

FRACTALES: HASTA EL INFINITO Y MÁS ALLÁ (O MÁS ACÁ)

GRUPO PI

María Peñas, María C. Cañadas, Sandra Gallardo, Manuel J. Martínez-Santaolalla, Marta Molina

Resumen

Presentamos una propuesta para trabajar los fractales en educación secundaria. Proponemos el uso de los fractales como medio para que los alumnos repasen y trabajen, de una forma original y creativa, otros conceptos geométricos del currículo relacionados con los fractales. Durante el taller mostraremos una idea intuitiva de fractal así como el modo de construir algunos de ellos de manera sencilla y entretenida. En las construcciones utilizaremos materiales accesibles y de fácil manejo como el papel, la regla, el compás y las tijeras.

INTRODUCCIÓN

Son numerosos los campos en los que la utilidad de los fractales es destacable. La meteorología, la medicina, la geología, o la economía son algunos de ellos. La utilización de los fractales en matemáticas es muy reciente y está revolucionando la ciencia actual y, en especial, las matemáticas (Redondo y Haro, 2004).

El estudio de los fractales no queda recogido de forma explícita en el currículo, aunque se incluyen contenidos referentes a las numerosas características de los mismos como son la semejanza de figuras, la recursividad o la idea intuitiva de infinito.

En este taller presentamos una propuesta que puede ser empleada para primer y segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria y para Bachillerato (en especial, Bachillerato de Artes). Pretendemos mostrar una forma de trabajar con fractales donde entran en juego diversos materiales manipulativos de fácil obtención como son el papel, la regla, el compás y las tijeras.

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable pero cobra especial importancia en geometría, donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico (Boletín Oficial del Estado, 2007, p. 751).

En este taller distinguimos tres partes. En la primera realizaremos una presentación de los fractales a través de una propuesta donde el aspecto visual es el más importante. En segundo lugar trabajaremos con algunos de los fractales bidimensionales más conocidos: el copo de Nieve de Koch, el Triángulo de Sierpinski y el Espacio de Peano. Realizaremos su construcción utilizando lápiz y papel. Propondremos también el trabajo con otros fractales menos conocidos, que pretenden desarrollar la intuición y estimular la originalidad de nuestros alumnos. En tercer y último lugar, propondremos la construcción de fractales en tres dimensiones, utilizando unas plantillas determinadas y tijeras. A lo largo de este documento detallamos en qué consiste nuestra propuesta de trabajo, así como la realización de los fractales mencionados.

ACERCAMIENTO A LA IDEA DE FRACTAL

El vertiginoso avance de las nuevas tecnologías se ha visto reflejado en las aulas. Son cada vez más numerosos los centros de enseñanza que disponen de recursos informáticos al alcance de los estudiantes. Uno de los objetivos que plantea el currículo español es “Desarrollar técnicas y métodos relacionados con los hábitos de trabajo, la curiosidad y el interés para investigar y resolver problemas, la responsabilidad y

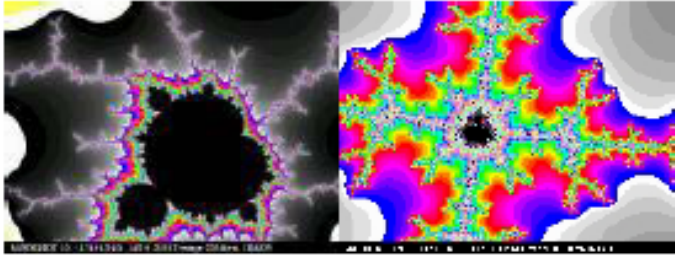
colaboración en el trabajo en equipo con la flexibilidad suficiente para cambiar el propio punto de vista en la búsqueda de soluciones”. Siguiendo estas orientaciones, proponemos que los alumnos realicen una búsqueda en Internet con la intención de obtener información sobre los fractales. Las imágenes que cualquier buscador ofrece al realizar esta búsqueda pueden resultar de gran utilidad a la hora de explicarles la idea de fractal.

En la Figura 1 mostramos un dossier con nuestra propuesta para acercar a los alumnos la idea de fractal de un modo sencillo y claro, pese a que, probablemente, sea totalmente desconocido para ellos.

¿QUÉ ES UN FRACTAL?

Fractal es un término acuñado por Mandelbrot en los años 70 a partir del adjetivo latino *fractus* que significa interrumpido o irregular.

Los fractales forman una amplia familia de objetos matemáticos encuadrados en la teoría geométrica de la medida y que permiten estudiar objetos naturales muy diversos.



Es complicado dar una definición general de fractal porque muchas de estas definiciones no se pueden aplicar a todas las familias de fractales existentes. Sin embargo, todos los fractales tienen algo en común, ya que todos ellos son el producto de la iteración, repetición, de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final de una complicación aparente extraordinaria.

Los objetos fractales se estudian en una nueva rama de las Matemáticas llamada *Geometría fractal* en la que últimamente se están realizando gran número de descubrimientos debido al interés despertado y por el elevado número de profesionales dedicados a la investigación en este campo.

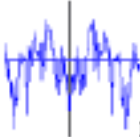
Aunque el término fractal es tan reciente, ya se conocían ejemplos de conjuntos y curvas con propiedades fractales desde hace bastantes años. Estos conjuntos y curvas interesaron a gran número de matemáticos empeñados en explicar su curioso comportamiento. Ejemplos muy conocidos son el conjunto de Cantor y las curvas de Koch y de Hilbert.

UN POCO DE HISTORIA

Son muchas las personas que han aportado su granito de arena, y muchas (en cierto modo infinitas) las clases de fórmulas. A continuación se muestra alguno de los "hitos" en la historia de las matemáticas no lineales.



K. Weierstrass (1815-1897)



Definió, por primera vez, una curva continua no diferenciable.



G. Cantor (1846-1918)



Estableció una sucesión de segmentos conocida como "polvo de Cantor".



A. Lyapunov (1857-1918)



Abrió el camino para el estudio de sistemas dinámicos.




G. Peano (1858-1932)



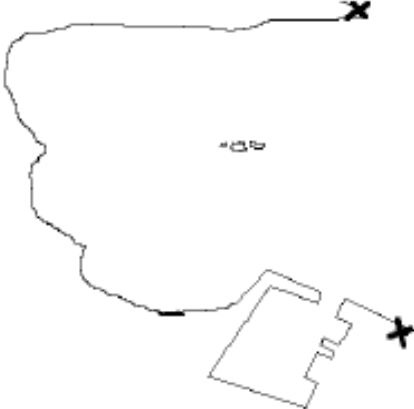
Diseñó una curva que, al desarrollarse, pasa por todos los puntos del plano.

ACTIVIDAD

Veamos un ejemplo: Supongamos que tenemos que medir la longitud de la costa entre los puntos señalados en la foto.



Que visto esquemáticamente sería:



Con una regla medir lo más exactamente que podáis cada uno por separado la distancia en centímetros entre los dos puntos.

¿Credéis que esa es la distancia correcta?

Figura 1. *Dossier introductorio sobre los fractales*

No pretendemos que la simple lectura de estos documentos ayude a los alumnos a comprender qué es un fractal, ya que consideramos que la comprensión vendrá dada por la manipulación y la búsqueda de regularidades de las construcciones realizadas. Dependiendo de la edad de los alumnos profundizaremos en mayor o menor medida en la teoría matemática que está implícita en los fractales.

Recomendamos también el capítulo de la serie de TV “Más por menos” sobre La Matemática del caos: Fractales.

A continuación, presentaremos propuestas para la construcción de algunos fractales:

FRACTALES BIDIMENSIONALES

Fractal 1: Isla de Koch (copo de nieve)

Materiales necesarios: Para la construcción de este fractal se necesita una malla triangular como la que mostramos en la Figura 2.

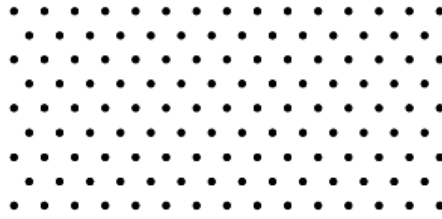


Figura 2. *Malla triangular*

Pasos en la construcción:

Paso 1: Dibuja con lápiz un triángulo equilátero, lo más grande posible.

Paso 2: Haz una estrella. Para ello:

- a. Divide un lado del triángulo en tres partes iguales y borra el segmento del centro
- b. Reemplaza este segmento borrado por dos líneas de la misma longitud que se unan, en el exterior del triángulo inicial, formando un triángulo equilátero de base el segmento borrado.
- c. Haz lo mismo con los otros dos lados del triángulo.

Paso 3: Realiza los pasos anteriores una y otra vez con cada segmento que se tiene dibujado.

El resultado que se debe ir obteniendo con la realización de los pasos indicados, debe ser similar al que se muestra en la Figura 3.

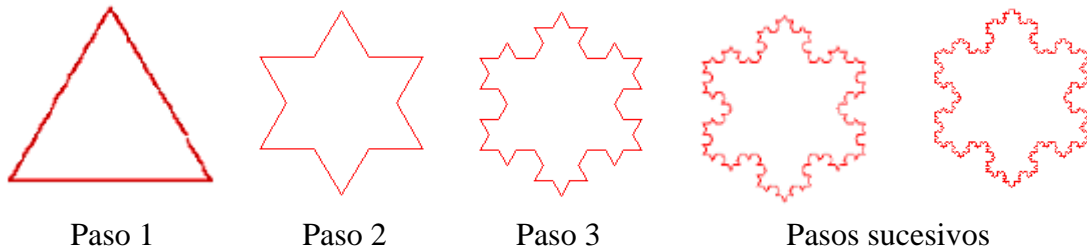


Figura 3. *Construcción del copo de nieve de Koch*

Fractal 2: Triángulo de Sierpinski

Materiales necesarios: Se vuelve a utilizar una malla triangular para la construcción de este segundo fractal.

Pasos en la construcción:

Paso 1: Dibuja un triángulo equilátero todo lo grande que puedas.

Paso 2: Marca, en cada lado del triángulo, el punto medio y únelos. ¿Cuántos triángulos has obtenido?

Paso 3: Fíjate en el triángulo interior. Recórtalo.

Paso 4: Repite los pasos 2 y 3 en los tres triángulos equiláteros que quedan, volviendo a recortar el triángulo interior de cada uno de ellos.

Paso 5: Repite el proceso tanto como se pueda.

Después de la realización de los pasos, el resultado debe ser similar al que representamos en la Figura 4.

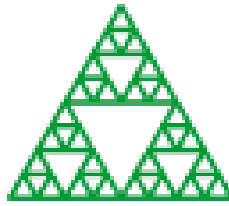


Figura 4. *Triángulo de Sierpinski*

Fractal 3: Espacio de Peano

Materiales necesarios: Se requiere una hoja cuadrada.

Pasos en la construcción:

Paso 1: Dibuja un segmento en el centro de una hoja cuadrada.

Paso 2: Divide el segmento en tres partes iguales. A continuación dibuja encima y debajo del segmento central dos cuadrados como indica la figura 5.

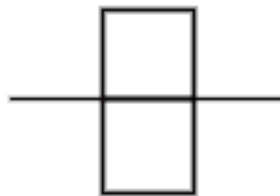


Figura 5. *Dibujo inicial para la construcción del fractal espacio de Peano*

Paso 3: Repite los pasos anteriores con todos los segmentos que tenemos en la figura 4.

Paso 4: Repite el proceso todo lo que puedas y cuando termines colorea la figura resultante.

Tras la realización de los pasos indicados, debemos obtener un resultado similar al que se muestra en la Figura 6.

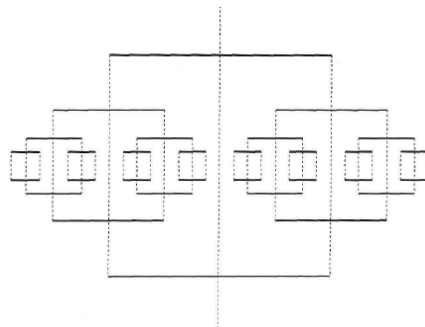


Figura 6. *Espacio de Peano*

La realización de estos fractales supone para el alumno un gran esfuerzo de interpretación de información, de realización de construcciones geométricas,... y, en ocasiones, esta labor puede ocultar al alumno las propiedades que caracterizan un fractal. Por ello es necesario detenernos en la repetición de pasos, en la semejanza de figuras y en la visión general del fractal. Si estos aspectos han calado en nuestros alumnos las siguientes actividades les supondrán un ejercicio de creatividad y análisis de gran interés.

Fractal 4

Partiendo de una figura semejante a la que aparece en la Figura 7, comienza dibujando en el centro un círculo tangente interiormente a las tres curvas que observas y coloréalo. Repite el proceso con los espacios que quedan sin colorear. ¿Qué observas?

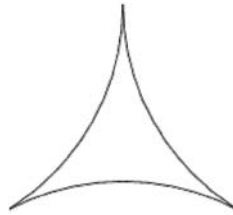


Figura 7

Fractal 5

Intenta crear un fractal utilizando como base el siguiente círculo (ver figura 8) y coloréalo.

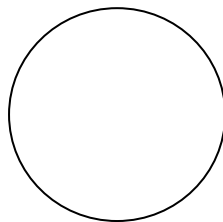
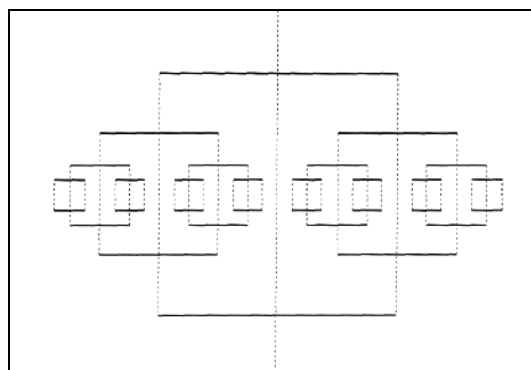


Figura 8

FRACTALES TRIDIMENSIONALES

Una vez realizados los fractales anteriores, el alumno debe tener más o menos claro que un fractal consiste en la repetición hasta el infinito de una misma estructural. Pasaremos ahora a trabajar nuevos fractales pero en una dimensión más. Para ello, utilizaremos las plantillas adecuadas (Figuras 9, 11 y 13). En estas plantillas aparece un dibujo realizado con líneas continuas y discontinuas. Para obtener el fractal tridimensional propuesto, deberemos recortar con mucho cuidado las líneas continuas y doblar por las discontinuas. Presentamos las soluciones de los tres fractales, respectivamente, en las Figuras 10, 12 y 14.

Para la construcción de los siguientes fractales, necesitamos las plantillas que presentaremos en cada caso y tijeras.

Fractal 6Figura 9. *Plantilla fractal 6*

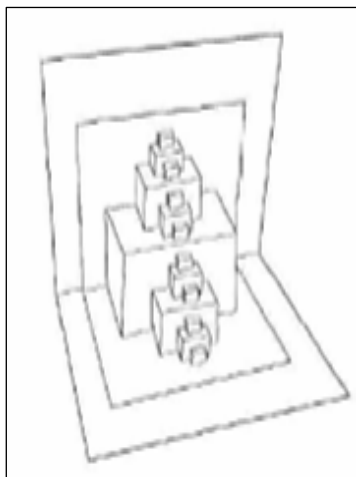


Figura 10. *Solución a la figura fractal 6*

Fractal 7

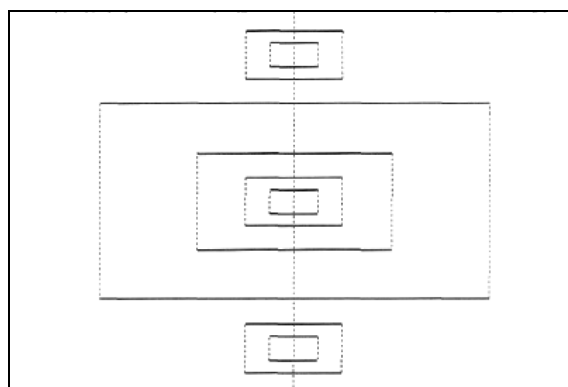


Figura 11. *Plantilla fractal 7*

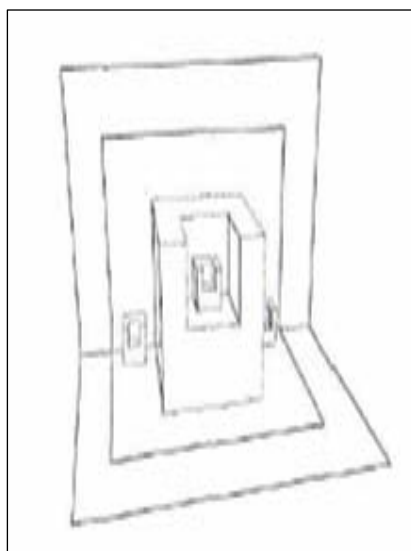


Figura 12. *Solución a la figura fractal 7*

Fractal 8

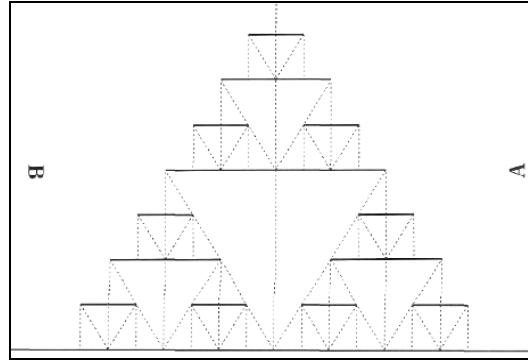


Figura 13. *Plantilla fractal 8*

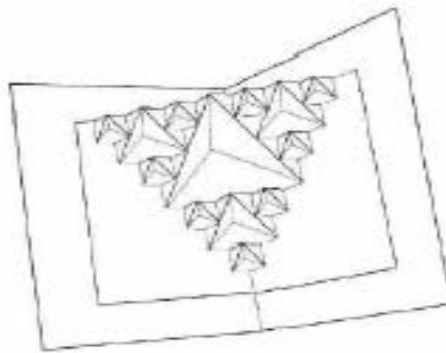


Figura 14. *Solución a la figura fractal 8*

CONCLUSIONES

El trabajo con fractales en el aula de Educación Secundaria puede ser muy útil para trabajar con el alumnado conceptos geométricos y actitudes adecuadas de trabajo en el aula de matemáticas de forma atractiva y creativa, mostrando una forma no convencional de utilizar las matemáticas. Permite promover en los alumnos el desarrollo de capacidades tales como:

- Expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.
- Transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio.
- Relacionar representaciones en lenguaje numérico, gráfico, geométrico y algebraico, para lo que se puede utilizar las TIC como recurso didáctico.
- Percibir la utilidad de las matemáticas para comprender el mundo que nos rodea.
- Determinar la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento.
- Describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras creadas.
- Determinar pautas de comportamiento y regularidades invariantes.
- Seleccionar las características más relevantes de una situación real.
- Reflexionar sobre la precisión y las limitaciones del modelo.
- Visión espacial

Además de estas capacidades, se pueden potenciar actitudes como el rigor, el gusto por el trabajo y la percepción de la belleza implícita en las matemáticas.

Todos estos puntos inciden de diversas formas en la consecución de las ocho Competencias Básicas que el currículo actual propone.

A pesar de las dificultades que implica el concepto de fractal, podemos acercar a nuestros alumnos estos *monstruos matemáticos* si partimos de cualidades geométricas y visuales estudiadas en la enseñanza secundaria para, con posterioridad, en otros cursos, acercarnos a la complejidad matemática de los mismos. Uno de los aspectos a destacar, implícito en la construcción de fractales, es la idea de infinito, que puede ir calando en los alumnos gracias a la recursividad del patrón. Esta idea que aparece está ligada a una imposibilidad física -se pueden realizar fractales hasta donde permita el papel-.

Destacamos que, pese a la utilización del papel para nuestra propuesta, también puede resultar interesante el empleo de algunos programas informáticos que permiten la elaboración de fractales, si bien éstos necesitan de una mayor profundización matemática.

Bibliografía

- Boletín Oficial del Estado (2007). *Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Grupo PI (2005a). *Experiencia en el aula de secundaria con fractales*. Investigación en el Aula de Matemáticas: La Geometría. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.
- Grupo PI (2005b). *Recursos para una experiencia en el aula con fractales*. Investigación en el Aula de Matemáticas: La Geometría. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.
- Grupo PI (2007). *Taller de fractales*. XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Granada.
- Grupo PI (2007). *Competencias básicas en el estudio de la geometría en primero y segundo de ESO*. Investigación en el Aula de Matemática: Competencias Básicas. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”.
- Redondo, A. y Haro M.J. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I), *SUMA*, 47,19-28.