

## LA ENSEÑANZA DE LA MODELACIÓN EN CLASE DE FÍSICA Y DE MATEMÁTICAS EN ÚLTIMO AÑO DE PREPARATORIA EN FRANCIA

Ruth Rodríguez Gallegos  
Equipo Informática et Aprendizaje de las Matemáticas (IAM)  
Universidad Joseph Fourier Grenoble, Francia – México  
[Ruth.Rodriguez@imag.fr](mailto:Ruth.Rodriguez@imag.fr)  
Investigadores Jóvenes

### Resumen

En el 2002, la introducción de nuevos planes de estudio para el bachillerato en Francia, muestra la gran importancia que se tiene actualmente sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelación, principalmente en disciplinas científicas como Matemáticas y Física. En los programas oficiales y libros del último año de preparatoria se puede observar la introducción de la noción de ecuación diferencial como objeto de estudio pero también como herramienta para modelar diversas situaciones físicas.

En esta investigación, nos interesa caracterizar el proceso de modelación en dos instituciones diferentes: la clase de matemáticas y la clase de física en el último año de preparatoria. Nos apoyaremos en un praxeológico de manuales escolares así como en observaciones en clase para caracterizar el tipo de enseñanza que existe actualmente y para identificar el tipo de tareas y técnicas a las cuales los alumnos son confrontados cuando el objeto ecuación diferencial es introducido como modelo de diversas situaciones físicas. En particular, nuestro estudio se centra en el estudio de los circuitos eléctricos.

**Palabras Claves** : *modelación matemática, física, ecuación diferencial.*

### Introducción

Esta investigación está motivada por el creciente interés que a nivel mundial, y en particular en Francia, se ha observado en los últimos años de mostrar a los alumnos la utilidad de las Matemáticas en otros dominios de la ciencia.

A nivel mundial el proyecto PISA<sup>11</sup> establece que la cultura matemática es un objetivo de formación del futuro ciudadano del siglo XXI. Esta cultura es definida como “*la capacidad de un individuo para identificar y para comprender el papel jugado por las matemáticas en el mundo*”. PISA privilegia los conocimientos y las habilidades de los alumnos para resolver problemas de la vida real ya que fuera del contexto escolar los alumnos serán confrontados a situaciones problemáticas en las cuales deberán hacer uso de sus conocimientos matemáticos. Los nuevos programas oficiales de preparatoria en Francia, puestos en práctica desde el 2002, también

---

<sup>11</sup> Proyecto de los países de la OCDE que estudia, desde 1997, los resultados de los sistemas educativos de 43 países en términos de los conocimientos adquiridos por jóvenes de 15 años en las áreas de lectura, matemáticas y ciencias.

destacan el papel de las Matemáticas como disciplina al servicio de otras ciencias. El fin del liceo es la culminación de los estudios secundarios y abre las puertas a los estudios superiores.

*“Las carreras en la universidad son naturalmente diversas y ofrece a las matemáticas un lugar variable. Para algunos alumnos, ella será una materia central pero para todos es una herramienta de cálculo y de modelación”*  
(programa oficial de Matemáticas, p. 64).

### **La modelación en Matemática Educativa**

Una referencia sobre las investigaciones realizadas alrededor de la enseñanza de la resolución de problemas y de la modelación a inicios de los 90's es el trabajo de Blum et Niss (1991). Los autores definen como problema cuando una situación nos conduce a interrogarnos sobre ella y sobre la cual no disponemos de métodos o algoritmos directos para responder a determinadas preguntas. Estos autores distinguen dos tipos de problema: matemáticos y aplicados. Los problemas aplicados, situados desde un inicio en el “*mundo real*” (el resto del mundo fuera de las matemáticas) son de interés en nuestro trabajo. El paso entre una situación real hacia la construcción de un modelo matemático es denominado modelación por Blum y Niss en esa época. Esta definición evolucionará en trabajos posteriores.

La aparición de la modelación en foros internacionales, como el Congreso Internacional de Matemática Educativa (ICME) y el Congreso Internacional de la Enseñanza de la Modelación y Aplicaciones (ICTMA)<sup>12</sup>, como objeto de estudio desde inicios de la década de los 90's hasta nuestros días, es una muestra de la importancia y el interés que ha tomado el tema en la comunidad de Matemática Educativa.

Es importante señalar la existencia del estudio ICMI<sup>13</sup> 14 “Aplicaciones y Modelación en Matemática Educativa” (Blum, 2002) lanzado, en el 2002, por la Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI). El estudio tiene como finalidad de reflexionar sobre el estado de arte actual de este tema y de proponer direcciones posibles para la práctica y la investigación alrededor de la modelación<sup>14</sup>.

### **Modelo del proceso de modelación**

Blum (2002) retoma, en ICMI 14, parte de los elementos teóricos introducidos en su trabajo anterior (Blum y Niss, 1991) pero esta vez precisa que “es común utilizar el término de modelación matemática en el sentido del proceso completo que consiste a estructurar, modelar, trabajar matemáticamente e interpretar/validar (en ocasiones varias veces)”. Un aspecto interesante es la introducción de la etapa de “*modelo real*” como una etapa intermediaria entre la situación real de inicio y el modelo matemático.

---

<sup>12</sup> Congreso realizado cada dos años desde 1983. Las actas permiten observar una serie de ejemplos de estudios y de contribuciones a este tema en todos los niveles escolares.

<sup>13</sup> Comisión Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, siglas en Inglés).

<sup>14</sup> Una conferencia preliminar fue realizada en Alemania (2004) y el resultado del estudio ICMI 14 está próximo a publicarse. Fecha posible de publicación diciembre 2006 por la editorial Springer.

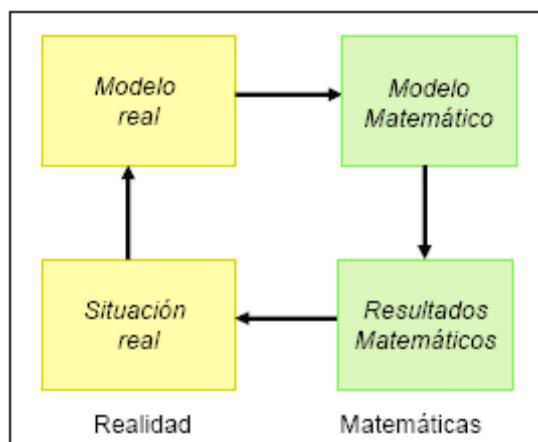


Figura 1: Esquema de modelación de Blum y Niss (1991).

Esta misma distinción ya ha sido realizada por Henry (2001) donde este autor distingue la etapa de “*modelo pseudo-concreto*” en la cual una elección de los aspectos pertinentes de la situación inicial con respecto a una pregunta es llevada a cabo, ignorando los aspectos no relevantes y donde se establecen las primeras hipótesis, en ocasiones de manera explícita aunque la mayor parte del tiempo implícitamente. La existencia de esta etapa intermedia citada por Blum así como por Henry es primordial en nuestro trabajo ya que del punto de vista de la enseñanza permite al alumno pasar gradualmente de una situación abierta (dominio de la realidad) a un modelo matemático preciso (dominio matemático).

Otro trabajo importante es el realizado por Borromeo (2006) donde ella propone la incorporación de la etapa de “representación mental”. Esta es una etapa intermedia entre la situación real y el modelo pseudo concreto. Para Borromeo, en esta etapa es posible describir el tipo de procesos internos con respecto a la imagen mental del individuo durante y después de la lectura de una tarea de modelación relativamente compleja. El objetivo del trabajo de Borromeo es estudiar el proceso de modelación desde una perspectiva cognitiva. A partir de los esquemas de modelación propuestos (Blum 1991 y 2002; Henry, 2001; Borromeo, 2006), estableceremos nuestro modelo del proceso de modelación de referencia para nuestros análisis posteriores. El proceso de modelación de referencia será conformado por 8 etapas las cuales ilustramos a continuación con el siguiente esquema:

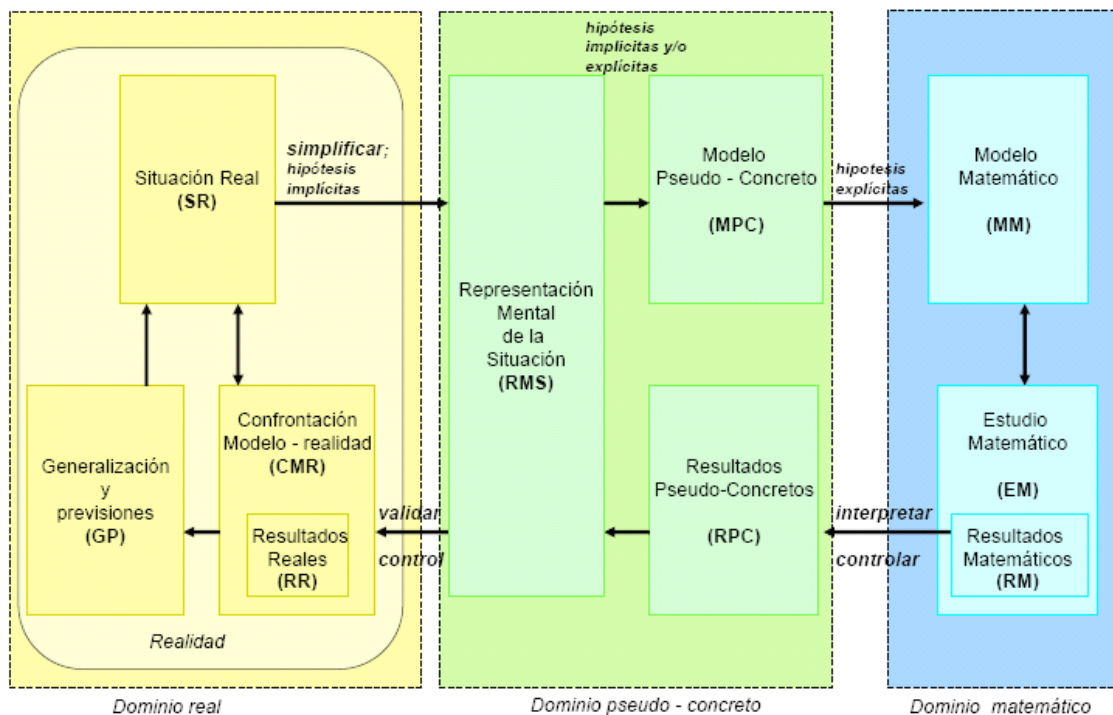


Figura 2: Proceso de modelación de referencia

## Metodología

Nos interesa estudiar el proceso de modelación como objeto de enseñanza así como precisar la manera en la cual este proceso es llevado al sistema escolar, en particular en el último año de estudios en el liceo en Francia. Para ellos realizaremos observaciones en clase de física y matemáticas cuando la noción ecuación diferencial es introducida como una herramienta para modelar diversas situaciones extra-matemáticas.

En términos de Chevallard (1992), consideremos la institución del último año de preparatoria y suponemos que las sub-instituciones Clase de Física y Clase de Matemáticas son diferentes. En consecuencia, suponemos que el tipo de proceso de modelación puesto en práctica en cada una de estas clases también lo es. Resta a confirmar o refutar lo anterior gracias a observaciones y análisis realizados.

En un primer tiempo, un análisis de programas oficiales nos permitirá escoger el tema adecuado a estudiar con detalle en ambos cursos. En un segundo tiempo, un análisis praxeológico de manuales de clase nos permitirá caracterizar el tipo de tareas relativas a la práctica de la modelación que son enseñadas en cada una de las sub-instituciones, las etapas del proceso de modelación que son más y menos tratadas así como determinar el tipo de actividades propuestas a los alumnos y el tipo de técnicas enseñadas para llevarlas a cabo.

## Elementos teóricos

La teoría de la transposición didáctica desarrollada por Chevallard (1992) evidencia la aparición sistemática de una distancia entre el saber sabio o experto (nuestro modelo de referencia), el saber a enseñar (lo establecido por los programas oficiales) y el saber enseñado (lo que es llevado realmente al aula de clase) a causa de diversas limitaciones del funcionamiento del sistema de

enseñanza. Nos interesa estudiar la transposición de nuestro proceso de modelación de referencia en el ámbito escolar.

En lo que respecta el análisis de manuales para conocer el tipo de actividades propuestas a los alumnos, la noción de praxeología es nuestra herramienta de análisis. Artaud (1997) establece que una praxeología es una respuesta a la pregunta de cómo realizar una determinada tarea aunque en general no es una tarea aislada, sino un tipo de tareas  $T$ . Para poder responder a una tarea  $t$  del tipo de tareas  $T$  habrá que emplear una técnica  $\tau$ . La justificación de esta técnica es dada por la tecnología  $\theta$  y esta a su vez puede ser justificada gracias a la teoría  $\Theta$ . Se llega así a un modelo praxeológico de la forma  $[T, \tau, \theta, \Theta]$ .

## Resultados

### *Análisis praxeológico de manuales de matemáticas*

El programa oficial de la clase de Matemáticas establece que se mostrará a los alumnos uno o dos ejemplos de esta práctica con situaciones extra-matemáticas que conduzcan al establecimiento de una ecuación diferencial *simple* y donde los alumnos serán guiados en el trabajo de traducción matemática. Los autores del programa afirman la importancia de confrontar a los alumnos al menos una vez al proceso de modelación pero precisan que ninguna competencia será exigida en el examen del *baccalauréat*<sup>15</sup>. Identificamos el capítulo de “Ecuaciones Diferenciales” en la parte de Análisis como el lugar a estudiar con más detalle para ver el tipo de práctica de modelación para ser transmitida a los alumnos.

De acuerdo a los programas oficiales de la clase de matemáticas, dos casos posibles de tareas a efectuar son observados:

- una ecuación diferencial es propuesta por el enunciado del ejercicio restando al alumno de proponer la familia de las soluciones generales de la misma
- una ecuación diferencial es propuesta por el enunciado, una solución aproximada por el método de Euler es requerida.

La utilización de la palabra “traducción” en lugar de modelación por los programas oficiales implica que el pasaje entre una situación real (ilustrada por el enunciado) hacia el establecimiento de un modelo matemático (la ecuación diferencial) es una traducción literal de lo que se presenta en el enunciado sin confrontar al alumno a hacer elecciones o establecer hipótesis del fenómeno en cuestión.

Realizando un estudio en términos de praxeologías a los ejercicios no resueltos del capítulo “Ecuaciones Diferenciales” de tres manuales de la clase de Matemáticas (comúnmente usados en los liceos franceses), identificamos diversas situaciones extra-matemáticas modeladas por:

- a) una ecuación diferencial de la forma  $y' = ay + b$  con  $a$  y  $b$  constantes
- b) una ecuación diferencial diferente pero que se puede transformar a una de la forma  $y' = ay + b$  con  $a$  y  $b$  constantes. En este caso todas las indicaciones serán dadas al alumno (de acuerdo al programa oficial, confirmado con el análisis de los ejercicios de los manuales)

---

<sup>15</sup> Examen de fin de año que valida los tres años de liceo a nivel nacional, comúnmente llamado *BAC*.

El tipo de tareas más frecuentemente observadas en los ejercicios de los manuales son:

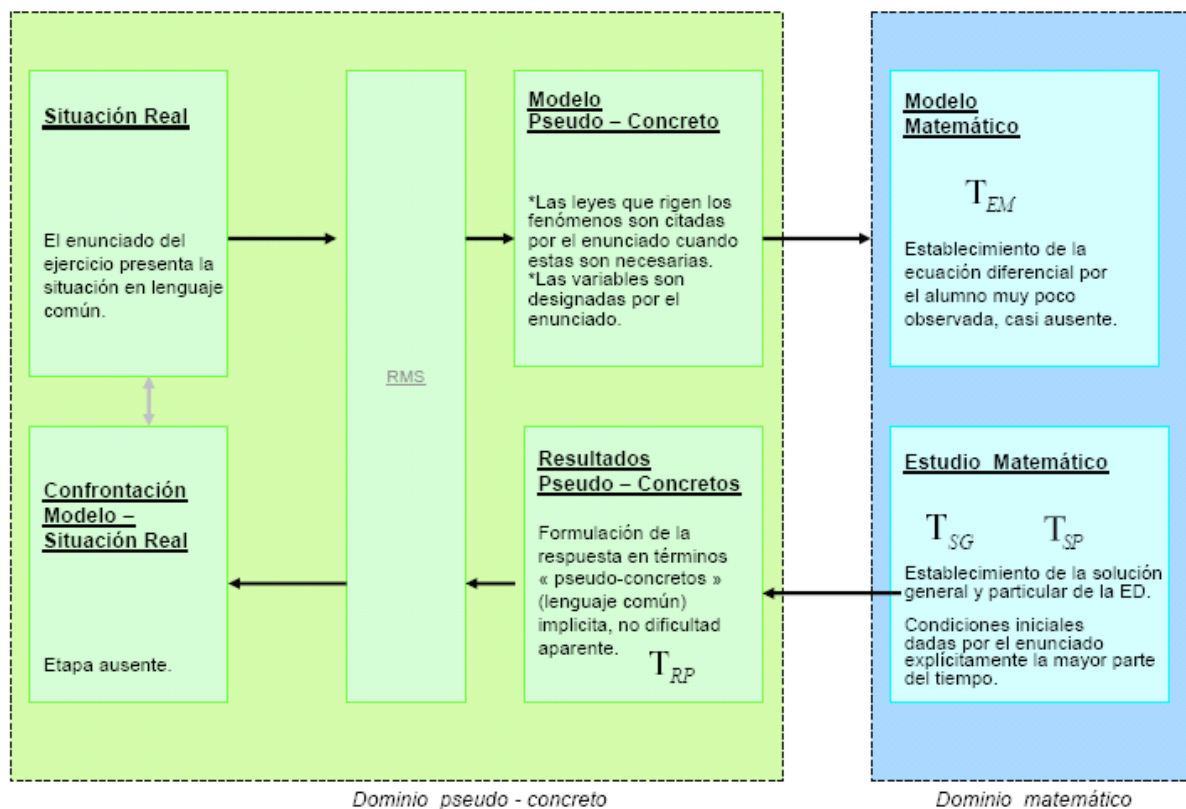
**T<sub>SG</sub>**: establecimiento de la solución general de la ecuación diferencial de la forma  $y'=ay + b$  como la función  $y = Ce^{ax} - b/a$ .

**T<sub>SP</sub>**: establecimiento de la solución particular de la ecuación diferencial  $y'= ay + b$ . Precisión de los parámetros de la función solución gracias a una condición inicial normalmente dada por el enunciado del ejercicio.

La técnica  $\tau_{SG}$  presente en los manuales para *encontrar* la familia de la solución de una ecuación diferencial de la forma  $y'=ay+b$  es la utilización de un teorema establecido previamente por el profesor en clase y que afirma que las familia de soluciones son de la forma  $Ce^{at} - b/a$ ; la consigna es “aprenderse este resultado de memoria”. Evidentemente, la justificación de esta técnica  $\theta_{SG}$ , la demostración del teorema, es dada en clase pero éste no es un conocimiento exigido posteriormente al alumno.

Podemos concluir que el establecimiento del modelo ecuación diferencial por los alumnos (tipo de tareas **T<sub>ME</sub>**) es poco observado, casi ausente. La transición de los resultados matemáticos (Estudio Matemático) en términos de la situación real (tipo de tareas **T<sub>RP</sub>**) es tratada de manera simple con una simple reformulación de los términos matemáticos en términos de los objetos reales, sin representar dificultad aparente para los alumnos.

En términos de nuestro proceso de modelación de referencia podemos representar el tipo de modelación presente en la clase de matemáticas por la siguiente figura:



*Figura 3: proceso de modelación existente en clase de matemáticas.*

### **Análisis praxeológico de manuales de física**

Aplicando la misma metodología para la clase de física, una primera revisión del programa oficial nos permite observar que el objeto ecuación diferencial (ED) es una herramienta de modelación en tres grandes dominios: la radioactividad, la mecánica y los circuitos eléctricos. Escogemos como tema de estudio la parte de Electricidad y analizamos los ejercicios no resueltos propuestos en el capítulo “Circuito RC”<sup>16</sup> (resistencia-condensador), de tres manuales de la clase de física usados en los liceos franceses, donde la carga y descarga de un condensador es estudiada.

Identificamos cuatro tipos principales de tareas a realizar por los alumnos relativas a la práctica de la modelación en esta clase:

**T<sub>ED</sub>**: Establecimiento de la ecuación diferencial para modelar la variación (en el circuito RC) de la tensión en bornas del condensador  $u_C$  en función del tiempo. Se parte de una descripción verbal en términos de la física para llegar a una ED de la forma  $u_C' + a u_C = b$  con  $a, b$  constantes.

**T<sub>VSG</sub>**: Verificación de que una función es solución general de la ED establecida. La técnica  $\tau_{VSG}$  es la substitución (en la ED) de la solución general dada previamente en el enunciado.

**T<sub>SP</sub>**: Establecer una solución particular de la ecuación diferencial en términos de los parámetros del circuito, las condiciones iniciales a utilizar son normalmente a establecer por los alumnos.

**T<sub>RP</sub>**: Responder a una pregunta realizada en términos físicos.

Con respecto a nuestra práctica de modelación de referencia, el tipo de modelación observada en clase de física puede ser representada por medio de la figura siguiente:

---

<sup>16</sup> La parte de Electricidad esta conformada por tres capítulos: “Circuito RC”, “Circuito RL” y “circuitos RLC”.

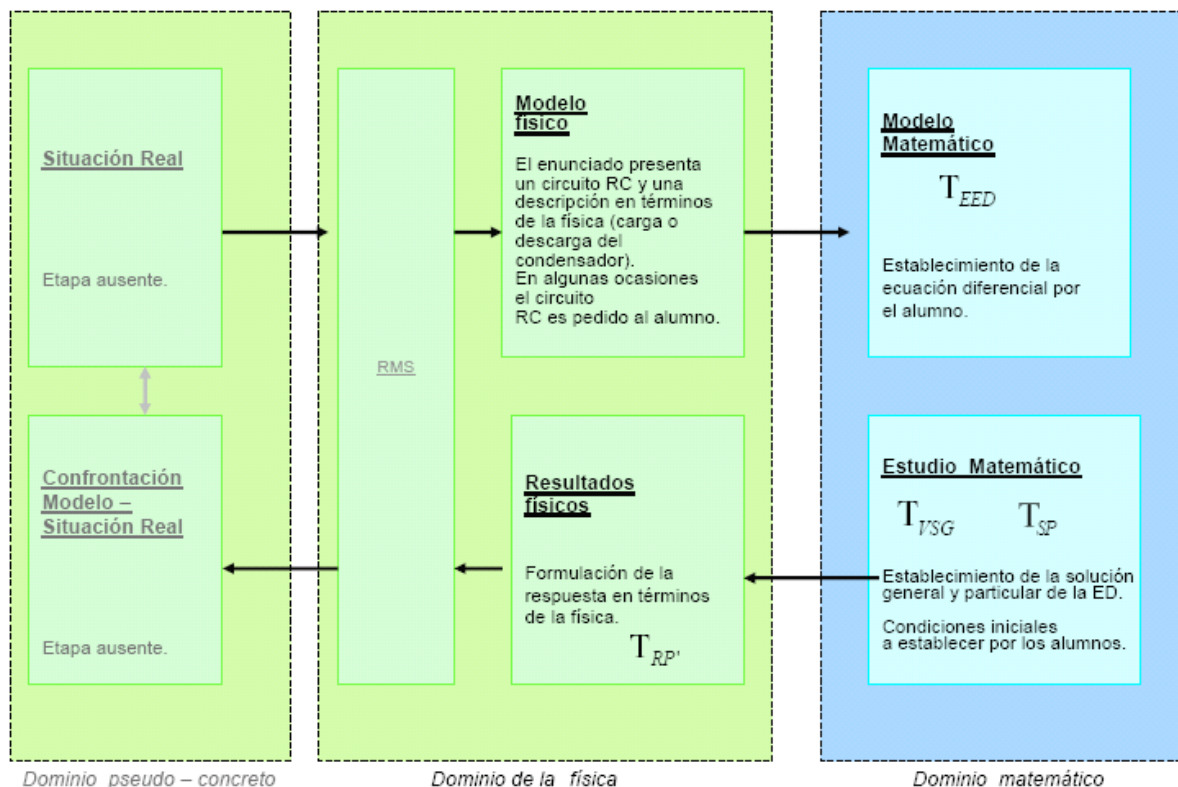


Figura 4: proceso de modelación existente en clase de física.

En este caso, señalemos que el establecimiento del modelo por los alumnos en clase de física es importante ya que el proceso de modelación es una práctica cotidiana de los físicos y este tipo de tareas es dejada a la responsabilidad del alumno. Por otro lado, se encuentra un tipo de tareas semejante a las observadas en clase de matemáticas para la determinación de una solución general  $T_{VSG}$  y particular  $T_{SP}$  pero en esta ocasión el tipo de técnica  $\tau_{VSG}$  que se exige del alumno es la comprobación mediante la sustitución en la ecuación previamente establecida por los propios alumnos. La justificación de tal técnica pertenece más a un dominio matemático y en este caso tampoco observamos una justificación para ésta al interior de la clase de física (en términos de teoría propia a la física).

## Discusión de resultados y conclusión

### *Sobre el proceso de modelación en general*

El proceso de modelación puesto en práctica en clase de física y matemáticas difiere de nuestro esquema de referencia por lo que reconocemos la transposición de este proceso al ámbito escolar. La situación inicial de la gran mayoría de los ejercicios observados en los manuales de ambas clases está situada en un dominio pseudo-concreto o dominio de la física ya que ciertas elecciones son ya realizadas y sólo son mencionadas las variables que intervendrán en el modelo matemático final. Una consecuencia de este hecho es que las etapas de la Representación mental



de la situación y de la confrontación Modelo-Situación Real se encuentran también al interior de este dominio).

La etapa de Generalización y Previsiones desaparece en situación escolar (con base a nuestras observaciones y análisis realizados) reafirmando lo observado en un estudio anterior en Rodríguez (2003). De acuerdo a Henry, esta etapa requiere de conocimientos especializados en el dominio extra-matemático que intervienen en la situación, lo que podría ser una razón de la dificultad que representaría si ésta estuviera totalmente a la carga de los alumnos a este nivel.

Podemos concluir que la práctica de modelación existente en el último año de preparatoria difiere de nuestra modelo de referencia el cual es próximo al proceso llevado a cabo por los expertos y reconocemos la existencia de un proceso de modelación “escolar” que reduce la dificultad de las actividades a realizar por los alumnos en diferentes etapas o pasajes entre estas.

### ***La modelación en clase de matemáticas***

El proceso de modelación existente en clase de Matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos a etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual resta significado y riqueza a la práctica de la modelación a este nivel. El trabajo de los alumnos reside principalmente en trabajar en las etapas que pertenecen al dominio matemático aunque la etapa de “Estudio Matemático” del modelo propuesto exige al alumno de *tener en mente* la forma general de la solución y no representa mayor dificultad a los alumnos. La especificación de la solución particular a la situación, siendo las condiciones iniciales dadas en el enunciado, no propone tampoco mayor reto a los alumnos. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase es lejano a aquel vivido por los expertos y en términos de la enseñanza no permite al alumno el enfrentarse al acto de modelar de manera completa.

### ***La modelación en clase de física***

En clase de física, se observa una importancia mayor dada a este proceso de modelación. La etapa de Modelo Matemático es propuesta al alumno en clase y una interacción entre ambas disciplinas (Matemáticas y Física) es fundamental para poder interpretar en términos de los componentes del circuito – resistencia  $R$ , capacidad  $C$  – los resultados obtenidos matemáticamente. Observamos que en esta disciplina, el proceso de modelación vive de manera más cercana a nuestro esquema de referencia y algunas etapas son más tratadas; en particular, el establecimiento del modelo y de las condiciones iniciales para encontrar una solución particular lo cual permite al alumno un mayor aprendizaje respecto a la modelación en Física. Observamos la aparición del dominio de la Física en nuestro esquema de modelación ya que antes de entrar de lleno a trabajar en un dominio puramente matemático, el pasar por un modelo físico (en nuestro caso una configuración del circuito RC así como las leyes que rigen éste como ley de tensiones, ley de Ohm, etc) es imprescindible.

El tipo de tareas  $T_{SG}$  y  $T_{VSG}$  para la determinación de una solución general para la ecuación diferencial  $y' = ay + b$  en ambas sub-instituciones clase de matemáticas y físicas da lugar a la existencia de dos técnicas distintas ( $\tau_{SG} \neq \tau_{VSG}$ ), correctas o no, dependiendo de la clase donde la tarea es formulada (efectos del contrato didáctico).

El diseño de situaciones que permitan el trabajo del alumno en más etapas del proceso de modelación es una tarea que se revela primordial para mostrar los alcances y también las limitaciones de este tipo de práctica a alumnos que culminan sus estudios secundarios y para los cuales las Matemáticas serán, seguramente, una ciencia de servicio en su futuro profesional.

### **Agradecimientos**

Deseo agradecer de manera especial a Colette Laborde quien ha dirigido y supervisado el desarrollo del presente estudio en el marco de mis estudios doctorales. Agradecemos el apoyo financiero brindado por el equipo de Informática y Aprendizaje de las Matemáticas para la asistencia a la X Escuela de Invierno de Matemática Educativa así como el apoyo recibido del CONACYT para la realización de mis estudios doctorales.

### **Referencias bibliográficas**

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IX Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Houlgate : ARDM et IUFM Caen, Francia.

Blum, W. (2002). ICMI 14: Applications and modelling in mathematics education – Discusión Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1-2), 149-171.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (2), 86-95.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-111. La pensée Sauvage. Francia.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En M. Henry (Ed), *Autour de la modélisation en probabilités..* (pp.149-159). Besançon, Francia : Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités PUFC.

Rodríguez , R. (2003). *Le contrat didactique relatif aux équations différentielles comme outils de modélisation en classe de Terminale S*. Tesis de maestría no publicada. Université Joseph Fourier, Francia.