LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO: EL CASO DE LOS LOGARITMOS

Marcela Ferrari, Rosa María Farfán
Facultad de Matemáticas - Universidad Autónoma de Guerrero
marcela_fe @yahoo.com.mx
Jóvenes Investigadores

Palabras Clave: logaritmos, covariación, socioepistemología

Presentamos los avances de nuestro proyecto de investigación, bajo la idea de discutir la dicotomía que se entabla en nuestra comunidad de matemáticos educativos en torno de "la noción función". Aquellos que abogan por una mirada modernista, en búsqueda de una única respuesta, y aquellos que preferimos estudiar características particulares de cada función, inclinándonos a visualizarla como una herramienta y no como un objeto único.

Se percibe hoy en nuestra disciplina, la matemática educativa, la necesidad de desarrollar investigaciones en torno a la construcción de conocimiento matemático desde una perspectiva social. Algunos, como los *socioconstructivistas*, que la miran desde estructuras mentales, donde la cohesión y la colaboración se entremezclan para dar lugar a la abstracción reflexiva y al fortalecimiento de estructuras. Otros, como los *socioculturales*, que dirigen la mirada a los contextos sociohistóricos y temporales donde las herramientas median entre el sujeto y el objeto, imbuidos en prácticas sociales. O aquellos, como los *interaccionistas*, que se enfocan en la generación de discursos desde la interacción y negociación de significados, donde la relación profesor-estudiante es el foco principal de análisis. O, por último los *socioepistemólogos*, aquellos que reconocen la necesidad de desarrollar investigaciones sistémicas en torno a la construcción social del conocimiento matemático.

En respuesta a ello, el grupo de investigación en el que participo se ha preocupado, desde hace unos años, por desarrollar un acercamiento teórico que contemple los cuatro polos que conciernen a esta problemática bajo el supuesto que no se puede comprender ni analizar los fenómenos didácticos sin estudiar a fondo el discurso matemático escolar y por tanto cuestionar los mecanismos de su transmisión; sin rever el devenir en objeto a ser enseñando ni la forma en que vive en la escuela, lo que conlleva a cuestionar los contenidos y significados que se proponen en las curricula; sin recabar y analizar las concepciones de los alumnos y docentes respecto a un contenido específico y por tanto sin tomar una postura respecto a qué significa aprender o apropiarse de una noción; por último, sin tener presente que la matemática es una actividad humana y que aprender es una práctica social por tanto cultural e históricamente determinada.

En este sentido, este trabajo busca dar evidencias de la construcción social del conocimiento, particularmente de los logaritmos donde la covariación, inherente a prácticas como la de facilitar cálculos o la de modelar, genera contextos discursivos particulares que nos permiten abordar una caracterización de *lo logarítmico*. Por tanto, nos preguntamos sobre las prácticas que rigieron los argumentos, herramientas y significados puestos en juego en la sociogénesis de este modelo. Nos interesa investigar entonces, sobre los elementos que dieron vida y potenciaron el desarrollo de los logaritmos hasta convertirla en una de las herramientas matemáticas insoslayable para los usuarios (ingenieros, químicos, economistas, matemáticos, etc.) pero tan desatendida escolarmente. Estudiar así, los argumentos y significados que construirían los muchachos en el aula al involucrarlos en una red de modelos donde lo covaricional logarítmico genere prácticas discursivas y una caracterización particular.

Estado de arte

El presente proyecto tiene como principal antecedente la tesis de maestría, *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Ferrari, 2001) en la cual nos cuestionamos sobre los significados que deberían incorporarse a la enseñanza de los logaritmos con el objeto de subsanar la brecha entre sus dos presentaciones, la algorítmica y la analítica, fenómeno que llamáramos "dislexia".

En aquella oportunidad, influenciados por la escuela francesa, partimos del hecho, reportado por Trujillo (1995), que la noción logaritmo presenta en el discurso matemático escolar un tratamiento algorítmico rayando en lo axiomático, que inevitablemente deriva en una carencia de significados y un estancamiento en su aprendizaje que lo deja con estatus de proceso en el sentido de Dubinsky (1992), es decir, sin llegar a configurarse como objeto para la mayoría de los estudiantes.

De trabajos como Confrey y Smith (1994 y 1995), Confrey (1998), Lezama (1999), de mi propia tesis de maestría (Ferrari, 2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos lo cual nos lleva, de manera natural, a cuestionar modelos de difusión de conocimientos, concepciones, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos, tal el caso de las estructuras multiplicativas para la enseñanza de la potenciación (Confrey y Smith, 1995) y su posterior utilización para implementar la generalización hacia la noción de "función exponencial" y por ende, para la significación de los logaritmos.

Así mismo, Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que no hemos encontrado, en el discurso matemático escolar, elementos que permitan el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Dubinsky (1991) por su parte, considera que comprender las funciones definidas mediante integrales indefinidas, como en el caso de los logaritmos, constituye un buen ejemplo de encapsulación con internalización. Estimar el área bajo una curva con sumas y pasaje al límite es, en la teoría APOE, un proceso. Los estudiantes que parecen comprender esto, frecuentemente tienen dificultades con el próximo paso, este es, entender que el producto encontrado es una función, algo que varía al modificar el parámetro considerado. Por tanto, se requiere de procesos de "alto nivel" para especificar una función dada por una integral indefinida lo cual puede explicar la complejidad de este proceso y las dificultades que el mismo acarrea a los estudiantes, conceptos éstos muy ligados a la comprensión y manejo del Teorema Fundamental del Cálculo.

En la actualidad, la función logaritmo es una noción cuya vigencia en los planes de estudio está seriamente amenazada, pese a que su carácter de poderosa herramienta matemática es incuestionable. En efecto, ha desaparecido de varias currículas del bachillerato, mismas que la utilizan en materias como física o química en los mismos semestres que obliga a los docentes a implementar estrategias axiomáticas sustitutas o “parches” para su utilización efectiva. Paralelamente a esto, se percibe el desinterés de los profesores de matemáticas, particularmente aquellos que imparten Álgebra (a nivel medio superior) por transmitir esta noción, que es el último tema del programa de estudios que se debe tratar.

Por otro lado, la revisión bibliográfica realizada, en esa oportunidad (Ferrari, 2001), nos permite localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1991, 1992), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey y Smith (1995), consideran pertinente problematizar sobre la estructura multiplicativa como forma de introducir la potenciación para de ahí pasar a los logaritmos, misma que subordina la construcción de la función logaritmo a la de función exponencial. Por nuestra parte, cuestionamos la idea que para “comprender” o “internalizar” la noción de una función específica, los logaritmos en este caso, debemos primero haber construido la noción de función, argumento en el que se percibe un desconocimiento de la naturaleza propia de cada función. A su vez, supeditarlos a la estructura multiplicativa conceptualiza a los logaritmos como entes aritméticos. Pensamos por tanto, que una revisión a profundidad de los elementos que podrían propiciar la construcción de la función logaritmo aportaría elementos a la problemática, tan extensa y exhaustivamente abordada en investigaciones de nuestra disciplina, respecto a la estabilización de la noción de función.

Efectivamente, desde nuestra perspectiva cada función posee su propia naturaleza, misma que la distingue de las demás así como de las problemáticas inherentes a la apropiación de cada una. Comprender la noción de $f(x) = x^2$ no es equivalente a la comprensión de $f(x) = \ln x$, apartándonos por tanto de la idea que “saber función” equivale a comprender todas y cada una de las funciones conocidas.

Por ejemplo, Arrieta (2003) sugiere que la apropiación de lo lineal conlleva evidenciar lo cuadrático, como la otredad. Esto nos obliga a caracterizar lo lineal desde una perspectiva que se distingue de la cuadrática o la logarítmica. Si lo hacemos desde lo numérico, diríamos que construyendo tablas donde se juegue con las diferencias de cada variable y su relación observaríamos que la constante emerge en distinto tiempo dependiendo de la función polinómica en juego (lineal en la primera diferencia, cuadrática en la segunda, etc.) en tanto que en la exponencial esa constante no aparece, sólo mantiene su carácter de progresión geométrica, en tanto que la función logaritmo se escapa de este tratamiento. Entremezclar esto con el registro gráfico, el coloquial o el algebraico propiciando su transferencia, evidencia el distinto carácter que conlleva hablar de funciones polinómicas o transcendentes. Sin embargo, es importante enriquecer estos estudios desde la socioepistemología donde nos interesa también poner en relieve las prácticas sociales y las herramientas generadas por ellas y que, a su vez, modifican esas prácticas dándole vida a ciertas nociones ya que nos permite evidenciar la distinta naturaleza de desarrollo y por tanto de apropiación que implican estas nociones.

En este eje de discusión, hallamos trabajos como los de Trujillo (1995), Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001, 2003, 2004), donde el estudio de las funciones logarítmicas y sus características su fundan en un acercamiento sistémico que podríamos denominar socioepistemológico; o aquellos como los de Confrey et al. (1994, 1995, 1998, 2000), Lezama (1999), Martínez-Sierra (2003, 2006), donde se aborda a la función exponencial bajo acercamientos similares. Ambos focos de investigación nos dotan de elementos para evidenciar la dicotomía respecto al desarrollo del pensamiento funcional.

Es posible entonces, observar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky et al (2003); Tall (1992); Tall y Dubinsky (1991); Vinner (1992); Sierpinska (1992), Carlson et al. (2002) entre otros, buscan un único mecanismo de apropiación de la noción de función, por tanto supeditan la construcción del logaritmo al de función; y, aquellos que, como Arrieta (2003), Martínez-Sierra (2003), Montiel (2005), Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001) entre otros, reconocemos la importancia de dar cuenta de las características específicas, de "la otredad" (Arrieta, 2003) de las funciones.

Por otro lado, al analizar los aportes que diferentes investigadores nos brindan respecto a los logaritmos observamos que podemos encasillarlos en dos vertientes, pero absolutamente desvinculadas. Encontramos aquellos acercamientos con gran acento en lo cognitivo cuya búsqueda se centra en lograr un razonamiento logarítmico desde el objeto matemático ya aceptado en el ámbito escolar, tales como Kremisnki (1999), Maruszewski (1998), Berndes y Rahn (1994), Vaccaro y Szemruch (2002), Weber (2002); y aquellos con gran acento en lo histórico donde su búsqueda se reduce a comprender las ideas matemáticas antiguas en las que se desarrollaron los logaritmos sin ninguna intención de impactar en la educación, tales como Ayoub (1993), Bagni (1994), Burn (2000 y 2001), Cajori (1913), Gridgeman (1973), Le Goff (1989), Mazzotti (2001), Oliver (2000).

Discurso matemático escolar

Al realizar nuestro análisis del discurso matemático escolar que se ha generado en la enseñanza-aprendizaje de los logaritmos ahondamos, en primer lugar, en aquellos argumentos que les dan vida en textos que, con frecuencia, son utilizados en el sistema educativo; luego, en aquellos argumentos que utilizan los profesores en su práctica docente; y por último, en aquellas herramientas que utilizan los alumnos al abordar actividades inherentes a los logaritmos.

En Ferrari (2001) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos, nos estamos refiriendo a su presentación primera como "el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor", a su íntima vinculación con las exponenciales "al ser una función inversa de la otra" y por último ser la "respuesta de una integral singular" que se escapa de un patrón, sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.

Para realizar un análisis de libros utilizados en aulas de hoy, los abordamos inicialmente desde *lo algebraico*, ya reportado en Ferrari (2001), y donde nos centramos en observar el abordaje de los logaritmos fundamentalmente el tipo de conceptos utilizados deseando evidenciar el desarrollo de esta noción desde los textos de siglos anteriores (L'Hopital, 1696; Agnesi, 1748; Euler, 1797; entre otros) hasta nuestros días. Luego, desde *lo gráfico*, en busca de caracterizar su uso y el significado que le otorgan a los logaritmos y, finalmente, abordamos *el uso* de los logaritmos en los libros de textos, entendiéndolo como las actividades que se proponen para caracterizarlos y acercarlos a la realidad, a su utilidad en contextos diferentes al matemático.

Desde *lo algebraico*, en Ferrari (2001) se reporta, a grandes rasgos, el abordaje que a logaritmos y exponenciales se les confieren en distintos niveles escolares. Observamos que, en una primera instancia, los logaritmos aparecen en la currícula del bachillerato enfocados a problemas aritméticos sin dar cuenta de los elementos que permiten, desde nuestra perspectiva, la construcción de la función logaritmo. Efectivamente se hallan, luego de haber sido trabajadas y en forma paulatina, nociones que, a nuestro criterio, pueden ser utilizadas para tal fin. Por otro lado, en cursos más avanzados, se le necesita como una función de la cual sólo se conoce su expresión analítica, su gráfica y la noción de que es la inversa de la función exponencial, sin reparar en su construcción, por tanto, los alumnos la someten a diversas operaciones, como derivar, sin conocer esta función cayendo en una mecanización de algoritmos ya que, aunque la deriven muchas veces, el concepto de esta función no permanece ni se construye.

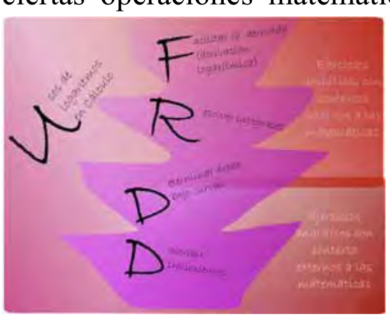
Desde *lo gráfico*, es interesante observar cómo se reafirman las presentaciones ostensivas de los logaritmos al analizar, dentro del contexto general de los libros escolares, la forma de encarar la construcción gráfica de los mismos. Al igual que en la discusión anterior, sobre su presentación algebraica, es sutilmente distinto el enfoque que se adopta en libros de Álgebra y en los de Cálculo, producto de los distintos fines que ambos cursos persiguen. Los argumentos visuales utilizados en los textos escolares para cursos de Álgebra se restringen a dos. En general, trazan los gráficos a partir de coordenadas cartesianas, tarea que requiere el uso de tablas y/o calculadoras para determinar los puntos a utilizar. En otros textos, aparecen argumentos de simetría, cuyo uso requiere conocer una de las funciones involucradas. Ambos acercamientos asumen la continuidad de estas funciones misma que, la mayoría menciona, se demostrará en cursos posteriores. En definitiva se desea lograr que el lector perciba características de la función logarítmica al observar su gráfica. En los textos utilizados en cursos de Cálculo, en cambio, los argumentos esgrimidos para propiciar un acercamiento gráfico a la función logarítmica se sustentan en tres supuestos: "lo simétrico", al

presentar a la función logaritmo y la exponencial en forma conjunta; “lo numérico”, que registra los valores en tablas y analiza derivadas sucesivas, “la cuadratura” que se basa en el área bajo la curva. Estos tres elementos se desarrollan en planos distintos.

Caracterizamos con estos supuestos las actividades que proponen los textos. Así, la simetría con la que se inicia, en general, la discusión de los logaritmos en Cálculo, se continúa con la determinación de áreas bajo curvas constituyendo el plano de completar patrones donde las derivadas e integrales encuentran un fértil campo de desarrollo. En otros acercamientos, en cambio, inician la discusión de los logaritmos construyendo tablas numéricas desde la expresión analítica para confluir en la determinación de áreas bajo curvas, conformando el segundo plano que percibimos. Vemos entonces que ambos planos se desarrollan en distintos ámbitos no conjuntándose en la determinación de los logaritmos.

Desde *el uso,* observamos los ejemplos que se construyen en ciertos libros escolares, para sustentar ideas logarítmicas así como proponer ejercicios y problemas que requieran utilizarlos. Los supuestos que los respaldan o que los generan nos informan, la mayoría de las veces, sobre una tradicional manera de presentar su uso. En los libros de Álgebra, encontramos ejercicios aritméticos, donde facilitar cálculos y resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, es el ámbito más adecuado para el uso de los logaritmos, dentro del contexto matemático. Por otro lado, hallamos ejercicios algebraicos donde se agregan otros elementos, tales como un fenómeno (el crecimiento de bacterias o un temblor), que se puedan describir utilizando los logaritmos. Sin embargo, los problemas que incluyen cierto contexto de otras disciplinas (fenómenos físicos o químicos, por ejemplo) tienen características ostensivas ya que no involucran a los logaritmos en la construcción del modelo involucrado; sino que, el papel de esta noción, generalmente está sujeto a calcular valores más que a reconocer patrones de crecimiento o a modelar el fenómeno.

Por su lado, en los libros de texto de Cálculo, esta noción se articula entorno a su utilidad para ciertas operaciones matemáticas, tales como la derivación y la integración. Encontramos en



general, ejercicios analíticos, donde los entendemos como aquellos que se mueven alrededor de fórmulas, expresiones algebraicas, demostraciones u otras sin mayor relación con fenómenos en cuanto a modelarlos. Se retoma la idea de facilitar cálculos pero aquí, en el ámbito de la derivación. También se les da el carácter de elemento imprescindible en la resolución de ciertas integrales que los involucren ya sea como función primitiva como integrando.

Por otro lado, hallamos ejercicios analíticos con contextos fuera de las matemáticas, pero de una manera ostensiva al igual que en el caso de los textos de Álgebra. Se presenta a los problemas como algo acabado, no para explorar y determinar el modelo involucrado sino, más bien, para aprovechar las virtudes de los logaritmos en la determinación de algún área o el valor de un exponente. Pocos son los problemas que no mencionan, en su texto, la expresión algebraica que debe utilizarse para arribar a la solución.

En otro ámbito, al estudiar el discurso matemático escolar encontramos que varias son las herramientas matemáticas, que profesores y alumnos han desarrollado en su vida escolar, respecto a los logaritmos, que evidencian la compleja apropiación de esta noción. Si preguntáramos a algunos docentes, que imparten el curso de Álgebra en el Bachillerato, sobre sus experiencias en torno a la enseñanza de los logaritmos, escucharíamos que es una noción difícil para los alumnos; que debido a que Álgebra, en sí, es compleja y su programa extenso, demanda más tiempo para transmitir las nociones que conlleva este curso, prefiriendo ahondar en ideas previas al logaritmo. Rara vez logran abordar la enseñanza de los logaritmos pues, en general, son el último tema del programa y una de las nociones que se evita.

Si iniciamos nuestra experiencia desde los recuerdos que, como estudiantes, han guardado respecto a su acercamiento a los logaritmos hallamos que cuando, cómo y con qué se les presentaron los logaritmos en la escuela dio pie a analizar la evolución del papel del profesor, de los recursos didácticos que se utilizan en clase y de los programas. Para lograrlo, formamos tres grupos de discusión con profesores de distintos niveles en Hidalgo, Nayarit y Chiapas, quienes gentilmente se prestaron a compartir sus experiencias como estudiantes y profesores.

Efectivamente, desde la nostalgia de las tablas de logaritmos… *mmm… las tablas de Arquímedes Caballero*[1], que son mencionadas y utilizadas hasta hoy en día por los "veteranos" de la enseñanza de los logaritmos, o desde la idea de que, en los más jóvenes, era una tecla de la calculadora que algunos teníamos, nadie deja de recordar algo de su pasaje por los logaritmos. Tampoco faltó aquél que recordara la regla de cálculo, sobre todo, aquellos que tuvieron una formación ingenieril, y que desarrollaron una destreza para calcular operaciones recorriendo dos reglas graduadas con escala logarítmica.

Los recuerdos sobre: la falta de conexión con la realidad o con otras disciplinas; la forma "abstracta" con la que era presentada; el cultivo de la idea de que ya "era algo escrito que sólo tiene aplicaciones aritméticas", entre otros comentarios, presentes en la discusión escolar de esta noción, no dista mucho de la problemática que enfrentan nuestros alumnos en sus "escasas" clases sobre función logarítmica.

Si reflexionamos con los profesores sobre los cursos, temas y actividades que se relacionan con la vida escolar de los logaritmos, nos reducimos a un pequeño ámbito, el de las matemáticas y, en particular, en álgebra para aquellos que incursionaron en el uso de las tablas logarítmicas como el único medio de realizar ciertas multiplicaciones y por ende, bajo una visión aritmética. En tanto que, aquellos profesores que eran estudiantes de los 80' en adelante, se acercan a ideas funcionales de los logaritmos al hablar de ellos, ya que se refieren a cursos de Cálculo, diferenciales e integrales, donde su pasaje tradicional por álgebra, primer contacto con los logaritmos, no es mencionado.

Este mundo especial, donde confluyen recuerdos y realidades, nos permitió observar la persistencia de las maneras de abordar esta noción matemática en el aula. La invariabilidad que la envuelve, que se respeta sin conflicto, sin preguntas. Es así, que los cuestionamientos de los muchachos siguen siendo los mismos y la evasión a sus respuestas de la mayoría de nosotros también.

---

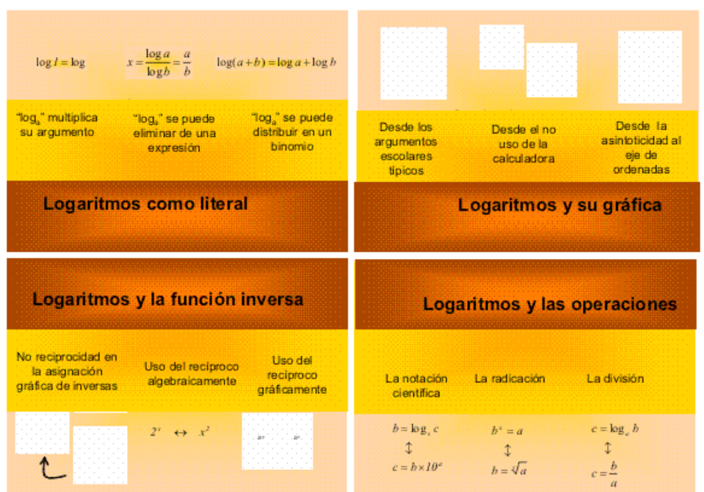
1 Arquímedes Caballero (1918-2004), profesor de matemáticas quien dedicó su vida a la docencia aportando al sistema educativo del país, varios libros como Geometría Analítica y diversos textos escolares, entre ellos las Tablas Matemáticas empleadas por muchas generaciones de estudiantes de educación secundaria

Si le preguntáramos a los docentes que imparten los logaritmos "¿qué cosa no quisieran que les preguntaran sus alumnos?" responderían en general, ¿de donde vienen? ¿Por qué funcionan? ¡Explíqueme!, ya que reconocen su desconocimiento de la naturaleza de los logaritmos y de argumentos que pudieran utilizar en la discusión de este concepto matemático. Esta historia se repite en el nivel superior. Es efímero el tiempo utilizado para definir los logaritmos, en general como función inversa de la función exponencial, y trabajar con ellos para construir un robusto modelo de los logaritmos.

Encontramos así, cierta ambivalencia entre aquellos que presentan y transmiten los logaritmos en sus clases de matemáticas y "contemplan" su complejidad; y, aquellos que los "usan" visualizando una herramienta importante.

Por otro lado, recabamos información sobre los argumentos y herramientas que los alumnos, aquellos que habían transitado el peregrinaje escolar propuesto para el aprendizaje de esta noción, utilizan al enfrentarse a la necesidad de echar mano de los logaritmos.

En la mayoría de los estudiantes, encontramos las frases "no lo recuerdo", "nunca lo vimos en la escuela", ante tareas que explícitamente mencionábamos a los logaritmos. En aquellas actividades en las que era necesario utilizarlos, recurrían a herramientas más conocidas, tales como, las tablas, la ley de distribución, la linealidad, la multiplicación entre literales, la división como argumento de explicación, la reciprocidad. Observamos que las herramientas utilizadas por los estudiantes, reflejan la ausencia de la apropiación de los logaritmos a partir de las actividades que generalmente propone el discurso matemático escolar imperante en las aulas de hoy. Es fugaz la aparición de los logaritmos en las curricula escolares y, más aun lo son, las actividades propuestas a los alumnos que requieran su uso y exploración.



Es necesario además, considerar que existe una gran variedad de herramientas que utilizan los alumnos, aquellas a las que recurren para resolver ciertas actividades y que podríamos incorporarlas en las secuencias dándoles otro enfoque y propiciar un avance en el aprendizaje de las matemáticas en torno a los logaritmos.

Si reunimos las herramientas que se privilegian, se observa de una manera interesante el arraigo a nociones que escolarmente se han trabajado con mayor intensidad. Una de las más recurrentes herramientas matemáticas utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, lo cual evidencia la aplicación de la linealidad en toda circunstancia, lo que Artigue (1990) llamara *linealidad abusiva*, y la cual no sólo se remite a los logaritmos, sino a toda función involucrada con una suma en su argumento. Esto coloca a los logaritmos como "una partícula log que multiplica todo lo que se le pone adelante", es decir, no se ha desarrollado la idea de argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio.

Otro rubro interesante para analizar es el uso de la graficación. Nos preguntamos ¿qué argumentos proponen para explicarse el comportamiento de una función, y en particular la logaritmo? Prevalece en sus respuestas la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la no apropiación de la función inversa, elemento importante en la vida de los logaritmos y que en el discurso matemático escolar se los toma como un buen ejemplo de esta noción. La mayoría de los textos discuten la función inversa desde la simetría geométrica de las funciones respecto a la recta $y = x$, siendo extendida en la mayoría de los alumnos a otros tipos de simetrías como la que nos invita a recordarla ante la función recíproca. Estas confusiones tienen su lógica quizás en los distintos sentidos que adoptan las palabras "inversa" y "recíproca" dentro y fuera de las matemáticas.

Es basto e interesante entonces, el análisis de las producciones de los alumnos ante cierto tipo de preguntas y actividades que involucran a los logaritmos y que no se agota en esta primera revisión de ellos.

Un acercamiento epistemológico

En nuestra indagación epistemológica (Ferrari, 2001) concluimos que se pueden distinguir tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si tomamos como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier para su primera definición.

Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética y, por tanto, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas surge la definición de los logaritmos. Los elementos matemáticos utilizados son trabajados, en nuestras aulas, desde los niveles iniciales. La búsqueda de patrones numéricos, la relación entre ellos, la economía de recursos para expresar ideas matemáticas son abordados en las currícula y libros de texto actuales, pero no relacionados y utilizados a la hora de introducir los logaritmos.

Su exploración en otros contextos, producida principalmente en el siglo XVII, nos lleva a considerar como segundo momento el de *los logaritmos como modelizadores* pues en esta etapa se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo marco "algebraico-geométrico" que se estaba desarrollando; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un Cálculo en plena gestación; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.

Todos estos argumentos y exploraciones que giran en torno a descubrir las características logarítmicas en distintos contextos mediante el uso explícito de la relación entre progresiones están absolutamente fuera del discurso matemático de nuestros días. Aparece en los libros de difusión de conocimiento del siglo XVII, para desaparecer completamente a partir de las ideas eulerianas y de su vinculación definitiva con las funciones exponenciales mediante el concepto de función inversa.

Comienza así, un tercer momento que nosotros identificamos como la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones dadas anteriormente, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Surge así, de nuestra indagación sobre el devenir de los logaritmos en objetos de saber, como hipótesis epistemológica, la incorporación en el diseño de las nociones de progresión aritmética y geométrica y su fuerte vinculación con los logaritmos. Creemos que son elementos que pueden resultar útiles, al igual que en el desarrollo histórico de los logaritmos, para facilitar el pasaje desde las características aritméticas de esta noción hasta las funcionales permitiendo la exploración en distintos marcos y su correspondiente vinculación.

Al reflexionar sobre el desarrollo de lo logarítmico, consideramos importante enriquecer nuestra búsqueda de antecedentes históricos en dos direcciones, pero ambas alrededor de aquellas herramientas construidas vinculadas con las relaciones entre progresiones geométricas y aritméticas.

En nuestra primera síntesis, los argumentos que hemos hallado en aquellos pueblos y épocas que hemos seleccionado, reflejan la necesidad de facilitar las operaciones numéricas constituyéndose en una práctica social, respondiendo a requerimientos culturales. Aquellas actividades que reflejan la vida y el desarrollo cultural de las civilizaciones como la babilónica, la egipcia, la china y la inca que miramos desde la antigüedad hasta la conquista, desviando un poco nuestra vista de lo europeo, nos permiten vislumbrar la construcción de herramientas, en este caso, el uso de la relación entre progresiones aritméticas y geométricas que confluyen en distintos artefactos, tales como: las tablas, la yupana, el ábaco, patrones numéricos, la regla de cálculo, y en otros que indudablemente quedaron en el tintero de este primer acercamiento.

La necesidad de facilitar cálculos se entremezcla con la de registrar los avances, las discusiones, asegurar la transmisión de los conocimientos que se iban gestando y consensuando. Así, pese a la rapidez de la mirada que hemos realizado en un mundo imposible de abarcar, logramos vislumbrar cómo "lo logarítmico" se va desarrollando a la mano de establecer formas de escribir matemáticamente, de mecanizar procesos laboriosos como el de multiplicar, de ordenar en columnas la relación entre ciertos valores, de reconocer ciertos crecimientos aunque no se haya percibido la covariación logarítmica que desde nuestra perspectiva está presente.

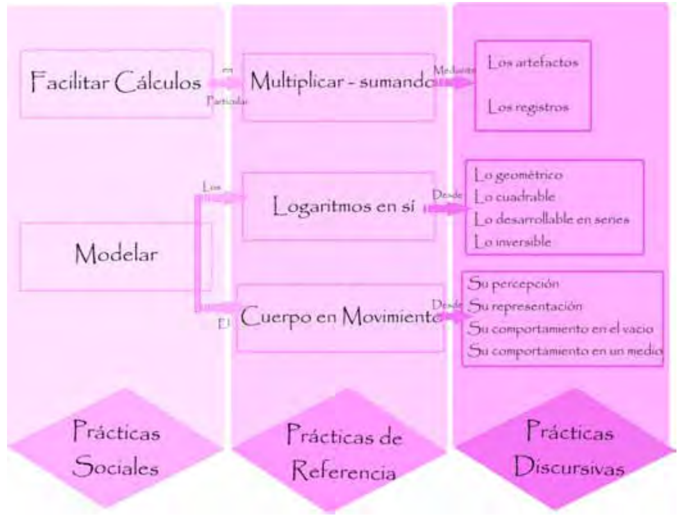
Así, la primera síntesis de cálculos implicó evitar la suma reiterada dando lugar a la multiplicación. Regresamos ahora a la suma con un isomorfismo complejo entre el mundo de multiplicar y el de sumar que nos permite evitar la multiplicación reiterada mediante la suma directa. Aparecen así, aquellas ideas matemáticas de lápiz y papel tales como jugar vinculando dos progresiones o aquellas mecánicas como la yupana, el ábaco, la regla de cálculo que nos permiten dar respuestas ingeniosas a la complejidad de multiplicar. O, por otro lado, aquellas formas de registrar tales como tablas, quipus, papiros, libros o calculadoras que nos permitan "abaratar el costo" de calcular, y ahorrar la tediosa tarea de repetirlos, generando otras actividades.

Sin embargo, no sólo en facilitar cálculos encontramos la producción de artefactos, sino también en aquellos que responden a la necesidad de modelar, es decir, de describir con ciertos elementos. Varios trabajos se ocuparon de estudiar la idea de "predecir" (Cantoral, 1990 y 2004 o Buendía, 2004) donde el estudio del movimiento fue una práctica de referencia insoslayable. Nuestra visión de la misma, nos lleva a pensar covariacionalmente, es decir, mirar el movimiento de los cuerpos desde la relación entre progresiones. Sin embargo, también nos interesó estudiar las respuestas que los logaritmos daban a las exigencias de la propia comunidad de matemáticos, a veces por el simple hecho de explorar las propiedades numéricas o extenderlas; a veces, por completar patrones, a veces, por tener mayor precisión en los cálculos; a veces, por linealizar; es decir, modelar a los logaritmos.

Por otro lado, en Ferrari (2001) nos ocupamos en reflexionar sobre cómo los logaritmos fueron resistentes a todos los avatares científicos a los que los sometían, a las exigencias para permanecer en el lenguaje matemático. Hallar cabida en una época donde dominaban acercamientos geométricos (Descartes y Agnesi); o a las exploraciones matemáticas (Mersenne, Mercator), o a la búsqueda de completar patrones de cuadraturas (Fermat, Saint, Vincent); o también, a ser considerados una función por hallar desarrollo en potencias, características fundamentales de la matemática de Euler; entre otros elementos vinculados con los logaritmos, enfrascándonos en modelar a los propios logaritmos.

Hablamos así, de dos prácticas que nos interesan, la de *facilitar cálculos* y por ende de la generación de herramientas de distinta índole por una lado, y por otro, la de modelar, particularmente de las ideas desarrolladas por: Aristóteles, Oresme, Bradwardine, Galileo, Newton y Huygens, todos ellos preocupados por lo que hoy conocemos como física y que aportan al desarrollo de lo que se ha dado en llamar *matematizar la naturaleza,* como subproducto de la práctica social que denominamos *modelar*.

Conclusiones



Hablamos entonces de prácticas sociales como generadoras de herramientas, que nos permitan generar conocimiento y construirnos modificándolas y modificándonos. Hablamos de práctica de referencia, como reflejo de usos y contextos, de ámbitos en donde se desarrollan y nos desarrollamos. Y, por último, hablamos de prácticas discursivas, como generadores de argumentos y significados. La posibilidad de entremezclarlos, donde unas prácticas contienen a otras, se autocontienen, y son contenidas, donde no nos interesa conocer donde inician o donde terminan, sino que sólo nos interesa reflejarlas en nuestros diseños en búsqueda de que Lo logarítmico surja de y con todas ellas. Se requiere entonces, que los logaritmos sean usados, formulados y teorizados para construirse y existir.

Bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2-3), 241-286.

Ayoub, R. (1993, abril). Whats is a Napierian Logarithm? *The American Mathematical Montlhy 100*(4), 351-364.

Bagni, G. T. (1994). Una “controversia” della matematica del Settecento i logaritmi dei numeri negativi. *Periodico di Matematiche VII,* 2(2/3), 95-106. Disponible en: http://www.syllogismos.it/history/Loganeg.pdf. Consultada en octubre de 2005.

Berndes, A. y Rahn, J. (1994). Using logarithms to explore power and exponential functions. *The mathematics teaching 87*(3), 161-170.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Burn, B. (2000). Gregory of St. Vincent and the rectangular hyperbola. *The Mathematical Gazette 84* (501, noviembre 2000). The mathematical Association. 480-485.

Burn, R. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logaritmos. *Historia Mathematica 28*, 1-17. Disponible en: *http://www.idealibrary.com.* Consultada en octubre de 2005

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly XX*(2), 35-47.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas: Simbiosis y predación entre las nociones de “el Praediciere” y “lo*

Analítico". Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Confrey, J. (1998). Building mathematical structure within a conjecture driven teaching experiment on splitting. En: S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood y L. Stiff: *Proceeding of the Twentieth Annual Meeting. North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematics education*. Vol 1. PME-NA XX. October 31-November 3, 1998. North Carolina State university. Raleigh, North Carolina USA. USA: Eric.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Estudies in Mathematics* 26, 135-164.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in mathematical thinking. En: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht; USA: Kluwer.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.

Dubinsky, E. y MacDonald, M.A. (2003). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En: D. Holton et al. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp.275-282). USA: Kluwer Academic Publishers.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. Área de Educación Superior. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Ferrari, M. (2003). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo En: J. R. Delgado (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa.* Volumen 16 – Tomo 1 (pp. 61-67). Chile: Clame

Ferrari (2004-a). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En: L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática educativa.* Volumen 17 – Tomo 1 (pp. 45-50). México: Clame

Gridgeman, N. T. (1973). John Napier and the history of logarithms. En: A. Gelbart (Ed.), *Scripta Mathematica. A Quartely Journal*. New York. EE.UU.: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University

Kreminski, R. (1999). Estimating logarithms with college algebra students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 30*(2), 197-206.

Le Goff, J. (1989). De la méthode dite d´exhaustion: Gregoire de Saint Vincent (1584-1667). En Irem de Besancon (Ed.), *La démonstration mathématique dans l´Histoire.* (pp. 197-220). Actas du 7mo Éme colloque Inter-Irem Épistemologie et histoire des mathématiques.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, (Cicata-IPN), México

Martínez-Sierra, G. (2006) Los procesos de convención matemática constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En: G. Martinez-Sierra (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*(1), (pp. 745–751). México: CLAME, versión digitalizada. Disponible en http://clame.org.mx/. Consultada en julio de 2006.

Maruszewski, R. (1998). Computing logarithms in parallel. *Mathematics and computer education 32*(2), 127-133.

Mazzotti, M. (2001). Maria Gaetana Agnesi. Mathematics and the Making of the Catholic Enlightenment. *The History of Science Society 92*, 657-683.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN(Cicata-IPN), México.

Oliver, J. (2000, Noviembre). The Birth of logarithms. *Mathematics in school,* 9–13.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. En: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp.495-511). New York: MacMillan Publishing Company.

Tall, D. y Dubinsky, E. (1991). Mathematical thinking and the computer. En: D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Vaccaro, D. y Szemruch, A. (2002). Logaritmos, física y algo más. En: C. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol 15. Tomo 1. (pp. 14-19). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.195-213). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Weber, K. (2002). Developing students' understanding of exponents and logarithms. En D. Mewborn, P. Sztgjn, D. White, H. Niegel, R. Bryant y R. Nooney: *Proceeding of the 24th Annual Meeting, North American Chapter of the International Grupo for the Psychology of Mathematics Education. Vol 1* (pp.1019-1027). Athens, Georgia. ERIC.