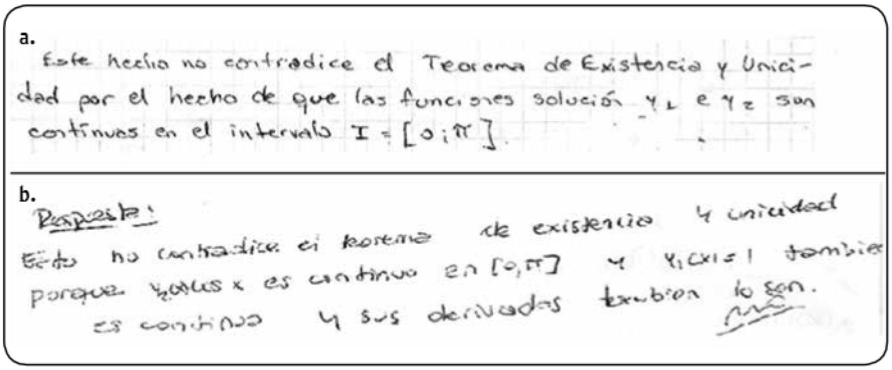
El teorema afirma que si existe la $\frac{\partial y'}{\partial y}$ en un intervalo I_y y es continua y $\neq 0$ $\Rightarrow$ existe una única solución para cada valor $x \in I$

$\therefore\ y' = -\sqrt{1-y^2}$

$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ no es continua en $y=1$ y se anula en $y=0$ $\therefore$ No se puede afirmar que existe una única solución al problema de valor inicial

Figura 3.

Resolución en la que se evidencia falta de claridad de las hipótesis del TEyU.



a.

Este hecho no contradice el Teorema de Existencia y Unicidad por el hecho de que las funciones solución y_1 e y_2 son continuas en el intervalo $I = [0; \pi]$.

b.

Respuesta:

Esto no contradice el teorema de existencia y unicidad porque $y_2 = \cos x$ es continua en $[0,\pi]$ y $y_1(x) = 1$ también y sus derivadas también lo son.

Figura 4.

Ejemplos de razonamientos incorrectos: uso de la conclusión del teorema para justificar la respuesta.

tiene que ver con la continuidad de $f(x,y)$ (Fig. 5a). En la Figura 5b), se transcribe un fragmento del examen de uno de estos alumnos (que por razones de legibilidad no pudo ser digitalizado). En él se observa que identifica y aplica correctamente las condiciones que según el teorema en estudio, debe cumplir un problema de valor inicial a fin de tener solución única y, como no se verifica la continuidad de la derivada, concluye que debe haber más de una solución. Al mismo tiempo debemos indicar que el alumno se equivoca en la manera en que se denota un punto. Afirma que la derivada no es continua en $y(0)=1$, y debería haber indicado que no lo es en el punto (0,1).

a. : – Aquí podemos ver que como f es continua en todos los puntos dicha E.D tendrá asegurado más de una solución ; esto se ve reflejado porque $y_1(x)=1$ e $y_2(x)=\cos(x)$ son solución de la misma ($y_1(x)=1$ es solución singular de la E.D).

b.
$f(x,y)=-\sqrt{1-y^2}$ es continua en $[0,\pi]$. Sin embargo $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{1-y^2}}$ no es continua en $y(0)=1$, por lo tanto no verifica la hipótesis del teorema de existencia y unicidad, y por ello no verificará la tesis (no tendrá solución única)

Figura 5.
Ejemplos de razonamientos incorrectos: no se toma en cuenta que el teorema establece condiciones suficientes pero no necesarias.

En realidad, el teorema asegura que la ED tendrá solución en caso de que la función $f(x,y)$ sea continua y permite asegurar la unicidad de la solución si es continua, si ésta no es continua no se puede saber si va a haber una o más de una solución.

Por otro lado, tal como ya se mencionó antes, se puede demostrar que las funciones dadas son solución por dos caminos: la sustitución en la ED o la resolución de la ED a través del método de variables separables.

Tal como fue anticipado, la mayoría de los alumnos se decidió por lo primero y en líneas generales no hubo dificultades. Un solo estudiante optó por resolver la ED usando separación de variables; el procedimiento de resolución en general fue aplicado de forma correcta (Figura 6). Sin embargo, al olvidar incluir la constante de integración no puede extraer información que le sea de utilidad, y en consecuencia no puede deducir que $y(x)=1$ es una solución singular y que $y(x)=\cos x$ se obtiene para la constante de integración dada por $C=\frac{1}{2}\pi+2n\pi$, con n un número entero.

1. $\begin{cases} y' + \sqrt{1-y^2} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad [0,\pi]$

$y_1(x) = 1 \quad , \quad y_2(x) = \cos x$

$y' + \sqrt{1-y^2} = 0$

$y' = -\sqrt{1-y^2}$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -dx$

$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\int dx$

$\operatorname{sen}^{-1} y = -x$

$\operatorname{arcsen} y = -x$

$\boxed{y = \operatorname{sen}(-x)}$

Figura 6.
Falta la constante de integración y no obtiene información útil para resolver el problema.

4. Reflexiones finales

Sobre la base del análisis de las producciones de los estudiantes se pudo observar que, en líneas generales, la mayoría tiene problemas con la implicación lógica que subyace al problema: no se reconoce que la falta de cumplimiento de las hipótesis del teorema implica que nada puede decirse sobre la tesis del mismo, es decir, la tesis puede cumplirse o no, y ahí justamente está el motivo de porqué no se contradice el teorema. A partir de esto, se cree que los alumnos tienen poco dominio de la estructura de implicación lógica que siguen los teoremas.

Así, surge también la necesidad de efectuar un análisis de las prácticas docentes y de la bibliografía que se maneja en el ámbito académico a fin de detectar si éstas realmente permiten la construcción de modelos, la utilización de conocimientos previos, la superación de obstáculos y la integración entre los diferentes contenidos matemáticos abordados a lo largo de su trayecto por la Universidad.

Resta, como equipo de investigación, plantear un esquema de trabajo que involucre a otras cátedras que se focalizan en el estudio de estructuras y razonamientos lógicos a fin de superar las dificultades detectadas.

Si bien desde el equipo de trabajo se ha discutido la necesidad de pensar en propuestas de enseñanza que involucren situaciones intramatemáticas de las que emerja el teorema, no se han diseñado aún situaciones en un contexto extramatemático, por lo que queda pendiente profundizar acerca de la construcción de problemas «del mundo real» y su relación con el teorema de existencia y unicidad de solución de ED de primer orden.

Este estudio puede resultar de interés para quienes enseñan ecuaciones diferenciales, dado que caracterizar en qué medida los alumnos recurren a conocimientos previos para abordar las ED posibilitará generar propuestas donde el foco esté centrado en interpretar la ED para extraer información, establecer relaciones entre objetos matemáticos conocidos, hacer uso de propiedades y teoremas que anticipen características de las soluciones, y de esta manera ocuparse de otras cuestiones, además de las técnicas de solución.

Específicamente, en esta experiencia se pudo observar que los alumnos tienen dificultades para trasladar a otros contextos los aprendizajes que han adquirido en el ámbito de la Lógica. Esto se puede vincular a las premisas del aprendizaje significativo, que supone que el aprender es un proceso que implica construcciones y reelaboraciones de los esquemas de conocimientos.

Aunque son múltiples los factores que influyen en el aprendizaje de diferentes conceptos, se piensa que los libros de texto pueden obstaculizar o favorecer instancias de aprendizaje. De la revisión bibliográfica realizada surge la inquietud de que en la mayoría de los textos no se enfatiza tanto que el teorema establece condiciones que son suficientes pero no necesarias para la existencia de solución. En este sentido, solo el texto de Dennis Zill (1997) lo remarca a través de diversos ejemplos aclarando que si no se cumplen las hipótesis del teorema en cuestión puede pasar cualquier cosa con la ED: puede tener solución o no tener; y en el caso de que tenga solución, ésta puede ser única o no.

El desafío pendiente para los docentes es generar situaciones de aprendizaje que busquen en cierta forma revertir estos resultados y que posibiliten un estudio integrando los enfoques analítico, numérico y cualitativo acorde a las recomendaciones hechas por los investigadores.

Notas

(1) Una versión preliminar de este trabajo fue presentado con el título: «Dificultades de los alumnos para la comprensión del teorema de Existencia y Unicidad» en las Jornadas Científico Tecnológicas que organizó la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Misiones del 15 al 17 de mayo de 2013 por los mismos autores.

(2) La asignatura Análisis IV se cursa en el primer cuatrimestre de tercer año de las carreras mencionadas, con una carga horaria semanal de seis horas reloj, distribuidas en dos clases de tres horas cada una de carácter teórico práctico.

(3) El proyecto dentro del cual se enmarca este trabajo se denomina «Contenidos matemáticos básicos: ¿en qué medida son un recurso para los primeros aprendizajes de ecuaciones diferenciales?».

(4) Algunos de los libros sugeridos en el programa de la asignatura son: Apóstol, T. (1967). *Calculus*, Vols. I y II, Buenos Aires: Reverté; Ayres, F. (1992). *Ecuaciones Diferenciales*. México: McGraw–Hill; Blanchard P.; Devaney, R.; Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: Thomson; Borrelli, R. y Coleman, C.S. (2002). *Ecuaciones Diferenciales. Una perspectiva de modelación*. México: Oxford University Press; Boyce, W. y Di Prima, R. (2002). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley; Edwards, H.; Penney, D. (2001). *Ecuaciones diferenciales*. México: Prentice Hall; Kreyszig, E. (2002). *Matemáticas avanzadas para Ingeniería*, Vols. I y II. México: Limusa; Nagle, K.; Saff, E. y Snider, A. (2001). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Addison Wesley; Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. México: Thomson; Zill, D. y Cullen, M. (2002). *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*. México: Thomson.

(5) Condición de Lipschitz: si R es una región del espacio (x,y) de dimensión 2, entonces se dice que la función $f(x,y)$ es continua de Lipschitz en R, siempre y cuando exista una constante positiva k tal que $|\, f(x, y_1) - f(x, y_2)\,| \leq k\,|y_1 - y_2|$.