LA EVOLUCIÓN DE UNA PRÁCTICA SOCIAL: EL CASO DE LA PREDICCIÓN

Herminio Alatorre, Iván López, Carolina Carrillo
Universidad Autónoma de Guerrero-Cimate
alatorreherminio@yahoo.com.mx, jilopez@cimateuagro.org, ccarrillo@cimateuagro.org
Reporte de investigación

Resumen
Este escrito reporta los avances de una investigación de tipo histórico bibliográfico acerca del carácter evolutivo de las prácticas sociales, constructo teórico fundamental en la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. Se analiza el caso particular de la predicción, ejemplo paradigmático de la Socioepistemología.
La práctica social, como constructo teórico, ha sido manejada al seno de la Socioepistemología como estática, en el sentido de que si se habla de la práctica social de la predicción, ella misma es caracterizada a través del discurso como un ente que no es susceptible de cambios o evolución al paso del tiempo.
Esta investigación caracteriza a la predicción como una práctica social que presenta una evolución en dos ramas: por un lado, la construcción científica que desemboca en lo que escolarmente se conoce como Cálculo, Análisis, Ecuaciones diferenciales; y por otro, a partir del descubrimiento de una función continua en todos sus puntos y no derivable en ninguno de ellos, la creación de un conocimiento matemático específico, conocido hoy como geometría fractal; cabe señalar que esta rama ha sido poco observada desde la Socioepistemología. Estas dos ramas se caracterizan desde esta investigación como predicción determinista y predicción no determinista, respectivamente.
Se mostrarán algunos pasajes de la evolución de la segunda rama, que servirán para sustentar la hipótesis de que las prácticas sociales pueden presentar etapas de evolución.

Palabras clave: Socioepistemología, práctica social, evolución, predicción.

Introducción
La Socioepistemología es una aproximación teórica emergente dentro de la disciplina científica denominada Matemática Educativa. El objetivo de la Matemática Educativa es explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático, cómo desarrollan una manera matemática de pensar. Dentro de esta disciplina la Socioepistemología ha hecho planteamientos novedosos poniendo al centro de la discusión, más que a los conceptos, a las prácticas sociales asociadas a determinado conocimiento (López, 2005).
Tradicionalmente las aproximaciones epistemológicas asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando en sobremanera el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en toda actividad humana. La Socioepistemología, por su parte, plantea el examen del conocimiento socialmente situado, considerándolo a la luz de sus circunstancias y escenarios sociales (Cantoral y Farfán, 2003, 2004).

> Esta aproximación teórica de naturaleza sistémica permite tratar a los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple incorporando el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2003).

Al ser una aproximación teórica emergente en el campo tiene aún problemas teóricos por resolver, uno de ellos es el relativo a la precisión/caracterización/definición de lo que es una práctica social (López, 2006). Muestra de ello es que, dentro del cúmulo de trabajos que se han realizado al seno de la Socioepistemología, existen diversas caracterizaciones y usos de este constructo teórico.

El objeto de estudio de esta investigación son las prácticas sociales, es de particular interés indagar acerca de su naturaleza, en especial sobre su estado de *concepto teórico estático o evolutivo.* Desde luego, nuestro interés es también contribuir con las caracterizaciones que hasta ahora se han hecho, estructurando una caracterización que coadyuve a desarrollar la aproximación teórica socioepistemológica.

A continuación presentamos algunas de las precisiones/caracterizaciones/definiciones que en torno a la práctica social se han hecho podemos citar, por ejemplo, a

Cordero (2001), quien refiere lo siguiente sobre la práctica social:

> Lo socioepistemológico debe significar el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana. Esta relación compone categorías del conocimiento matemático que son el núcleo para reorganizar la obra matemática.

Arrieta (2003) se afirma que:

> …el concepto de “práctica” connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; es algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido la práctica siempre es una *práctica social*.

Martínez (2003) señala que:

> …¿qué es lo que permite construir conocimiento?, pues adquiere un marco de referencia específico y la respuesta apunta hacia la caracterización de *escenarios* centrados en *prácticas sociales*, que puede ser fomentada en la escuela, de integración sistémica de conocimientos matemáticos; en donde la convención matemática sería un consecuencia particular de tal práctica. Entonces, la conformación de tal escenario representa la posibilidad teórica de ser la que posibilite la construcción de otros conocimientos que adquieren su sentido en y para una organización sistémica de conjuntos de conocimientos.

En Rosado (2004) se cita en cuanto a la práctica social lo siguiente:

> Todo ello, nos hace investigar y desarrollar conocimiento con la creencia de que el conocimiento se resignifica al paso de nuestra vivencia institucional, lo que obliga a considerar a la actividad humana o prácticas sociales como los generadores del conocimiento. Éstas son propias de las formas de organización de los grupos humanos, reflejan sus pensamientos, resignificaciones y argumentaciones orientadas por las intenciones para alcanzar los consensos

> requeridos. Pero que esta perspectiva no ha sido tomada en cuenta como una base para la didáctica de la matemática, lo que nos compete demandar tal tarea.

En Buendía (2004) se reporta que:

> Por *social*, no nos referimos a algún tipo de equivalencia con *vida cotidiana*; cuando entendemos las matemáticas como una construcción social, pretendemos enfatizar las prácticas sociales que permiten generación de conocimiento matemático.
>
> Lo *socio* no se reduce a explicar la construcción de un conocimiento matemático como resultado de la interacción entre individuos. Bajo ese enfoque, el saber se percibe como preexistente y único, válido universalmente; mientras que si es percibido como producto de prácticas realizadas el seno de comunidades, este saber se problematiza y sólo puede ser entendido dentro del escenario que lo hace posible. De ahí que hagamos énfasis en que la matemática toma sentido y significación a partir de prácticas no exclusivas de la misma estructura matemática; sino de aquéllas que pertenecen a un universo sociocultural mayor.

En Flores (2005):

> Tal aproximación, obliga a formular epistemologías del conocimiento cuyo aspecto medular no está en los conceptos, sino en la constitución social de tales conceptos, en "aquello" que hace que el conocimiento sea así y no de otra manera. El "aquello" es de naturaleza social que reconoce al grupo humano con su organización, su historia, su cultura y su institución que lo lleva a proceder de una manera y no de otra, es su *práctica social* generatriz de su conocimiento.
>
> Todo lo anterior conlleva cuestionar ¿por qué lo matemático es referido a objetos? y no a "aquello" que obliga a construir los objetos, es decir, a las "prácticas sociales" que norman la construcción de los objetos matemáticos. El mismo cuestionamiento está proveyendo de categorías que no habían sido identificadas en los tradicionales tratamientos de las epistemologías del conocimiento.

En Montiel (2005), se reporta:

> Es claro también que estas producciones pertenecen a cierta tradición científica, sin embargo, lo que nos interesa es identificar aquello que las regula, las norma, la práctica social. La práctica social ha sido caracterizada por medio de actividades sujetas a condiciones de un contexto particular, contexto que a su vez es determinado por las prácticas de referencia. Ello ha llevado a identificar los fenómenos, los problemas, las circunstancias y las herramientas asociados al conocimiento matemático involucrado en ámbitos no escolares, pues es ahí donde nace y se usa dicho conocimiento.
>
> …la actividad como aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, la práctica de referencia como un conjunto articulado de actividades, también como aquella que permite la articulación de la actividad con la práctica social, la práctica social como reguladora (normativa) de la práctica de referencia y sus actividades relacionadas.

En este repaso de caracterizaciones tratadas a lo largo de un lustro, podemos mirar la gran variedad de ellas que existen, uno de los objetivos de este trabajo es colaborar en la precisión de este constructo teórico; para efectos de este trabajo se tomará como caracterización inicial de práctica social aquella que se encuentra más cercana a la práctica social de la predicción, aquella que afirma que *la práctica social surge de una* *necesidad sociocultural y posibilita o permite la construcción de conocimiento, pero no cualquier conocimiento, sino un conocimiento específico* (en el caso específico de la predicción es lo permitió o posibilitó la construcción de lo que se conoce escolarmente como Cálculo, Ecuaciones Diferenciales y Análisis Matemático).

En esta investigación se analiza a la predicción, la práctica social más estudiada por la Socioepistemología, de hecho considerada como el ejemplo paradigmático (López, 2006) en el sentido de Kuhn, y se rescata una característica que, sostenemos, debiera ser tomada muy en serio. Estamos hablando del carácter evolutivo de las prácticas sociales, como una posibilidad.

Miremos algunas de las precisiones que se han hecho en torno a la práctica social de la predicción:

> La idea de *predicción* es, sin lugar a dudas, la idea de mayor importancia en el estudio de los fenómenos de cambio en la naturaleza. Se trata siempre de adelantarse a los acontecimientos, de revelar lo que habrá de suceder. Sin embargo el problema queda resuelto hasta que se precisa cómo es que se logra la *predicción* y de qué manera estaremos ciertos de nuestra conjetura. En el caso de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza, la *predicción* se obtiene a través del estudio de la ley que gobierna el comportamiento del sistema, ley que se encuentra mediante el estudio de la variación, más pequeña, más básica, más elemental que podamos estudiar: el elemento diferencial. Sin embargo, la *predicción* para ser legítima debe construirse exclusivamente con datos que se posean desde un inicio. En este sentido, un resultado de este estudio permitió conferirle a la *Serie de Taylor* el papel de instrumento predictor por excelencia (ya que en él quedan impresas todas las formas discutidas de la *predicción*). Este resultado apunta hacia dónde pudiera buscarse una reconstrucción del discurso matemático escolar para el cálculo.
>
> En otro nivel del problema, el psicogenético, permitió reconocer y analizar, los mecanismos de tipo cognoscitivo que operan cuando se trata de predecir el comportamiento de un sistema fluido. Resaltándose los procedimientos de Constantificación (un caso de los principios de conservación), el crecimiento con herencia, y la centración natural en el estudio de la *diferencia fundamental* (Cantoral, 2001).

Cantoral, Molina y Sánchez (2005) reportan en torno a la predicción que:

> La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa, centra su atención en el examen de las prácticas sociales que favorecen la construcción del conocimiento matemático, incluso antes que estudiar a los conocimientos mismos. En este sentido, hemos considerado a lo largo de diferentes investigaciones (Cantoral y Farfán, 1998) que una de tales prácticas es la *predicción*. La imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad. Este enfoque centrado en prácticas debe entenderse en el marco de las dimensiones sociales. Se aboca al estudio de la interacción y la convivencia en el ejercicio de las prácticas de referencia.

La predicción es, como resultado de los estudios de la aproximación socioepistemológica, el “eje” que permitiría un rediseño del discurso matemático escolar, alrededor de lo que actualmente se conoce como cálculo, análisis y ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, si miramos uno de los trabajos fundacionales de la Socioepistemología (Cantoral, 1990, 2001), se pueden mirar aparentes estados de la noción de Praediciere, donde estos estados se caracterizan como esquema, modelo y teoría; caracterizando a cada uno de ellos como cada vez de mayor profundidad teórica, sostenemos que aún cuando se presenta en forma evolutiva, no lo es tal, ya que *la esencia de lo que es la predicción sigue presente de manera intacta en cada una de las partes*.

En Cantoral (2001) se rastrea y analiza "la producción intelectual de científicos, filósofos naturales de los siglos diecisiete, dieciocho; ingenieros, físicos y matemáticos de los siglos diecinueve y veinte, incluyendo por supuesto a los partícipes del proceso educativo y científico contemporáneo", esta obra nos presenta la forma en que la predicción se constituye como programa de investigación desde el siglo diecisiete al veinte (*noción estática en el tiempo*).

Se muestra cómo una de las obras máximas de este programa científico fue la serie de Taylor, si analizamos este resultado desde lo que hasta ahora ha construido la Socioepistemología llegaríamos a la conclusión de que si se conoce cómo es una función (sistema) en un punto, digamos x_0, y cómo son todos sus cambios en ese punto, entonces es posible conocer cualquier estado posterior del sistema (x_0+h), pues dicha serie nos permite conocer de *manera puntual el valor puntual de* $f(x_0+h)$, si *f* es pensado como el sistema de referencia (la función) (Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R., 2003).

Un ejemplo, característico de la forma de concebir lo anterior se presenta en Cantoral, et al (2003):

> La ley de desintegración del radio dice que la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad inicial de radio. Supongamos que en cierto instante $t=0$ se tienen R_0 gramos de radio. Se desea saber la cantidad de radio presente en cualquier instante posterior *t*.
>
> Si $R(t)$ representa la cantidad de radio en cualquier instante *t* y la velocidad de desintegración está dada por $-dR/dt$, entonces $kR = -dR/dt$ (con *k* constante). Usando la idea de predicción que hemos presentado anteriormente, el problema consiste en anunciar el valor posterior en términos de los datos iniciales: $0, R(0), R'(0), R''(0),$ etc., de ahí que la ecuación buscada se exprese, de nueva cuenta, mediante la serie de Taylor:
>
> $$R(t) = R(0) + R(0)t + R''(0)t^2 /2! + \ldots \quad (11)$$
>
> A partir de la ecuación diferencial que regula el comportamiento entre las variables tenemos que, $R'(0) = -kR(0)$, $R''(0) = -kR'(0) = k^2R(0)$, etc. Por tanto, la expresión (11) adquiere el aspecto:
>
> $$R(t) = R(0) - kR(0)t + k^2 R(0)t^2 /2! - k^3 R(0)\, t^3 /3! + \ldots$$
> $$= R(0)\{ 1 - kt/1! + (kt)^2 /2! - (kt)^3 /3! + (kt)^4 /4! - (kt)^5 /5! + \ldots \} = R(0)\{ e\text{-}kl\} = R_0\, e^{-kt}$$

El programa newtoniano de investigación llevó al surgimiento de una progresiva cadena de elaboraciones teóricas, cada vez más abstractas, que culmina, por así decirlo con el programa lagrangiano donde emerge la noción de función analítica (Cantoral, 1990).

Metodología o Métodos

La Matemática Educativa es una disciplina científica que se encuentra en los cruces de varias disciplinas, digamos por citar algunas, la psicología, la matemática, la filosofía, la epistemología, la pedagogía. Si bien es cierto que toma resultados y métodos de estas disciplinas, ninguna por sí sola puede definir su objeto de estudio. Desde luego este trabajo se encuentra cercano a lo que se hace desde la Epistemología y la Filosofía de la Ciencia; en sí, es un trabajo teórico al seno de la Socioepistemología que retoma los estudios de índole *histórico bibliográfico*, centramos nuestra atención de manera prioritaria en las precisiones/caracterizaciones/definiciones que existen de la práctica social, resaltando aspectos de las dimensiones epistemológica y social, poniendo en segundo plano, aspectos relativos a las componentes didáctica y cognitiva, dada la naturaleza teórica de la investigación; se parte de un análisis profundo de las obras tanto de la Socioepistemología como de las que reportan los hechos históricos alrededor de los fractales así como de aquellas que presentan tratados sobre el contenido matemático propio del mismo tema.

Resultados y Discusión

Como resultado de este análisis histórico bibliográfico se encontró un "punto de quiebre" de la idea de predicción, se señala el día 18 de julio de 1872, como aquel en que Karl Weierstrass, presentó a la Real Academia de Prusia un resultado contradictorio a todas luces dentro del programa Newtoniano, las construcciones teóricas hechas que tenían como eje a la predicción estaban hechas para fenómenos de variación suave, en términos matemáticos podrían reinterpretarse como derivables y se presentaba "una función continua en todos sus puntos, pero que no era derivable en ninguno de ellos" (la idea original estaba en términos de cocientes de diferencias bien-definidos).

Ejemplos como éste se multiplicaron, entre los que podemos citar los de Cantor (1884), Khoch (1904), sin embargo en un inicio, dada la falta de elementos teóricos para tratarlos eran desechados y cuando un matemático se encontraba con alguno de esos casos "patológicos" (ahora llamados *fractales*) eran desechados y tratados como "monstruos".

Fue hasta el año de 1918 cuando se dieron los primeros elementos que permitieron el estudio sistemático de este tipo de casos patológicos. Felix Hausdorff descifra la característica fundamental de los fractales, el concepto de dimensión no entera (desde una perspectiva euclidiana, un cuerpo sólo puede ser de una, dos o tres dimensiones).

Cabe señalar que a partir de este punto es que se potencia este tipo de sistemas, con la llegada de las computadoras en los setentas, las aplicación de los fractales se vieron multiplicadas.

Entre los grandes impulsores "modernos" podemos citar a Mandelbrot (1967).

Hasta este momento se han presentado los hechos históricos, pero la pregunta fundamental para continuar con este trabajo es:

¿Puede explicarse el estudio de los fractales a la luz del concepto teórico de la predicción como práctica social?

Si se parte de que la esencia de la predicción radica en la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad y que este hecho obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad, podemos afirmar entonces que la predicción, como hasta ahora se conoce en términos socioepistemológicos, es una forma en la que se pretende *entender* y *anticipar* lo que va a suceder con cierto sistema. Los estudios sobre los fractales tienen las mismas pretensiones, se busca *entender* y *anticipar* lo que sucederá con algún sistema, la diferencia fundamental radica en la forma en que se da ese "entendimiento", a la luz de la forma clásica de la predicción socioepistemológica se busca de manera puntual calcular un $f(x_0)$, donde la f determina un sistema de variación suave que es uno de los supuestos tras el programa de investigación newtoniano; mientras que por otro lado, esta determinación de la $f(x_0)$ no es posible. Esto nos hace caracterizar a estas dos "ramas" de la predicción como predicción determinista y predicción no determinista.

A manera de ejemplo de cómo funciona la idea de predicción no determinista analizaremos el siguiente sistema determinado como sigue:

Consideremos un problema de la ecología, cómo evoluciona en el transcurso del tiempo una población determinada, digamos de insectos. Si sabemos cuántos insectos hay en este año, podemos preguntarnos ¿Cuántos insectos habrá el próximo año, el siguiente, y así sucesivamente?

Una función que modele este fenómeno pudiera ser $y=qx(1-x)$, ya que esta función hace que para valores pequeños de x, la curva crezca y para valores grandes disminuya.

Por conveniencia se tomó a la x y la y como entre cero y uno. Y por lo tanto el valor de q estará entre 0 y y. Cero representa extinción y el valor uno el máximo posible de la población.

Al paso del tiempo, para un valor de digamos $q=2.5$, tenemos que, para un valor inicial de $x=0.7$ se genera la siguiente secuencia de valores iterados para x:

0.525, 0.6234, 0.5869, 06061, 05992, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600,…

Estos resultados indican que la población se estabiliza al paso del tiempo.

Si empezáramos con un valor de x=0.25 y conserváramos el valor de $q=2.5$, se tendría la siguiente secuencia:

0.4688, 0.6226, 0.5874, 0.6059, 0.5970, 0.6015, 0.5992, 0.6004, 0.5998, 0.6001, 0.600, 0.600, 0.600, 0.600…

Se tiene entonces que se llega al mismo valor, no importando el valor inicial.

Este resultado nos indica que la población no crece indefinidamente al paso del tiempo y que además, al paso de algunos años la población alcanza un valor que no depende de cuál haya sido el valor inicial.

Si se vuelve a repetir este procedimiento pero para otro valor de q, se obtendrá otro valor final. Por ejemplo, si $q=2.7$, la sucesión se acerca a 0.6296.

Se puede mostrar que si q está entre cero y uno, la población se extingue (la sucesión siempre va hacia cero).

¿Qué pasará con valores mayores que uno? Si se analiza el caso $q=3.3$ con $x=0.6$, se tiene que

0.7920, 0.5436, 0.8187, 0.4898, 0.8247, 0.4772, 0.8233, 0.4801, 0.8737, 0.4779, 0.8236, 0.4795, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794, 0.8236, 0.4794…

Se tiene que la población "salta" a dos valores, ya no sólo a uno (periodo dos).

Si ahora se toman los valores $q=3.5$ y $x=0.6$, después de varias iteraciones se tiene que los valores finales son cuatro:

0.3038, 0.8260, 0.5001 y 0.8750 (periodo 4).

Para $q=3.55$ y $x=0.6$, se tienen ocho valores:

0.3548, 0.8127, 0.5405, 0.8817, 0.3703, 0.8278, 0.5060 y 0.8874.

Para el caso q=3.6, por más iteraciones que se hagan no es posible encontrar una sucesión de números que se repita, parecen escogidos al azar y de hecho se generará una sucesión distinta para cada valor distinto de x.

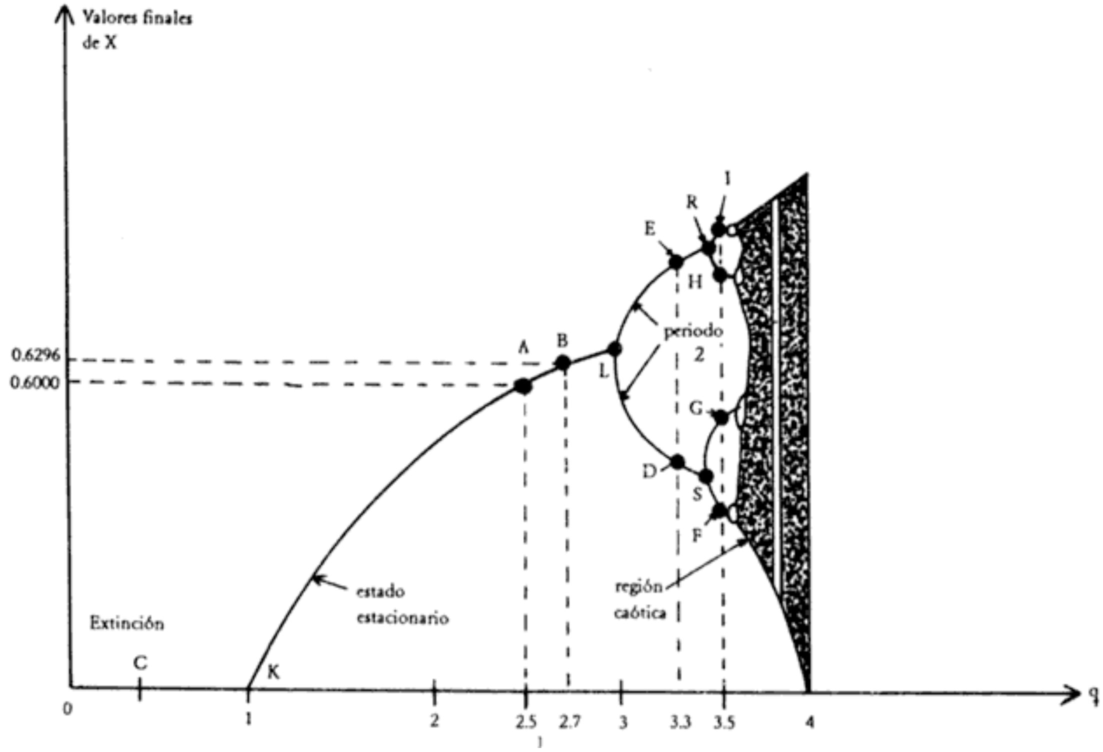

Figura 1. Gráfico de q contra los valores de estabilización.

Si analizamos la Figura 1, gráfico generado por computadora, resulta que existen infinidad de regiones en las que no es posible encontrar un número finito de valores estables, sin embargo sabemos cómo es que se comporta el sistema en términos generales.

Podemos entender los estados por los que atraviesa el sistema a través de los cambios de q a medida que crece:

Extinción, un solo valor final, periódicos con periodicidades 2, 4, 8, 16,…, caótico, periódicos con periodicidad 3, 6, 9…, caótico,…

Éste es un ejemplo clásico de los que podemos encontrar en los libros de introducción a los fractales y al estudio del caos.

Si lo comparamos con las preguntas hechas al seno de la aproximación socioepistemológica la cuestión:

¿Cuántos insectos habrá el próximo año, el siguiente, y así sucesivamente?

pudiese ser entendida en términos de la predicción determinista, como la pregunta del ejemplo que se cita anteriormente de Cantoral, et al (2003), el mismo intento de buscar una función puede entenderse en el mismo sentido. Sin embargo, observando el gráfico generado por computadora, se entiende perfectamente que habrá ciertos valores para los cuales no será posible determinar exactamente el número de individuos en la población, pero que si bien esto no es posible sí se puede explicar el comportamiento del sistema, a través del esquema:

Extinción, un solo valor final, periódicos con periodicidades 2, 4, 8, 16,…, caótico, periódicos con periodicidad 3, 6, 9…, caótico,…

La idea de lo que es predicción determinista y predicción no determinista queda establecida entonces de manera no ambigua.

Las características de estos nuevos entes son diversas, su autosimilitud, su dimensión fraccionaria, su dificultad para tener buenas representaciones gráficas, los hacen un terreno fértil para ser cultivado desde la aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa.

Conclusiones

Esta investigación pone en un primer plano el constructo teórico "práctica social". Vía una revisión histórico bibliográfica plantea la posibilidad de una evolución en las prácticas sociales, dando evidencia de esta evolución mediante el análisis de la predicción, mostrando que existen al menos dos tipos de predicción: la determinista y la no determinista.

Este carácter evolutivo que presenta la predicción debiera ser un punto de reflexión en torno a las caracterizaciones que sobre la noción de práctica social se hagan en un futuro.

Por otra parte, esta investigación será punta de lanza para posteriores trabajos con miras a la precisión de la naturaleza epistemológica, cognitiva y didáctica de lo que hoy se conoce como la geometría fractal.

Referencias Bibliográficas

Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas: México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Braun, E. (1996). *Caos, Fractales y cosas raras*. Fondo de cultura económica.México. En:
http://lectura.ilce.edu.mx:3000/biblioteca/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/150/htm/caos.htm

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de "el Praediciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). *Mathematics Education: A vision of its evolution. Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 – 270. Disponible en http://cimate.uagro.mx/cantoral/.

Cantoral, R., Molina, G., Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama (Ed.), Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*(1), 463 – 468.

Cantor, G (1884). On the Power of Perfect Sets of Points. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* Vol. 4. Núm. 2, pp. 103-128.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio Socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

Hausdorff, F. (1918). Dimension and Outer Measure. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

Koch, H. (1904). On a Continuous Curve Without Tangent Constructable from Elementary Geometry. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

López, J.; Cantoral, R. (2006). La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad. *Acta de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Ediciones Clame: Uruguay.

López, I. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México. Disponible en http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/.

Mandelbrot, B. (1967). How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractal Dimension. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México. Disponible en http://www.cimateuagro.org/tesis/2003/docgustavo/p.pdf

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.

Weierstrass, K. (1872). On continuous function of a real that do not have a well-defined differential quotient. Editor: Edgar, G. (1993). *Classics on fractals*, Addison Wesley: United States of America.