

EXPLORACIONES DE LA RELACIÓN $f - f'$ EN CONTEXTOS PERIÓDICOS¹

Ángeles Alejandra Ordóñez, Gabriela Buendía
Universidad Autónoma de Chiapas, México
anlejandra@hotmail.com, gbuendia@hotmail.com
Reporte de investigación.

Resumen

Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, en un contexto analítico queda en demostrar la veracidad de la proposición “Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica” usando las definiciones de derivada y de función periódica; sin embargo al trabajar esta relación en distintos contextos, podemos hallar argumentos y herramientas situacionales que la resignifican. Este tránsito entre contextos es posible a través del ejercicio intencional de prácticas asociadas al reconocimiento significativo de lo periódico. En este trabajo reportamos algunos resultados al enfrentarse con esta relación para funciones periódicas en distintos escenarios.

Palabras Claves.

Lo periódico, $f - f'$, comportamiento, gráfico, físico, analítico

Introducción

Uno de los principales resultados de la investigación en Socioepistemología es la formulación de epistemologías de prácticas en las que la imagen de un conocimiento matemático puro y limpio se deja de lado, para dar espacio a un conocimiento no lineal en el que las argumentaciones y herramientas lo reconstruyan continuamente (Cordero, 2003). Con base en la Socioepistemología de lo periódico propuesta por Buendía (2004), en este trabajo abordamos el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas.

Consideramos que la problemática que surge respecto a dicha relación se debe al privilegio de los aspectos analíticos tanto para las funciones como para su aspecto periódico. Esto lo podemos ver en el manejo del discurso matemático escolar (DME) al considerar únicamente cuestiones como la siguiente (Spivak, 1993) para hablar de la relación $f-f'$ para funciones periódicas :

- Supóngase que f es diferenciable y periódica, con periodo a (es decir, $f(x) = f(x + a)$ para todo x). Pruebe que f' es también periódica.
- Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero f' sí

¹ Esta investigación se realizó con el apoyo del proyecto estudio del desarrollo del saber matemático en un marco socioepistemológico (PROMEP/103.5/04/2927 Folio UACHIS-PTC-39)

Tradicionalmente, un fenómeno periódico en el DME es caracterizado fundamentalmente por el carácter repetitivo del mismo lo que significa que sigue cualquier tipo de repetición, sin que se logre hacer una distinción entre “se repite y cómo se repite”. Coincidimos con Buendía (2005) al marcar una diferencia entre *lo periódico* – término con el cual tomaremos como todo aquello en un sentido institucional, cultural e histórico referente a la periodicidad – y *la periodicidad* en el sentido utilitario que le ha impregnado el sistema didáctico, el cual se reduce a aplicar o comprobar una fórmula. Así lo periódico es un atributo que caracteriza no sólo la repetición que presenta un objeto matemático, sino la forma como dicha repetición se presenta de tal manera que en el análisis de un objeto matemático es relevante no sólo que se repita, sino cómo se repite.

La socioepistemología de lo periódico

La socioepistemología de lo periódico propuesta señala a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento significativo de lo periódico y da cuenta de que en un contexto de funciones y su representación gráfica, la predicción es un argumento en la construcción de lo periódico. Más que fijar el foco de atención en fórmulas, definiciones u objetos matemáticos aislados, la práctica de predicción propone relaciones y da coherencia al conocimiento matemático a lo largo de todo el sistema educativo; en particular, al comportamiento periódico. La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de la gráfica de un movimiento basándose en el estado actual lo que equivale a utilizar la información de la cual se dispone. Para ello, la identificación y uso de una unidad de análisis es la herramienta que se desarrolla en este marco de predicción intencional e influye, a su vez, en el desarrollo de la práctica.

A través de esta herramienta es que se puede ver una articulación entre los diferentes tópicos periódicos que se desarrollan en la currícula escolar. En particular, nos centraremos en el nivel medio superior y superior en el que se desarrolla el concepto de derivada. Esto nos permitirá analizar lo periódico en la relación de una función y sus derivadas.

Lo periódico en la relación f - f'

En un contexto analítico lo periódico en la relación de una función y sus derivadas queda en demostrar la veracidad de la proposición “Si es f periódica con periodo a y diferenciable, entonces f' es periódica” usando, en una matemática formal, las definiciones de derivada y de función periódica o bien, podría bastar con un ejemplo que cumpla con las condiciones pedidas.

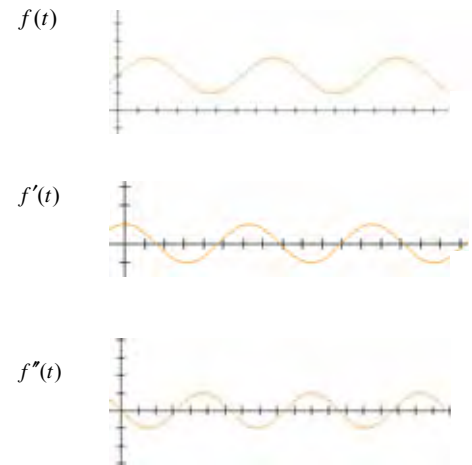
Proponemos trabajar esta relación en el tránsito de los contextos analítico, gráfico y físico debido a que la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares. También por esta razón, suponemos, no puede quedar relegado al aspecto analítico; ya que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las

funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento descrito desde un contexto físico y gráfico.

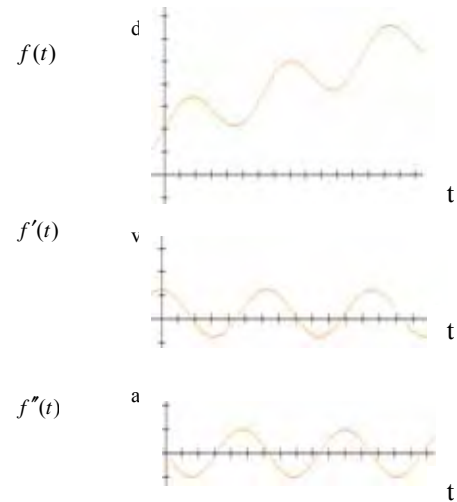
En Buendía (2004) se da evidencia de la problemática acerca de lo periódico: *La asociación de lo periódico con cualquier tipo de repetición*. Propone gráficas que representan movimientos, en las que la repetición es una característica presente en todas y se manifiesta a través de tres comportamientos distintos. Esta distinción se basa en la diferenciación entre el comportamiento presente en el tiempo (eje x) y aquél que se presenta en la distancia (eje y).

Tomemos movimientos junto con su representación gráfica, considerando tanto movimientos periódicos como no periódicos

Si un movimiento es modelado por una función periódica de tal manera que describa la gráfica f , este movimiento es alejarse y acercarse de un punto de referencia una distancia constante todo el tiempo. Al analizar las gráficas de $f'(x)$ y $f''(x)$ se tiene que son periódicas, es decir, que la velocidad y la aceleración del objeto en movimiento también son periódicas.

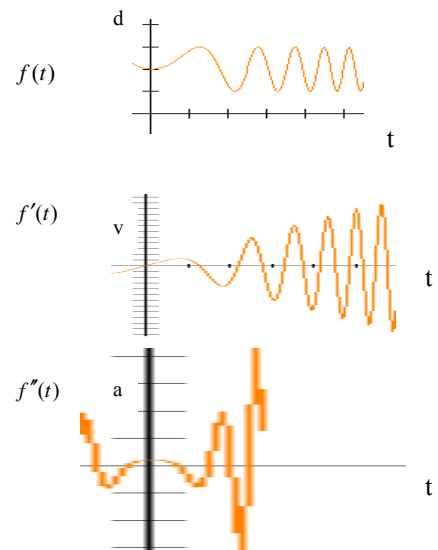


Consideremos un movimiento modelado a través de la función f cuya gráfica es la que se muestra; se observa que el movimiento tiene un patrón uniforme en el tiempo; es un ir y venir pero el objeto se aleja cada vez del punto de referencia: se aleja dos unidades y regresa una. A pesar de ello se observa que la velocidad y la aceleración son periódicas.



Al relacionar la gráfica de una función con la de su derivada, podemos observar que si la primitiva guarda al menos una repetición uniforme en el eje X , su derivada sí será periódica. Buendía (2004) ha dado evidencia de que ese mismo tipo de primitivas son las que, de manera más común, suelen ser clasificadas como periódicas. Pudiera ser que al referirse al comportamiento periódico de una función con esta característica (repetición uniforme en el dominio, patrón de crecimiento en el eje y), en realidad se está calificando la periodicidad de la derivada: el patrón de crecimiento en el eje y se anula al derivarse.

En este ejemplo se tiene un movimiento donde la distancia recorrida en el ir y venir es la misma, pero en un tiempo cada vez más corto y esto lleva a que la velocidad y la aceleración vayan variando. Aquí, sólo hay una regularidad en el comportamiento presente en el eje Y y vemos que tanto en la velocidad como en la aceleración no hay ningún comportamiento periódico.



Al considerar la posición del objeto durante el movimiento modelado por una función y saber que la derivada nos representa la velocidad del objeto, nos hemos preguntado ¿qué implicaciones tiene para el movimiento y su velocidad, si esta función es periódica? ¿Cómo es tal movimiento? ¿Cómo es el comportamiento de su velocidad y su aceleración?

En el estado del arte de nuestro trabajo en las investigaciones que hemos revisado de la relación $f - f'$, no hemos encontrado una que la estudia en el marco de las funciones con comportamientos periódicos. Cantoral y Mirón (2000), analiza la naturaleza del aprendizaje de los estudiantes en relación $f-f''$ a la luz de los graficadores. Dolores (1996), se dirige a incorporar fenómenos relacionados a la variación (problemas de física) y González (1999) propone que la derivada adquiere significado cuando se analizan las derivadas sucesivas. Creemos que estudiar lo periódico en la relación $f - f'$ nos brindará marcos de referencia para obtener significados funcionales en ella.

Metodología

Hemos realizado algunas exploraciones de la relación $f - f'$ en contextos periódicos haciendo las siguientes actividades, cada una con distintos participantes, en algunos casos con profesores y en otros con estudiantes.

Actividad A

Conteste las siguientes preguntas.

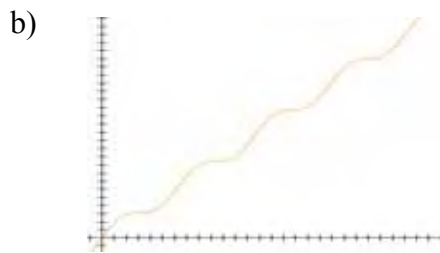
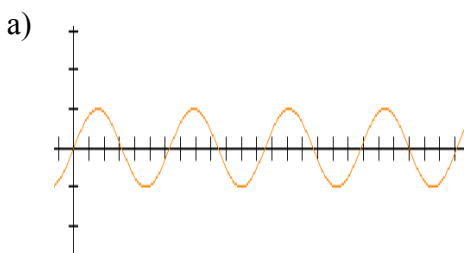
¿Si f es periódica entonces, f' es periódica? Argumente su respuesta.

¿Si f' periódica entonces, f es periódica? Argumente su respuesta.

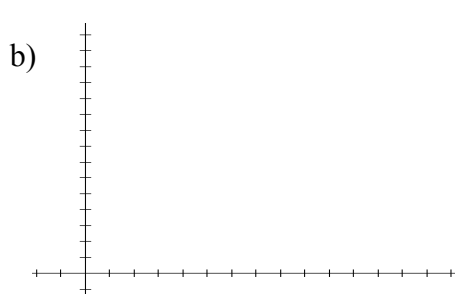
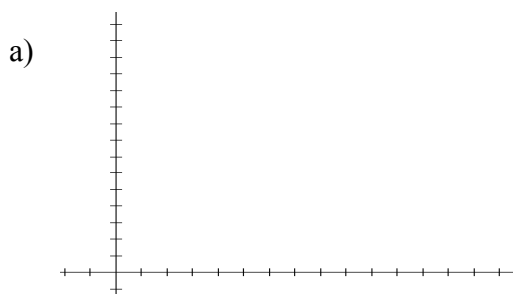
Suponiendo f y f' periódicas ¿Existe alguna relación entre el periodo de cada una?

Actividad B.

1. Dadas las siguientes graficas de funciones, diga en cada caso si es periódica



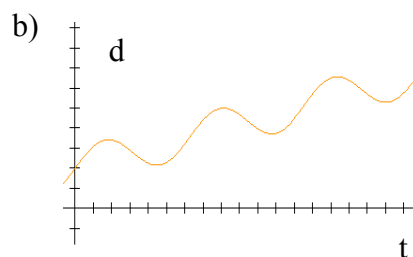
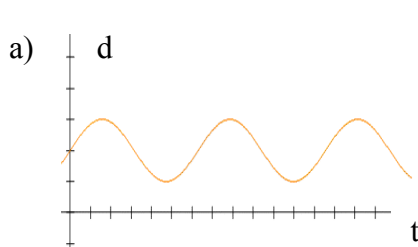
2. Obtenga la grafica de la función derivada de cada una de las funciones anteriores.



¿Son periódicas? ¿Por qué?

Actividad C

Considere las siguientes graficas de funciones tiempo-distancia y supongamos representan el movimiento de una persona.



1. ¿Cómo es el movimiento de la persona en cada una de ellas?
2. Describa el comportamiento de la velocidad de la persona en cada una
3. Los movimientos, ¿son periódicos? ¿Por qué?
4. La velocidad en cada uno de los movimientos ¿es periódica?. ¿Por qué?
5. ¿Qué puede decir de la aceleración en cada movimiento?

Discusión

Se presentan a continuación algunas respuestas de estas primeras exploraciones.

Actividad A

Ingeniero Zavala (civil). Para él ambas implicaciones son verdaderas, argumenta que las únicas funciones periódicas son las trigonométricas.

Ingeniero Carlos Victoria (civil): la implicación $f.\text{periódica} \Rightarrow f' \text{ periódica}$ duda en que se cumpla pero no dio un argumento del porqué; intentó dar ejemplos pero no resultaron, los ejemplos proporcionados se limitaban a funciones trigonométricas. Con respecto a $f' \text{ periódica} \Rightarrow f.\text{periódica}$ dice que es verdadera dando como ejemplos la funciones seno y coseno y obteniendo la antiderivada.

Actividad B

Ingeniero Zavala. Realiza la gráfica de la función seno y concluye que es periódica debido a que encuentra el intervalo de repetición. Luego obtiene la gráfica de la derivada, sabiendo que la derivada del seno es la función coseno y por tanto es una función periódica.

Ingeniero Carlos Victoria: Grafica la función seno y acuerda que es una función periódica, realiza la grafica de la derivada usando que en los máximos de la función la derivada es cero y en los puntos de inflexión la derivada es máxima o mínima.

Luego, les pedimos obtener la gráfica de la función derivada y, nuevamente, analizar el cumplimiento o no de la propiedad periódica. En ambos casos, algunos con criterios gráficos, hallan la gráfica de la derivada, y concluyen que ambas son periódicas.

Ingeniero Zavala. Para la gráfica de la función $f(x) = x + \text{sen}x$, grafica el seno y la rota de tal manera que el eje X coincida con la recta $f(x) = x$. Es periódica porque puede encontrar el periodo debido que es el periodo lo que indica la repetición. Para la gráfica de la derivada, primero deriva la función $f(x) = x + \text{sen}x$ y obtiene la función $f'(x) = \cos x$ y por tanto es periódica.

Ingeniero Carlos Victoria Para la función $f(x) = x + \text{sen}x$ dice que es como el seno pero no sobre el eje X sino sobre la recta $y = x$ y siempre es creciente y esta función no es periódica. Para la derivada, identifica que en los puntos de inflexión la derivada alcanza máximo o mínimo y como es creciente siempre es positiva y ésta sí es periódica.

En este contexto gráfico, podemos hacer evidente que el comportamiento de una función tiene dos componentes: el comportamiento en el eje X y el comportamiento en el eje Y ; esta distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que “no es verdaderamente periódico” (Buendía, 2004). Es importante hacer notar que es común que la gráfica de la función $f(x) = x + \text{sen}x$ se le clasifique como periódica o, al menos con cierta periodicidad, ya que guarda una repetición regular en el eje X . Y esa es una característica que los estudiantes utilizan para obtener la gráfica de la derivada, manteniendo así su comportamiento periódico.

Encontramos que al enfrentar la propiedad periódica desde un contexto gráfico, se considera el comportamiento de repetición puntual y sin analizar, de manera global, el comportamiento presente en cada una de las coordenadas. En ocasiones, el análisis se centra en la indagación del comportamiento de las abscisas dejando sin sentido el resto: se hace énfasis únicamente en el comportamiento de la variable independiente dejando de lado el de la imagen. Estos elementos de corte gráfico también nos permiten sostener la importancia de estudiar los aspectos periódicos en la relación de una función y sus derivadas.

Actividad C

Esta actividad fue respondida por Anselmo Martines Ruiz; estudiante de 8° semestre de la carrera de ingeniería civil y sus respuestas fueron:

1. El movimiento es variable en b) y constante en a).
2. En b) hay una variación lineal y en a) la variación es constante.

3. *a)* si, *b)* semiperiódico Porque en *a)* repetimos un movimiento igual en determinado tiempo que varia, y en *b)* por que se mantiene un cambio constante en la distancia.
4. No en *b)*, si en *a)* Porque al calcular la velocidad en del individuo y hacer la gráfica veremos que no es periódico en *b)*, si lo es en *a)*
5. En *b)* es constante y en *b)* se considera variable por la forma de la velocidad.

Este estudiante no describe cómo se está moviendo la persona, sin embargo determina que en la gráfica *a)* hay cierto intervalo de tiempo que al ir transcurriendo; el movimiento es el mismo. Y en *b)* observa que hay un aumento constante en la distancia, razón por la cual no puede ser periódico.

Nuestro trabajo propone realizar un estudio de la implicación “ f periódica $\Rightarrow f'$ periódica” en el tránsito de los contextos analítico, gráfico y físico debido a que la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares, y dar cuenta, que no puede quedar relegada al aspecto analítico o asociada a una sola función. El comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento descrito desde un contexto físico y gráfico.

Conclusiones

Al considerar exclusivamente un contexto analítico, una función se cataloga como periódica o no periódica haciendo uso de la definición; esto es: una función es periódica si cumple la igualdad $f(x) = f(x + p)$ para todo x que pertenezca al dominio, sin aludir al uso de herramientas de corte social que reconocen al individuo en un determinado contexto sociocultural – no exclusivamente matemático. Estas herramientas de corte social, como el comportamiento de una función, enriquecen la argumentación alrededor de lo periódico y se resignifica este aspecto de lo periódico de las funciones.

Creemos que para estudiar lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, desde el tránsito de los contextos analítico, gráfico y físico importa comprender la interacción entre los procedimientos usados y las características particulares de los objetos con que se trabajan. Nuestro trabajado de investigación abordará el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas en un marco de prácticas sociales y dando evidencia que no puede quedar relegado al aspecto analítico ya que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas dará argumentos para analizar y caracterizar un movimiento desde un contexto físico y gráfico.

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de doctorado publicada. México: Cinvestav.

- Buendía, G. (2005). Qué enseñar en Matemáticas: una visión socioepistemológica. *Revista Pakbal*. Facultad de Ingeniería Unach. Año 3, Nov. 2004. Chiapas, México.
- Buendía, G. (2005). Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18, (pp. 451-456). México.
- Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 16, Tomo 1, (pp.73-78). México.
- Dolores, C. (1997). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. En *Resúmenes de la 11ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, pp 19. Universidad Michoacán de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Michoacán.
- González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN.
- Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3 (3), 265-292
- Spivak, M. (1993). *Calculus*. Editorial Reverté 2ª edición. México.