Evaluando la comprensión de los números racionales en estudiantes que culminan la escuela secundaria

Marta Nardoni [•], ***Viviana Camara*** [•] ***y Marcel Pochulu*** [••]
mgnardoni@arnet.com.ar, vcamara@fce.unl.edu.ar, marcelpochulu@hotmail.com
[•] *Facultad Ciencias Económicas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.*
[••] *Universidad Nacional de Villa María, Córdoba, Argentina.*

Resumen

El trabajo tuvo por finalidad evaluar la comprensión que alcanzan los estudiantes sobre los números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria. Como marco teórico y metodológico se utilizaron herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. Para el estudio, se diseñó e implementó un instrumento que pone en juego la red de relaciones que activa un estudiante cuando ha comprendido el objeto matemático en cuestión, y se administró a los estudiantes ingresantes a la Facultad de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) y del Profesorado en el Instituto N° 10 de Helvecia, de la provincia de Santa Fe, durante el año 2012. Se examinaron las producciones, enfocándose en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problema planteadas, intentando establecer la relación entre las prácticas que son capaces de realizar con este objeto matemático y el significado que pudieron construir acerca del mismo. Además, se realizaron entrevistas clínicas con la finalidad de efectuar un análisis profundo de la comprensión que tienen los estudiantes y constatar el significado que sugería algunas prácticas operativas que realizaron. Finalmente se describen las dificultades y obstáculos que presentaron los estudiantes, como así también, la comprensión alcanzada sobre los números racionales, lo cual permitiría a los profesores diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje adecuados sobre este objeto matemático.

Palabras clave: comprensión en matemática, números racionales, enfoque ontosemiótico.

Abstract

The work had intended assess understanding students over the rational numbers, as a mathematical object, reaching the end of high school. The Ontosemiotico approach of knowledge and mathematical instruction tools were used as theoretical and methodological framework.

For the study, was designed and implemented an instrument which brings into play the network of relations that activates a student when he understood the mathematical object in question, and was administered to students admitted to the Facultad de Ciencias Económicas of the Universidad Nacional de Litoral and the teachers at the Instituto N° 10 of Helvetia, in the province of Santa Fe, during the year 2012.

Discussed productions, focusing on the analysis of the system of mathematical practices carried out by the students to the raised problems–situations, trying to establish the relationship between the practices that are capable of performing with this mathematical object and the meaning that could build on the same.

In addition, clinical interviews in order to carry out an in–depth analysis of understanding that students have and see the meaning suggesting some operational practices carried out, were conducted.

Finally describes the difficulties and obstacles that students, as well as, the understanding reached on the rational numbers, which would allow teachers to design processes of teaching and learning appropriate about this mathematical object.

Keywords: *understanding mathematics, numbers rational, focus ontosemiotic.*

1. Introducción

La educación sigue siendo para las sociedades uno de las cuestiones más importantes para generar igualdad social, impulsar el desarrollo económico, cultural, personal, y mejorar la calidad de vida. Sin embargo, a pesar de todas las políticas educativas aplicadas y los cambios tecnológicos implementados, en la escuela secundaria es recurrente la problemática acerca del aprendizaje de la matemática. También en los primeros años de la universidad sigue presentando dificultades y suele ser catalogada por los estudiantes como la asignatura más difícil de aprobar.

Es frecuente, además, observar que los profesores de matemática discutan la formación recibida por los alumnos en el nivel educativo anterior y las deficiencias que presentan en los aprendizajes.

En este sentido, diversos estudios e investigaciones, como los de Figueras (1988), Ávila y Mancera (1989), Duval (1999), Chamorro (2003), D'amore (2005), Pochulu (2005), Sanchez (2006), Abrate, Pochulu y Vargas (2007), Perera y Valdemoros (2007), Fandiño (2009), entre otros, muestran que los estudiantes no están logrando una formación matemática adecuada y tienen dificultades en la comprensión de los números racionales.

Esta problemática, que es de conocimiento de los profesores de niveles superiores (universitario y superior no universitario) implica, generalmente, que en las evaluaciones de los cursos de ingreso o de nivelación, se presenten situaciones y actividades que involucren números racionales y el éxito o fracaso obtenido, cuantificado a través de una calificación, termina siendo un indicador de lo que saben del tema. Esta calificación, puesta en el mejor de los casos con absoluta justicia, puede ser tomada como indicador de lo que el alumno sabe del tema, pero no cuánto sabe de él, cómo lo sabe o por qué sabe lo que sabe.

La noción de comprensión, que tiene múltiples acepciones, se vincula con posiciones de investigadores en Educación Matemática como Godino (2000 y 2003), Font (2001), Pino–Fan, Godino y Font (2011), Pochulu (2011) y Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011) y se entiende aquí del siguiente modo:

Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extramatemática) que «obliga» al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD:122).

En consecuencia, si se ha comprendido un determinado objeto matemático, el alumno debiera ser capaz de articular coherentemente seis elementos referidos al mismo: las situaciones problemáticas en las que participa el objeto, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje. No obstante, la pregunta que subyace de fondo es ¿cómo sabrán docentes y estudiantes que se ha alcanzado la comprensión de determinado objeto matemático? Además, ¿podríamos hablar de comprensión de un objeto matemático o de ciertas categorías de comprensión que alcanzó el alumno?

2. Delimitación del problema de investigación

Desde los primeros años de la educación primaria, los estudiantes trabajan con números racionales. En un primer momento con fracciones, luego decimales y razones. Y así continúan en el nivel secundario, ampliando sus aplicaciones y significados. Sin embargo, al terminar la escuela secundaria y/o ingresar a los primeros años del nivel terciario o universitario podemos observar diferentes niveles de dificultades en la resolución de problemas sencillos o en la realización de actividades que impliquen operaciones con números racionales. Por ejemplo, confunden el algoritmo de diferentes operaciones, no identifican los números decimales como números racionales, entre otros.

Numerosos estudios e investigaciones (Perera y Valdemoros, 2007; Fandiño, 2005) reconocen a los números racionales, específicamente a las fracciones, como una de las áreas que ofrece mayores dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje.

En virtud de esto, es evidente que hoy en día en el ámbito de la educación matemática se busca, más que aplicar mecánicamente un algoritmo o procedimiento, la comprensión de los conceptos. En general, muchas investigaciones dan cuenta de la preocupación sobre la comprensión en Matemática, como Skemp (1976), Schoenfeld (1992), Brousseau (2004), Godino y Batanero (2004), entre otros.

Para abordar esta problemática, el propósito de este trabajo es valorar la comprensión que tienen los estudiantes referida a los números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria, y previo a iniciar estudios universitarios o de nivel superior.

Según Godino, Font, Konic y Wilhemi (2009) se entiende por objeto matemático a un sistema complejo de prácticas que el mismo objeto posibilita, las cuales se relacionan con un tipo de lenguaje, un tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentos, unas determinadas definiciones, situaciones–problema y proposiciones. A su vez, todos estos elementos constituyen una configuración epistémica del objeto matemático en cuestión. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas del Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002, 2003) para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994), y permiten analizar la comprensión que un alumno alcanza sobre un objeto matemático.

El EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino, 2000; Font, 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas. Esto lleva a determinar si reconoce el campo de problemas en que se involucra este objeto matemático, aplica y recuerda (implícitamente en la mayoría de los casos) los conceptos, propiedades y procedimientos que se requieren para llevar a cabo exitosamente las tareas, y utiliza lenguaje y argumentos apropiados en sus explicaciones.

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (Figura 1) son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

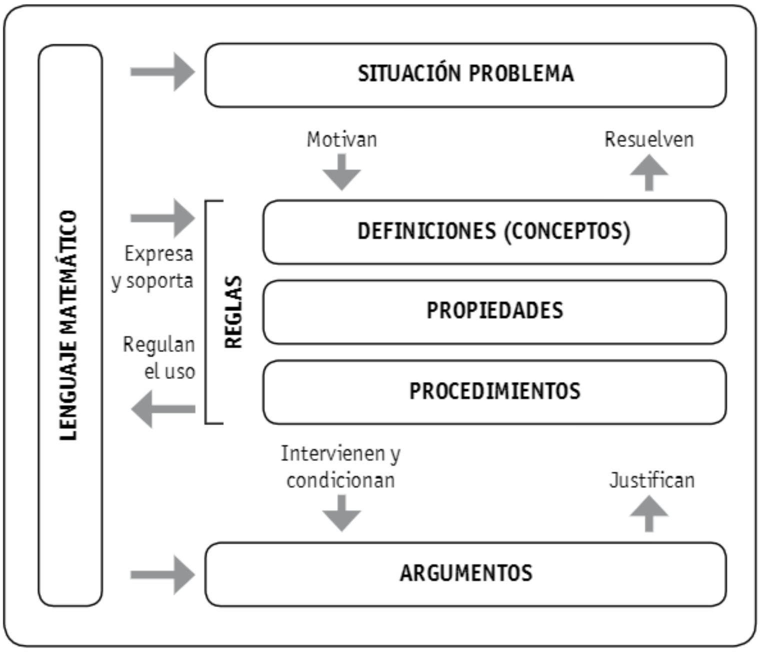


Figura 1.
Componentes de una configuración epistémica/cognitiva.

Podemos advertir que en las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones–problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática, y son las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos, en tanto, los entendemos como prácticas que vienen a justificar las definiciones, procedimientos y proposiciones, las que están reguladas por el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.
Es de destacar que cada objeto matemático, dependiendo del nivel de análisis que se quiera hacer, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, o combinaciones entre ellos y obviamente, está soportado por el lenguaje.

Las preguntas que guían esta investigación son:
- Qué han comprendido los alumnos sobre números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios?
- ¿Cuáles son las principales dificultades que se les presentan a los estudiantes cuando operan con números racionales, al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios?

3. Metodología

La investigación es de naturaleza diagnóstico–descriptiva y cualitativa, de corte etnográfico y hermenéutico, y fue desarrollada bajo el Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002, 2003) y Godino, Batanero y Font (2007), como línea teórica y metodológica de la Didáctica de la Matemática.
La investigación se organizó en cuatro fases diferenciadas, aunque en este trabajo nos centraremos en reportar los resultados de las dos últimas. En una primera instancia se realizó un análisis didáctico de las propuestas de enseñanza de

números racionales que promueven los textos escolares de Matemática para la Escuela Secundaria. Para ello, se analizaron las tareas y actividades que proponen 8 libros escolares de Matemática, que son utilizados frecuentemente por los profesores o recomendados desde los organismos oficiales de Argentina. Para el análisis se tuvo en cuenta: el tipo de situación–problema que propone; los conceptos, definiciones, propiedades, procedimientos, algoritmos, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones o rutinas, tanto previos como emergentes; los argumentos y razonamientos necesarios para validar, justificar o explicar las proposiciones y los procedimientos, o la validez de la solución a un problema, y los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., que aparecen en la resolución de la actividad.
Con estos elementos se estructuró una configuración epistémica general institucional del tema objeto de estudio, que junto a los indicadores de idoneidad que proporciona el EOS, permitieron realizar una valoración de la propuesta didáctica de cada texto, y al mismo tiempo, recuperar tareas y actividades para diseñar un instrumento destinado a valorar la comprensión sobre los números racionales.
En una tercera fase se administró el instrumento diseñado a los estudiantes aspirantes a ingresar, durante el año 2012 a la FCE–UNL, en carreras que tienen Matemática en su diseño curricular (Contador Público Nacional, Licenciatura en Administración y Licenciatura en Economía) y en el Instituto Superior de Profesorado Nº 10 de Helvecia, en las carreras de Profesorado de nivel primario y Profesorado de nivel secundario en Biología.
Este instrumento constó de una serie de actividades que los estudiantes debieron resolver por escrito, y una entrevista clínica semiestructurada que se elaboró teniendo en cuenta las respuestas brindadas.
En el siguiente cuadro se detallan la cantidad de alumnos a quienes se administró:

Institución	Cantidad de alumnos	Cantidad de aprobados (+50%)
Facultad Ciencias Económicas de la UNL Instituto Superior del Profesorado N° 10	43 (cuarenta y tres) 18 (dieciocho)	25 (veinticinco) 10 (diez)

Cuadro 1.
Cantidad de estudiantes a quienes se administró el instrumento.

Posteriormente seleccionamos 35 producciones escritas que, habitualmente, se considerarían «aprobadas» por haber logrado resolver correctamente el 50 % o más de las consignas planteadas. Examinamos las producciones enfocándonos en el análisis del sistema de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes ante las situaciones–problema planteadas, intentando establecer la relación entre el conglomerado de prácticas que los alumnos son capaces de realizar con este objeto matemático (números racionales) y el significado que pudieron construir acerca del mismo. Con la finalidad de efectuar un análisis profundo de la comprensión que tienen los estudiantes sobre los números racionales, realizamos entrevistas clínicas para ahondar aún más en la problemática en cuestión.
En una cuarta fase, teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la fase anterior, se armaron las configuraciones cognitivas de cada estudiante. Es decir, el modo en que se articulan los elementos primarios recuperados en la primera fase y que se evidenciaron en las prácticas operativas y discursivas que llevó a cabo el estudiante. Esto permitió realizar una valoración individual de la comprensión alcanzada por cada estudiante y las dificultades que aún persisten al ingresar en el nivel superior.

4. Instrumentos de recolección y estudio de datos

El instrumento consistió en una serie de actividades, 27 en total, en las cuales aparecen situaciones problemáticas intra y extramatemáticas, donde los estudiantes debían poner en juego conceptos, procedimientos, propiedades, lenguaje y argumentos referidos al objeto matemático números racionales. Estas actividades se obtuvieron de la configuración epistémica realizada en la fase 1, después de analizar los 8 textos escolares de Matemática que abordan a los números racionales como objeto de estudio.

El instrumento diseñado en la fase 2 y que aplicamos al grupo de estudiantes constó de dos partes:
a) Tareas y actividades que realizan por escrito los estudiantes, y
b) Entrevista semiestructurada diseñada en función de las respuestas brindadas por los estudiantes en la instancia anterior.

Se analizaron cualitativamente las soluciones que realizaron los 35 estudiantes (10 ingresantes a Instituto del Profesorado y 25 ingresantes a la Universidad) que resolvieron correctamente el 50% o más de las actividades propuestas en el Instrumento.

Por lo tanto realizamos las configuraciones cognitivas de los 35 estudiantes analizando las soluciones de todas las actividades del instrumento, luego las examinamos y comparamos con la configuración epistémica de referencia (conf. global de los textos escolares) que adoptamos lo que nos permitió encontrar información que responde a los objetivos específicos planteados y da elementos para hacer conjeturas sobre la comprensión alcanzada sobre los números racionales, como también los obstáculos y dificultades.

5. Análisis de los datos obtenidos

Para el análisis de los datos obtenidos de la población de estudiantes seguimos el esquema que representamos en la Figura 2. En primera instancia analizamos las prácticas operativas que quedaron registradas en las evaluaciones realizadas por los estudiantes, las cuales estaban condicionadas por el instrumento que administramos. Ese análisis llevó a determinar posibles vínculos que estarían realizando para la resolución de la actividad, lo cual no necesariamente es así, pues es una interpretación que hacemos de lo que otra persona ha realizado. Esta correspondencia se realiza a través de una función semiótica (indicada con número 1 en la Figura 2), la cual es un constructo que propone el EOS, y que tiene por antecedente a un objeto matemático, y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por un estudiante ante una cierta clase de situaciones–problema que se les presentó en el instrumento.

Si bien cuando un estudiante realiza una práctica matemática es necesario que active un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos primarios que componen un objeto (lenguaje, situaciones–problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), no necesariamente lo realizan como el profesor o intérprete lo está pensando. Este acto de semiosis dio lugar a una primera agrupación de los elementos de significado, lo que constituye la «Primera Configuración Cognitiva» obtenida para cada estudiante.

Posteriormente, diseñamos una entrevista para llevar a cabo con cada estudiante, a fin de constatar o rectificar las prácticas operativas que habíamos supuesto en la primera configuración cognitiva. Asimismo, la entrevista permitió ampliar la información que presuponíamos de las prácticas operativas realizadas por el estudiante.

De la entrevista, y teniendo en cuenta la primera configuración cognitiva, volvimos a realizar otro acto de semiosis (indicado con el Nº 3 en la Figura 2) lo que permitió esbozar la «Configuración Cognitiva Final» de cada estudiante.

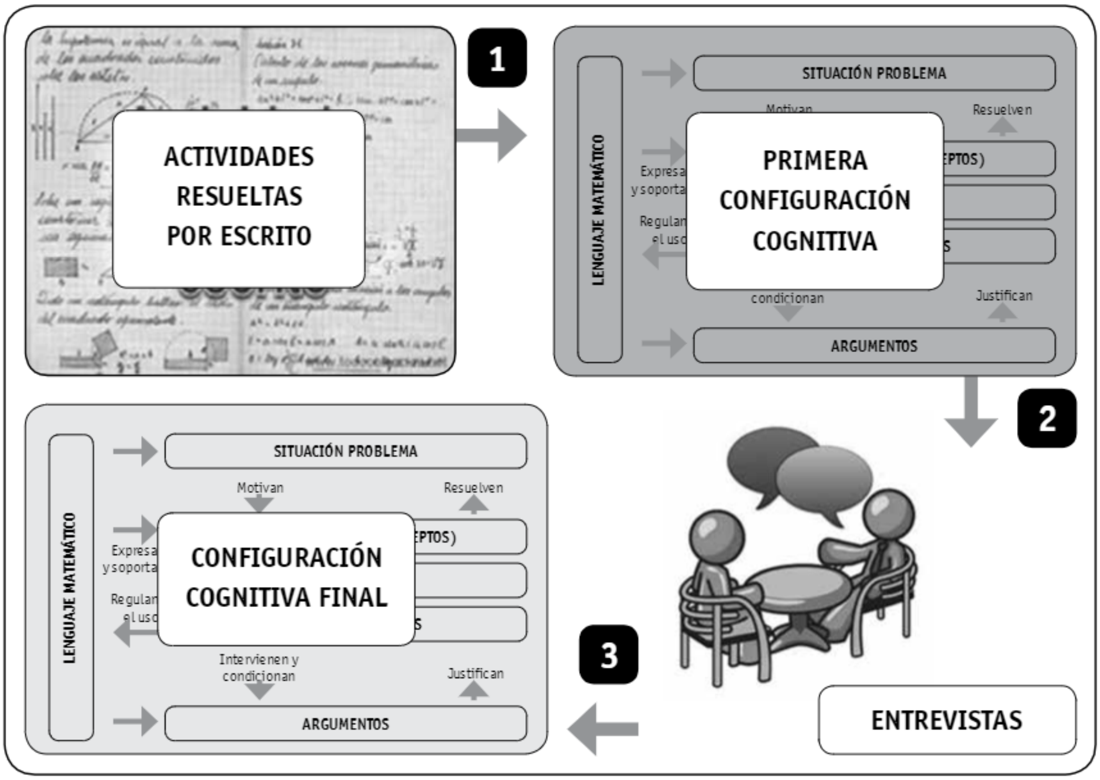


Figura 2.

Esquema de análisis de los datos obtenidos de los estudiantes.

A su vez, para cada grupo de estudiantes (aspirantes a ingresar a la UNL y al ISP N° 10) confeccionamos un cuadro *ad hoc*, donde se tabularon las respuestas dadas a cada actividad del instrumento, considerando los conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y lenguaje utilizado. Esto permitió esbozar una Configuración Cognitiva General, la que comparada con la Configuración Epistémica obtenida del análisis de los textos escolares, logró que se pudieran determinar: (a) Los conceptos, propiedades, procedimientos, lenguaje y argumentaciones que efectivamente ponen en juego los estudiantes al realizar tareas que involucran los números racionales, y (b) las dificultades, errores y deficiencias que se les presentan cuando resuelven las mismas. Estas últimas también se obtienen de las configuraciones cognitivas incompletas de los estudiantes. Para ello se tomó como base los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje de la configuración epistémica de referencia y se fueron realizando distintos cuadros *ad hoc*, sistematizando la información en cuanto a la presencia, parcialmente presente, o ausencia de los mismos en la configuración cognitiva de cada estudiante.

6. Algunas evidencias

Describimos a continuación algunas de las actividades que tiene el instrumento, y mostramos evidencias a través de respuestas obtenidas por estudiantes, las que dan cuenta del modo en que articulan los elementos primarios que intervienen en la actividad. Una de las actividades propuestas en el instrumento es la siguiente:

Determina el o los números que satisfacen las siguientes condiciones, justificando tu respuesta.
a) Al doble de la suma entre $\frac{3}{4}$ y 2,
divídelo por la mitad de la resta entre 1 y $\frac{1}{2}$.
b) Al opuesto del inverso de 2,
réstale la tercera parte de la suma entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

Ante esta actividad, solicitamos que los estudiantes explicaran cómo habían procedido para dar una respuesta. La intencionalidad es que en sus argumentos pongan en juego el lenguaje matemático, conceptos, propiedades y procedimientos que desencadena la situación–problema propuesta. Frente a ésta, una estudiante realizó:

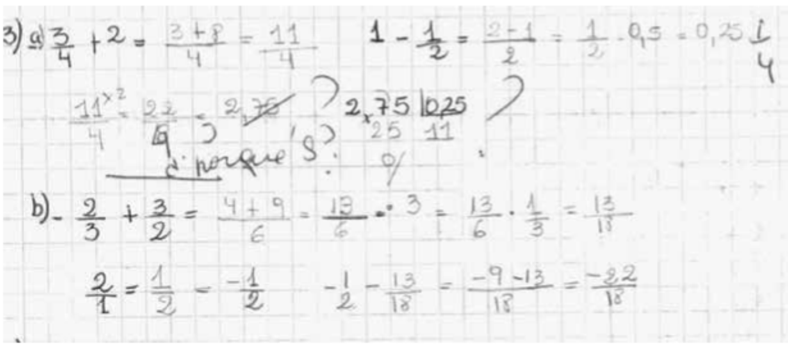


Figura 3.
Resolución de la situación–problema.

Ante la resolución de la actividad, se entrevistó a la estudiante.

Entrevistador: ¿Cómo expresaste el doble? ¿Cómo resolviste el doble de 11/4?
Alumna: El doble significa multiplicar por 2. Luego 2.11/4 = 22/8. Humm... no sé si está bien.
Entrevistador: En uno de tus procedimientos escribiste 2/1 = ½ = -1/2 ¿Qué quisiste expresar? ¿Es correcto?
Alumna: Quise escribir a que es igual el opuesto del inverso de 2. Así lo calculé. ¡Si! es correcto.

Si consideramos la respuesta y el fragmento de la entrevista que se transcribió anteriormente, se advierte que la estudiante interpreta el lenguaje verbal traduciendo al simbólico, aplica en forma correcta la suma de fracciones de distinto denominador (procedimiento) para resolver ambas actividades, y reconoce propiedades de las operaciones (opuestas e inversas). Sin embargo, cuando debe realizar el doble de un número (concepto y procedimiento) considera a la fracción conformada por dos números (concepto). A su vez, no logra conservar las igualdades (concepto), dado que va operando y mantiene el signo igual para relacionar expresiones que no son iguales. Cuando se le consulta sobre esta situación, argumenta que las expresiones son correctas, y no advierte la inconsistencia.
Algunas de las situaciones problemas que contiene el instrumento tienen por intención determinar si se reconoce el campo de problemas de los números racionales. Entre ellas la que exponemos a continuación:

Un inversor tiene un tercio de sus ahorros en acciones, la cuarta parte del resto en un plazo fijo y los $60 000 restantes en moneda extranjera. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado?

En la resolución, se debían aplicar estrategias (procedimientos) que se relacionan con procesos de traducción del lenguaje natural al simbólico. Una resolución que efectuó otra estudiante fue la siguiente:

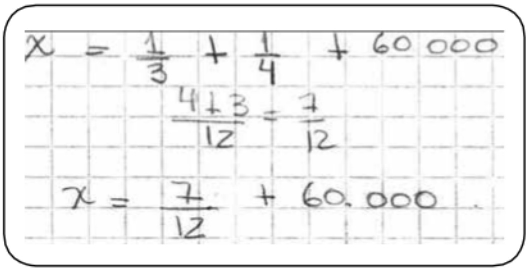


Figura 4.
Resolución de la situación–problema.

Un fragmento de la entrevista correspondiente se transcribe a continuación:

Entrevistador: ¿Cómo realizaste el procedimiento?
Alumna: X es el capital, pero no sé cómo expresar lo demás.
Entrevistador: ¿Cómo expresarías 1/3 de sus ahorros? ¿Y la cuarta parte del resto?
Alumna: 1/3 del capital, sería 1/3 de X, ¼ de lo que me queda sería ¼ X – 1/3 me parece.

En este caso, como en los demás problemas que se le presentaron a la estudiante, se observa que realiza correctamente las operaciones con fracciones (procedimientos), pero tiene dificultades para interpretar la expresión simbólica de algunos enunciados (lenguaje), y no logra explicitar con argumentos apropiados la justificación de sus procedimientos. Esto evidencia que no logra establecer adecuadamente relaciones entre los objetos primarios que intervienen en la situación–problema. Otra situación planteada fue:

Se llena hasta los $\frac{3}{4}$ un bidón de 16,5 litros y hasta los $\frac{2}{3}$ otro de 19 litros. ¿Cuál de los dos contiene más líquido?

La resolución que efectuó una estudiante:

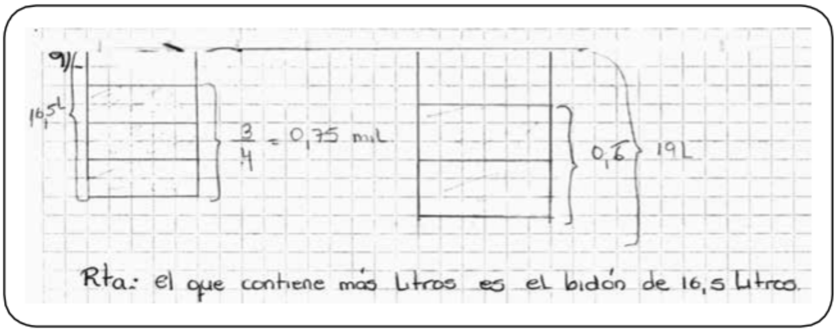


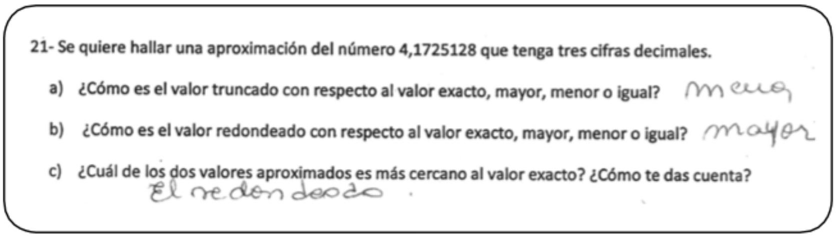
Figura 5.
Resolución de la situación–problema.

El fragmento de la entrevista asociada a esta resolución fue:
Entrevistador: En tu respuesta realizaste un gráfico ¿Qué significa lo que representaste?
Alumna: Representé el entero y me dio ¾ =0,75 y 2/3= 0,6, luego ¾ > 2/3
Entrevistador: ¿Las cantidades son iguales? ¿Podés representarlas con un mismo gráfico?
Alumna: No, no son iguales. Ah, eso no lo pensé.
Entrevistador: ¿De qué otra forma podrías calcular ¾ de 16,5?
Alumna: No, no sé. No me acuerdo.

En este caso podemos advertir que trabaja con representaciones gráficas (lenguaje) en forma incorrecta, en tanto utiliza el mismo entero para representar distintas cantidades (conceptos). Cuando se le pregunta de qué otra forma puede calcular ¾ de 16,5, expresa que no recuerda el modo de hacerlo (procedimientos).
Otra actividad planteada fue la siguiente:

> Se quiere hallar una aproximación del número 4,1725128 que tenga tres cifras decimales.
> 1) ¿Cómo es el valor truncado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual?
> 2) ¿Cómo es el valor redondeado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual?
> 3) ¿Cuál de los dos valores aproximados es más cercano al valor exacto? ¿Cómo te das cuenta?

Las respuestas brindadas a la misma fueron:


21- Se quiere hallar una aproximación del número 4,1725128 que tenga tres cifras decimales.

a) ¿Cómo es el valor truncado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual? menor

b) ¿Cómo es el valor redondeado con respecto al valor exacto, mayor, menor o igual? mayor

c) ¿Cuál de los dos valores aproximados es más cercano al valor exacto? ¿Cómo te das cuenta?
El redondeado.

Figura 6.

Resolución de la situación–problema.

La entrevista realizada para esta resolución:

Entrevistador: Podrías justificar o explicar las respuestas que diste en a, b y c.
Alumna: Es menor pues el valor truncado es 4,172 y si resto este del exacto me da 0,0005128, o sea, es menor. Es mayor porque el valor redondeado es 4,173 y si resto este del exacto me da negativo -0,0004872. El redondeado, me doy cuenta en la resta.
Entrevistador: ¿Los números que trabajaste en esta actividad son números Racionales?
Alumna: No, son decimales, aunque si los paso a fracción son racionales.

En esta actividad podemos observar que la alumna tiene dificultades para expresar en forma escrita sus justificaciones (argumentos) y presenta confusión en lo que respecta al conjunto de números racionales (conceptos).
Otra actividad referida a las desigualdades se enunció de esta manera:

> Encuentra un número natural n, de modo que se verifique lo siguiente: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$
>
> ¿Habrá más de un valor posible para n? Si crees que sí, indica cuáles podrían ser. Si crees que no, explica por qué.

La resolución de la actividad y el fragmento de entrevista correspondiente de las prácticas operativas y discursivas llevadas a cabo por una estudiante se indican a continuación.

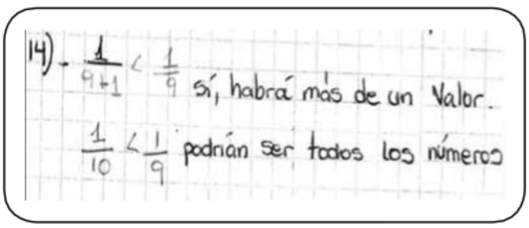


Figura 7.

Resolución de la situación–problema.

Entrevistador: ¿Cómo lo resolviste?
Alumna: Busqué un número y lo sustituí en n.
Entrevistador: ¿Cómo te das cuenta de que se verifica la desigualdad?
Alumna: Porque al realizar el producto cruzado se verifica.
Entrevistador: ¿Cómo se verifica?
Alumna: Me queda por ejemplo 9 < 10, 2 < 3, etc.
Entrevistador: ¿Por qué decís que se podría dar con todos los números?
Alumna: Porque siempre en el primer denominador me quedará un número mayor.

En esta actividad podemos ver que la estudiante realiza distintos procedimientos pero no reconoce las propiedades que utiliza. Tiene dificultades para dar un argumento convincente utilizando lenguaje adecuado. También se observa que aborda cada caso tomando ejemplos particulares, pero no puede realizar generalizaciones.

Otra situación–problema fue:

> 15- Lee atentamente los siguientes enunciados y explica si es posible resolver cada problema. En el caso de serlo, resuélvelo.
> - Un tercio de los alumnos del curso A son aficionados al básquet, mientras que 3/8 del curso B son aficionados al fútbol. ¿Cuál de los deportes tiene más aficionados?
> - Un tercio de los alumnos del colegio de Martín son aficionados al básquet, mientras que tres octavos de los alumnos del colegio son aficionados al fútbol. ¿Cuál de los dos deportes tiene más aficionados?

Las respuestas que brindó una estudiante (Figura 8) y la entrevista realizada se transcriben a continuación:

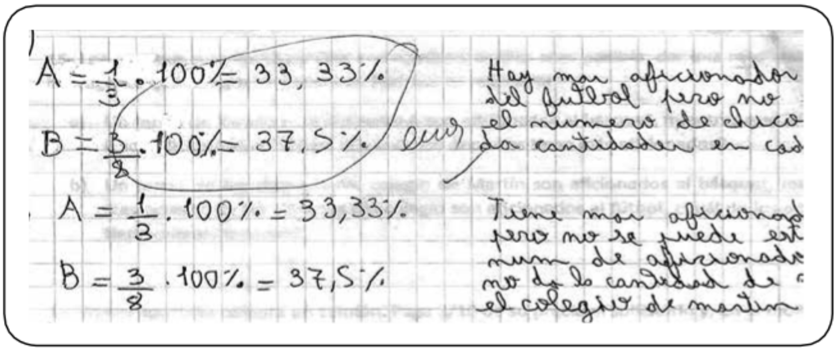


Figura 8.
Resolución de la situación–problema.

Entrevistador: ¿Podrías contarme como pensaste esta actividad?
Alumna: En los dos casos son iguales, calculé el porcentaje que me representa cada fracción del entero y pude obtener la respuesta.
Entrevistador: Podrías leer de nuevo el enunciado y revisar tu respuesta.
Alumna: Sií, pero me parece que está bien lo que hice.

En esta actividad advertimos que la alumna tiene dificultades para interpretar el enunciado. Asimismo, no relaciona adecuadamente elementos lingüísticos, e intenta resolver un caso particular referido a porcentaje.

7. A modo de conclusiones

Para la presentación de las conclusiones, seguiremos el siguiente orden:

(a) Los conceptos y propiedades, referidos a números racionales, que ponen en práctica los alumnos cuando resuelven problemas, (b) Los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente los alumnos en contextos de resolución de problemas con números racionales; (c) El tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran números racionales.

(a) Los conceptos y propiedades, referidos a números racionales, que ponen en práctica los alumnos cuando resuelven problemas.

- Los *conceptos* más utilizados, o que ponen en práctica en la resolución de situaciones problemas que involucran a los números racionales, son los de fracción, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones.
- No utilizan de manera apropiada algunos *conceptos* como: fracción como parte de una cantidad continua o discreta, fracción como razón y fracción como operador, desigualdad en expresiones que contienen números racionales.
- La mayoría de los estudiantes no logra articular con la situación–problema los *conceptos* de notación científica y expresión decimal aproximada. En algunos casos aparecen algunos *procedimientos* incompletos o la aproximación por redondeo.
- Los estudiantes para carreras de formación docente (ISP Nº 10) lograron mostrar un mejor manejo de los *conceptos* de proporción, magnitudes proporcionales y porcentaje.
- Ponen en práctica la mayoría de las *propiedades* de las fracciones equivalentes, no así de las *propiedades* de las proporciones y magnitudes proporcionales.
- La mayoría desconoce algunas *propiedades* asociadas a la resolución de problemas con números racionales (distributiva de la división con respecto a la suma o resta, asociativa de la multiplicación, inverso aditivo, inverso multiplicativo, entre otras) y las *propiedades* de las desigualdades, las cuales se relacionan con el *concepto* de desigualdad.

(b) Los procedimientos y técnicas que emplean habitualmente los alumnos en contextos de resolución de problemas con números racionales.

- Los *procedimientos* más utilizados, ya sea en forma correcta o con algunas deficiencias son: representar gráficamente fracciones en cantidades continuas y algoritmos básicos de las operaciones con racionales.
- Se presentan deficiencias para interpretar problemas verbales, traducción de lenguaje simbólico a natural y viceversa, y aplicación de procedimientos adecuados para hallar la solución.
- La mitad de los estudiantes logra aplicar adecuadamente *procedimientos* asociados con la resolución de situaciones problemas que involucran magnitudes proporcionales.
- Pocos estudiantes son los que logran realizar aproximaciones de expresiones decimales (sólo aproximan por redondeo) y menor aún quienes expresan cantidades numéricas en notación científica.
- Muy pocos estudiantes logran interpretar y resolver situaciones problemas que involucren *procedimientos* necesarios para trabajar con desigualdades.
- Utilizan de manera errónea *procedimientos* relativos a la resolución de ecuaciones, cálculo de porcentajes, aproximación de expresiones decimales por redondeo o truncamiento, y expresar números en notación científica.
- No utilizan *procedimientos* que impliquen la utilización del lenguaje gráfico en la resolución de situaciones problemas. Sólo en algunos casos aparecen intentos por realizar traducciones de un enunciado verbal a gráfico.

(c) El tipo de argumentaciones y uso de lenguaje que emplean los alumnos cuando brindan explicaciones sobre la resolución de situaciones que involucran números racionales.

- Llevan a cabo procesos de *argumentación* mediante prácticas discursivas sólo cuando se sienten presionados a realizarlos (en este caso mediante una entrevista). Esto es, no argumentan de manera escrita, aún cuando sea una condición de la consigna de la situación–problema.
- Los estudiantes aspirantes a ingresar en carreras de Formación Docente lograron mejores *argumentaciones* que involucran procedimientos para justificar lo realizado en las situaciones problemas.
- Los estudiantes aspirantes a ingresar a la Universidad lograron mejores *argumentaciones* que involucran las propiedades de los números racionales para justificar sus desarrollos. Estas justificaciones se remiten sólo a mencionar alguna propiedad sin lograr profundizar demasiado en ellas.
- El *lenguaje* utilizado en las argumentaciones difiere en ambos grupos, dado que los estudiantes ingresantes a la universidad utilizan el lenguaje verbal y/o simbólico, mientras que los estudiantes ingresantes a Formación Docente sólo utilizan el lenguaje verbal.
- La mayoría de los estudiantes cuando lo hacen introducen *argumentos* a través del lenguaje verbal que no son adecuados y emplean *elementos lingüísticos* que no se encontrarían en una configuración epistémica asociada a números racionales.

Para cerrar nuestro trabajo, retomamos nuestras preguntas iniciales ¿Qué han comprendido los alumnos sobre números racionales, como objeto matemático, al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios? ¿Cuáles son las principales dificultades que se les presentan a los estudiantes cuando operan con números racionales, al finalizar la escuela secundaria o al iniciar estudios terciarios o universitarios?

Como respuesta a la primera, nuestra investigación no permitió identificar que:

- Los conceptos más utilizados son los de fracciones, operaciones con fracciones, expresiones decimales y operaciones, lo que evidencia un aprendizaje centrado en rutinas y algoritmos propios de este campo numérico.
- No distinguieron, en muchos casos, el campo de situaciones–problemas de los números racionales, dados en contextos intra o extramatemáticos, lo que se evidencia en la incorrecta interpretación de los enunciados, en el uso inadecuado del lenguaje simbólico y/o gráfico y en la deficiente aplicación de procedimientos.
- En la mayoría de los casos no dan *argumentos* convincentes de las resoluciones que llevan a cabo, e introducen lenguaje verbal que no es adecuado, con *elementos lingüísticos* que no se encontrarían en una Configuración Epistémica asociada a números racionales. Esto nos lleva a conjeturar que tiene su origen en la falta de experiencias previas en torno a procesos de argumentación.

Con respecto a la segunda pregunta referida a las dificultades que se les presentan a los estudiantes y teniendo en cuenta que las dificultades de aprendizaje surgen cuando se encuentra problemas o complicaciones para la comprensión, detallamos a continuación una serie de ellas que pudimos identificar en el estudio realizado en esta investigación:

Los estudiantes presentan dificultades en:

- Identificar las múltiples representaciones que tiene un número racional y cómo se relacionan entre sí las mismas. En particular, no distinguen a la fracción como una razón, o como la cantidad de veces que está una cantidad en otra, y por consiguiente, para relacionar fracciones equivalentes con proporciones.
- Utilizar los diferentes significados (entendidos como conjunto de prácticas operativas y discursivas) de número racional, la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias estructurales, relacionales y de representación y la significación de la densidad respecto del orden.
- Aplicar los algoritmos de las operaciones con

números racionales, y en la resolución de ecuaciones y desigualdades que los involucran. En este caso, utilizan algoritmos y procedimientos que no logran sostener en procesos argumentativos adecuados para justificar su aplicación, en tanto no se vinculan con conceptos ni propiedades.
- Emplear conceptos y procedimientos necesarios para la aproximación de expresiones decimales y en la escritura en notación científica.
- Interpretar la noción de densidad de los números racionales.
- Interpretar enunciados verbales y simbólicos en situaciones problemas, lo que se evidencia en la incorrecta traducción a otros lenguajes como simbólico o gráfico y en lo inadecuado que fueron los procesos de argumentación.
- Justificar respuestas que se vinculan con conceptos, propiedades, procedimientos y algoritmos propios de los números racionales.

Todas estas dificultades actúan como un obstáculo para la comprensión de los números racionales como objeto de estudio y por consiguiente de los números reales.
En términos teóricos, si se ha comprendido un determinado objeto matemático, el estudiante debiera ser capaz de articular coherentemente seis elementos referidos al mismo: las situaciones problemáticas en las que participa el objeto, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje, por lo que, en base a la valoración empírica realizada, podemos concluir que:
Los estudiantes integrantes de la experiencia no tienen una comprensión cabal de los números racionales como objeto matemático, en tanto no han podido utilizarlo de manera competente en diferentes prácticas. Esto guarda relación con el hecho de que la configuración cognitiva referida a números racionales de cada estudiante evaluado es incompleta —en tanto no domina la totalidad del sistema de prácticas relacionadas con este objeto matemático.
No obstante, rescatando lo que cada estudiante ha comprendido sobre números racionales, se logra estructurar la configuración epistémica deseada y utilizada como referencial para el estudio.
Esto nos lleva a concluir que si se organizaran procesos de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente planificados, se mejoraría la comprensión global que los estudiantes lograrían tener sobre los números racionales como objeto de estudio.

Referencias bibliográficas

Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
Ávila, A. y Mancera, E. (1989). La fracción: una expresión difícil de interpretar. *Revista de la Universidad Pedagógica Nacional 6*(17), 21–26.
Brousseau, G. (2004). *Théorie des Situations Didactiques (Didactiques des Mathématiques 1970–1990).* Grenoble: La Pensée Sauvage, Editions. 2da ed.
Cid, E.; Godino, J.D. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Extraído el 30 de noviembre de 2011 de: http://www.ugr.es/local/jgodino/
Chamorro, M.D. (2003). *Didáctica de las Matemáticas.* Madrid: Pearson.
D'amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática.* México: Reverté.
Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Cali: Universidad del Valle.