NEWTON Y LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NUMÉRICAS: DESARROLLO HISTÓRICO.

Flor M. Rodríguez[4], Modesto Sierra[5].
Universidad de Salamanca.
flor_r@usal.es
Reporte de Investigación.

Resumen
En 1711 Isaac Newton publicó su libro *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* en el cual se plasman algunos de sus hallazgos en relación a la solución de ecuaciones numéricas. Para resolver estas últimas, Newton aplicó un algoritmo ya conocido desde los babilónicos, algoritmo que en la actualidad es parte del programa de estudios de carreras como arquitectura, biología, ingeniería, matemáticas, etc. Nosotros discutiremos algunos aspectos del trabajo de Newton desde la perspectiva de la investigación histórica, la cual ha reportado ser en algunos casos, favorable en el ámbito didáctico. Asimismo, se reportan algunos resultados arrojados del análisis epistemológico del método para aproximar a la solución de ecuaciones numéricas dado en el *De Analysi.*
Palabras clave: Investigación histórica, método iterativo, ecuaciones no lineales.

Abstract
In 1711 Isaac Newton published his book *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* which contains some of his research works about the solution of numerical equations. For resolving it, Newton applied an algorithm already known since babylonian's time, an algorithm that in present time is part of the studies program of professions like architecture, biology, engineer, mathematics, etc. We will treat some aspects of the Newton's work from the historical research perspective, which has reported to be, in some cases, favorable in didactic ambit. Likewise, we report some evidences from the epistemological analysis of the method for being close to solution of numerical equations given in *De Analysi*.
Keywords: Historical research, iterative method, non linear equations.

Introducción

La *investigación histórica* ha reflejado ser competente en el ámbito de la didáctica de la matemática y así, desde esta perspectiva, afrontamos el tema de la evolución de un saber, con el propósito de vislumbrar el pasado y el presente para ampliar nuestro entendimiento al espacio educativo. De acuerdo con Cantoral et al. (2000), dado que la matemática se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento. Asimismo este proceso de incorporación de los saberes al sistema didáctico plantea una serie de problemas tanto teóricos como prácticos, que precisan de

[4] Con el apoyo del programa ALβAN, programa de becas de alto nivel de la Unión Europea para América Latina, n° de identificación E03D21720MX.
[5] Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.

acercamientos metodológicos y teóricos adecuados. En este sentido, consideramos necesario realizar un estudio de la génesis del concepto a estudiar, a saber, los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, de tal forma que indaguemos sobre las relaciones entre el desarrollo científico y social y el desarrollo de los contenidos de la enseñanza, obteniendo con ello una visión más amplia del tema tanto en su contexto histórico como en el contemporáneo.

El estudio histórico de la evolución de un concepto puede incrementar su conocimiento tanto teórico como práctico. Pajus (2000) señala que el contenido cultural de las matemáticas no sólo se reduce a sus aspectos técnicos. En concreto, los textos y referencias históricas permiten comprender la interacción entre los problemas matemáticos y la construcción de conceptos que surgen a partir de su resolución.

Hemos de asumir que el análisis histórico cumple varias funciones: en primer lugar se considera que las nociones matemáticas no se desarrollan de manera aislada, sino conectadas unas con otras; en segundo lugar, muestra el contexto de problemas en los que han aparecido los conceptos y; en tercer lugar nos hace comprender que el desarrollo no ha sido lineal. (Sierra et al, 2002). Esto nos lleva a mirar los cambios que sufre un saber a través de la historia de tal forma que nos aproximemos a su evolución hasta el momento actual.

De este modo, realizamos un análisis de libros históricos[6] que, siguiendo a la literatura, son clave en la evolución de nuestro tema de estudio. No obstante, en este escrito únicamente presentamos un avance de investigación, enfocando nuestra atención en la obra de Newton (1711), *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, ya que sin duda este autor es protagonista en el tema de la resolución de ecuaciones.

Metodología

Las etapas que hemos considerado se corresponden con la metodología de investigación histórica, nuestro plan de trabajo consiste en seguir el método[7] sugerido por Ruiz Berrio (1976) el cual está determinado por las siguientes fases: *Heurística*.- localización y clasificación de los documentos; *Crítica*.- crítica externa: determinación de la autenticidad de las fuentes según sus características formales, las circunstancias en que ha llegado a ser posible su conocimiento y el modo de llegar a las manos del investigador / crítica interna: comprensión e interpretación del contenido de los documentos;

[6] "Resultados de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos". González (2002)

[7] Sierra (1989) en relación al método, expresa que el primer paso debe ser la selección del tema y reducir cuanto se pueda los límites de la investigación, escogiendo conjuntos históricos representativos. Una vez hecho esto, se debe de programar el desarrollo de la investigación, realizando un estado de la cuestión, sondear los fondos documentales existentes, elaborar una hipótesis o campo de hipótesis como punto de partida, búsqueda exhaustiva de los documentos intentando buscar siempre fuentes primarias, realizar una crítica externa e interna de los documentos, estructuración definitiva del trabajo y finalmente las conclusiones.

Hermenéutica.- interpretación histórica de los datos; *Exposición.-* explicaciones convenientes del trabajo histórico.

Los objetivos particulares que nos planteamos para el análisis de la obra de Newton fueron:
a) identificar y clasificar, los diferentes tratamientos didácticos de su método iterativo para encontrar raíces de ecuaciones y,
b) analizar desde las dimensiones, epistemológica y socio-cultural el método iterativo que presenta.

Nuestra *hipótesis general* radica en que los procesos iterativos para la resolución de ecuaciones han evolucionado con base al tratamiento de la derivada a lo largo de la historia[8].
Ahora bien, con base en González (2002) hemos construido una herramienta de estudio definiendo unos campos generales de análisis como son la ficha de referencia de la obra, la contextualización y objetivos de la obra, los objetivos del autor, e intentamos clasificar el contenido según el tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones. Asimismo para cada campo hemos elegido unidades de análisis con el fin de ahondar en los detalles epistemológicos. A continuación mostramos las categorías para el análisis de libros históricos. (Ver Tabla 1)

Campo de análisis	**Unidades de análisis**		**Catego-rización**	**Descripción general de los propósitos**
Ficha de referencia de la obra	▪ Nombre del autor ▪ Fechas de nacimiento y fallecimiento del ▪ autor ▪ Primera edición ▪ Edición analizada ▪ Localización del manual utilizado			Nos permite enmarcar la obra en el momento en el que fue escrita.
Contexto y propósitos de la obra y del autor	▪ Momento histórico y lugar en que fue ▪ escrita la obra		**CP1**	Contextualiza-ción y caracterización de la obra en función de los sucesos que influyeron para su para
	▪ Contexto histórico-cultural de las matemáticas en general		**CP2**	
	▪ Formación del autor		**CP3**	
	▪ Estructura general del material	- Extensión y estructura del material - Secuenciación de los contenidos de la obra	**CP4**	

[8] Hipótesis que tiene antecedentes en interrogantes del siguiente tipo: ¿Qué tipo de pensamiento matemático predominaba en los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, XIX en relación a los métodos de aproximación de ecuaciones?; ¿Qué tipo de problemas intentaban resolver los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, XIX en general?; ¿Cómo han variado los procesos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducir las nuevas tecnologías en su enseñanza?; ¿Qué similitudes existen en los procesos iterativos plasmados en los libros de texto con los expuestos por las nuevas tecnologías?; ¿Hay conexiones entre los tratamientos geométrico, algebraico y numérico de los métodos iterativos?

		- Tipografía de la obra		su divulgación.
	▪ Objetivos generales de la obra		**CP5**	
	▪ Innovaciones introducidas por el material		**CP6**	
	▪ Otras obras publicadas		**CP7**	
Tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones	▪ Geométrico (G)	- Ejemplos de problemas - Tipos de expresiones utilizadas - Conceptos involucrados - Gráficas empleadas	**PG**	Explicación del tratamiento didáctico que en diferentes periodos se le dio a los procesos iterativos.
	▪ Algebraico (A)	- Ejemplos de problemas - Tipos de expresiones utilizadas - Conceptos involucrados	**PA**	
	▪ Numérico (N)	- Ejemplos de problemas - Tipos de expresiones utilizadas - Conceptos involucrados	**PN**	

Tabla 1. Categorías para el análisis de los libros históricos.

Resultados.

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.

Autor	Isaac Newton
Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor	1642/1643-1727.[9]
Título	*De analysi per eaquationes numero terminorum infinitas.*
Año, editorial y lugar de la primera edición.	1711, Ex officina Pearsoniana, Londres.
Año, editorial y lugar de la edición consultada	1711, Editado por SAEM THALES. RSME, España.
Localización del manual utilizado	Biblioteca General de la Universidad de Salamanca/Biblioteca personal.

Tabla 2. Ficha de referencia de la obra

El *De Analysi* como suele abreviarse, fue adquirido por William Jones en un lote de documentos de John Collins[10]. Jones (entonces presidente de la Royal Society) le pidió autorización a Newton para publicarlo, éste accedió e incluso le prestó el original para

[9] Nació el 24 de diciembre de 1642 y murió el 20 de marzo de 1727 según el calendario en uso en la época. Nació el 4 de enero de 1643 y murió el 31 de marzo de 1727 según el calendario gregoriano, el cual fue adoptado en Inglaterra hasta 1752.

[10] Copia manuscrita hecha por el mismo Collins.

cotejar con el manuscrito de Collins. También autorizó publicar otros tratados, como son fragmentos de cartas que atañen a la relación entre cuadraturas[11] y series infinitas, dos de estos fragmentos corresponden a la *Epistolae prior* y *posterior*[12], los tratados *De cuadratura curvarum, Enumeratio linearum tertii ordinis* y *Methodus differentialis* (aplicación del método de diferencias finitas de Newton), a todo el compendió le llamó de *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis,* es decir, *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.*

El *De Analysi* es el primer tratado sobre cálculo infinitesimal que Newton hizo público, fue redactado en junio de 1669 y apareció publicado hasta 1711[13]. El tratado contiene *el método general del análisis enseñando cómo resolver ecuaciones finitas en infinitas* para resolver problemas referentes a cuadraturas. Básicamente pueden distinguirse cinco secciones, en las que muestra tres reglas con las cuales fundamenta su cálculo, es decir, el método de cuadraturas. A continuación se muestran dichas reglas tomadas del original.[14] (Tabla 3)

Curvarum Simplicium Quadratura. REGULA I. *Si* $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Areæ ABD.* *Res Exemplo patebit.* 1. Si $x^2\ (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc eſt, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABD. A 2. Si	Cuadratura de Curvas Simples Regla 1. Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, será $\frac{a}{n+m}x^{\frac{m+n}{n}}$ = área ABD
Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus. REGULA II. *Si valor ipſius y ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*	Cuadratura a partir de las simples de las compuestas. Regla 2. *Si el valor de* y *se compone de varios términos de este género, compondráse el área, asimismo, de las áreas que dimanan de los términos singulares.*[15]
Aliarum Omnium Quadratura. REGULA III. ***Sin valor ipſius y, vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.***	Cuadratura de todas las demás. Regla 3. *Si no es que el valor de* y *o de alguno de sus términos sea más compuesto que los precedentes, que entonces ha de reducirse a términos más simples, operando en las letras de idéntico modo que en los números decimales los aritméticos dividen, extraen raíces o resuelven las ecuaciones afectadas, y de esos términos*

[11] Cuadratura es la acción y efecto de cuadrar una figura geométrica, esto es, consiste en construir un cuadrado de área igual a la figura geométrica de la que se quiere hallar el área. En el contexto actual en matemáticas, significa integración.
[12] Cartas en las que Newton exponía a Leibniz parte del contenido del *De Analysi* y del *De Methodis* sobre desarrollos en serie. Se creó una gran disputa entre ellos a causa de quién era el autor del cálculo.
[13] El libro *Logarithmotechnia* de Nicolás Mercator movió a Newton para redactar el *De Analysi*.
[14] Traducción al castellano de los autores.
[15] Con esta regla refiera a la linealidad de la Regla I.

	obtienes finalmente la superficie de la curva requerida mediante las reglas precedentes.

Tabla 3. Reglas para la cuadratura

La tercera regla expresa cómo reducir fracciones, raíces y raíces afectadas[16] de ecuaciones en series convergentes, cuando la cuadratura no se pueda resolver en otra forma y, usando la primera y segunda reglas, cuadrar la curva cuyas ordenadas son los términos de la serie.

Newton muestra ejemplos para encontrar la cuadratura de curvas dadas por una división, ejemplos para curvas que tienen por ecuación una raíz, y ejemplos mediante la resolución de las ecuaciones afectadas[17]. Estos últimos los subdivide en dos: *Resolución numeral de las ecuaciones afectadas* y *Resolución literal de ecuaciones afectadas*, en el primer tipo expone la aproximación sucesiva de la solución x de $f(x)$, y con el segundo expone la resolución de una ecuación $f(x,y)$ desarrollando y en serie de potencias de x y aplicando el método de aproximación que explica con el primer tipo. Mas adelante mostraremos un ejemplo del primer tipo de resolución, ya que allí Newton expone la resolución de ecuaciones por el método que hoy conocemos como método de Newton-Raphson[18], el cual consiste en la aproximación sucesiva de la solución x de $f(x)=0$ mediante las iteraciones $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.[19] El método es una mejora del publicado anteriormente por Viète[20] en 1600 y posteriormente simplificado por Oughtred en su *Clavis Mathematicae* de 1647.

El método fue utilizado mucho antes en la Babilonia antigua para la extracción de raíces cuadradas.[21] Posteriormente Newton volvió a usar el método para la realización de sus tablas de raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de los de los primeros 10,000 números. (Durán, 2003)

---

[16] Referente a una ecuación afectada. (Ver nota siguiente)

[17] Entenderemos por ecuaciones afectadas a aquellas a las que Newton aplicará el procedimiento para la determinación aproximada de las raíces de una ecuación, de tal forma que las reduce a una sucesión infinita.

[18] El método de Newton apareció publicado por primera vez en los *Principia* donde el escolio de la proposición XXXI del libro I explica cómo aplicarlo a la ecuación de Kepler $y - eseny - N = 0$.

[19] El antecedente más antiguo se remonta al matemático árabe Al-Kashi (¿?-1429) quien usó un esquema parecido para resolver la ecuación cúbica $a = 3x - 4x^3$, el interés por la resolución proviene de que para $a = sen3\alpha$ la ecuación corresponde a la fórmula del ángulo triple. (Aaboe, 1954) Estos cómputos los redescubrió Henry Briggs (1561-1630) en su *Trigonometría Británica* que los extendió para la fórmula del ángulo quíntuple. Posteriormente fue aplicado por Viète y Oughtred. (Whiteside, 1967)

[20] Viète (1540-1603) llamado "el matemático francés más importante del siglo XVI" fue también abogado, miembro del Parlamento y consejero particular del rey Enrique IV de Francia, pero dedicaba sus horas libres a las matemáticas. Viète fue quien empezó a utilizar vocales para representar las incógnitas, y a las consonantes para representar magnitudes o números dados o supuestamente conocidos como los parámetros.

[21] Para detalles ver Cantoral y Reséndiz (2001); Cantoral y Rodríguez (2005)

> "Sean A el número y B su raíz cuadrada, cúbica o cuarta extraída por logaritmos hasta 5 decimales, entonces $\frac{1}{2}\left(B+\frac{A}{B}\right)$, $\frac{1}{3}\left(2B+\frac{A}{B^2}\right)$ y $\frac{1}{4}\left(3B+\frac{A}{B^3}\right)$ será la aproximación deseada para la raíz cuadrada, cúbica o cuarta respectivamente."

Como hemos dicho, en la sección que Newton denomina "Numeralis æquationum affectarum resolutio" (Resolución *numeral* de ecuaciones afectadas) se expone un ejemplo en el que se aplica el método para encontrar numéricamente la mejor aproximación a la raíz real de la ecuación. Inicia la sección con un fragmento en el que parece comunicarnos que hay ejemplos que ya no podrían ser abordados de una manera aritmética,

> "Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo"

que significa: Pues toda dificultad reside en la resolución, ilustraré primeramente el modo que uso en una ecuación numeral.
A continuación exponemos el ejemplo que muestra en dicha sección:

Ejemplo 1. Sea la ecuación a resolver

$$y^3 - 2y - 5 = 0 \qquad \text{(a)}$$

La tabla 4 muestra resumidamente su procedimiento[22]:

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+0{,}06 + 1{,}2 + 6{,}0$ $+1, + 10,$ $-1,$
	Summa	$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$	$+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$+0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$ $-0{,}060642 + 11{,}23$ $+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$
$-0{,}00004854 + s = r$		

Tabla 4. Método de aproximación de Newton.

De forma desarrollada, el procedimiento se traduce en lo siguiente:
Sea 2 un número que difiere en menos que su décima parte de la raíz buscada[23], es decir, 2 es la mejor aproximación entera a la raíz buscada, ya que la diferencia entre la raíz verdadera y 2 es menor o igual que 0,1.

[22] Tomada del original.

Se hace una mejor aproximación a la raíz buscada y, es decir, se supone $2+p=y$, y se sustituye esta nueva corrección en la ecuación (a),

$$y^3-2y-5=0$$
$$\to (2+p)^3-2(2+p)-5=0$$
$$\to 8+12p+6p^2+p^3-4-2p-5=0$$
$$\to p^3+6p^2+10p-1=0$$

Con lo cual resulta la nueva ecuación,

$$p^3+6p^2+10p-1=0 \qquad \text{(a')}$$

cuya raíz p se requiere extraer a fin de añadir a la primera aproximación 2. Concretamente, como hemos dicho que p debe ser menor o igual a 0,1, en la ecuación (a') se desprecian los términos p^3+6p^2 por su menudencia, de donde se obtiene que $10p-1=0$, o lo que es igual $p=0{,}1$, que se acerca a la raíz verdadera p. Ahora para obtener una mejor aproximación a la raíz p, se supone ésta como $0{,}1+q=p$, y como antes, se sustituye en (a'), esto es,

$$p^3+6p^2+10p-1=0$$
$$\to (0{,}1+q)^3+6(0{,}1+q)^2+10(0{,}1+q)-1=0$$
$$\to 0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3+0{,}06+1{,}2q+6q^2+1+10q-1=0$$
$$\to q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$$

de donde aparece la ecuación,

$$q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0. \qquad \text{(a'')}$$

Y por la misma razón que antes, se considera sólo $11{,}23q+0{,}061$, que se acerca mucho a la verdad, o lo que es igual, q sea casi $=-0{,}0054$ (dividiendo hasta que se obtengan tantas figuras[24] cuantos lugares distan la primera figura de éste y la del cociente principal $\frac{0{,}061}{11{,}23}$), se escribe $-0{,}0054$, ya que es negativa.

Se supone ahora una mejor aproximación para q, $-0{,}0054+r=q$, y se sustituye en la ecuación (a''). Y así sucesivamente hasta donde se quiera. De la misma forma, si se desea continuar la operación hasta dos veces tantas figuras cuantas aparecen ya en el cociente menos una (es decir 9 cifras numéricas), se sustituye q por $-0{,}0054+r$ en la ecuación $6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061$ cuyo término primero (q^3) se desprecia a causa de su menudencia: y resulta la ecuación $6{,}3r^2+11{,}16196r+0{,}000541708=0$, de donde

[23] En efecto, el polinomio tiene un cambio de signo entre 2 y 2,1. La localización de raíces de polinomios por cambio de signo había sido sistematizado por Stevin en 1594, sin embargo, fue hasta principios del siglo XIX cuando esta sistematización en la búsqueda de raíces de ecuaciones por cambio de signo fue demostrada analíticamente. La demostración fue obra de Bolzano, que probó el resultado para funciones continuas y tuvo entonces que definir que se entendía por continuidad. (Durán, 2003)

[24] Era común en los textos castellanos de matemáticas del renacimiento, el barroco y la ilustración utilizar la expresión *figura* para indicar las cifras.

despreciando también $6{,}3r^2$, se obtiene $r = -\frac{0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853$ poco más o menos. Y finalmente se sustraen las partes negativas de las positivas de los cocientes que se han obtenido, esto es:

Cocientes positivos: $2 + 0{,}1 = 2{,}1$

Cocientes negativos: $-0{,}0054 + (-0{,}00004853) = -0{,}0054853$

Raíz buscada: $2{,}1 - 0{,}0054853 = 2{,}09455147$

Por lo tanto se obtiene el cociente buscado $2{,}09455147$.

Como puede observarse las iteraciones hechas, manifiestan el método de Newton: sustituyendo en la ecuación $f(x) = 0$, el valor x de la raíz por la aproximación $x + p$, de manera que $f(x + p) = 0$, luego desarrollando en potencias de p: $f(x + p) = f(x) + f'(x)p + \frac{f''(x)p^2}{2!} + \ldots$, y eliminando las potencias $p^2, p^3, \ldots$, resulta

$0 = f(x) + f'(x)p$, de donde, $p = -\frac{f(x)}{f'(x)}$.

De aquí que se obtiene la fórmula de recurrencia actualmente conocida para la aplicación del método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Es de gran importancia señalar que no hay evidencia geométrica de x_{n+1} como punto de corte con el eje de las abscisas de la tangente a $y = f(x)$ en $x = x_n$.

En seguida del ejemplo refiere el siguiente párrafo:

> "Æquationes plurium dimensionum nihilo fecius resolvuntur, & operam fut fine, ut hic factum fuit lavabis, fi primos ejus terminos gradatim omiferis"

Lo que significa que, ecuaciones de diversas dimensiones pueden ser resueltas de modo que se puede utilizar el mismo método, operando hasta el final para encontrar una solución, si en cada paso se omite el primero de sus términos.

Es importante mencionar que en el escrito no hay justificación de la convergencia a la raíz buscada, asimismo Newton es consciente de que el método podría fallar y lo evidencia desde el principio del tratado:

> *"Methodum generalem, quam de curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſuranda, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam potius quam accurate demonſtratam habes."*

Con esto aclara que lo escrito en el *De Analysi* está brevemente explicado antes que demostrado con toda diligencia, y que expone un método general que cavilará un día para medir la cantidad de las curvas mediante una serie de términos infinitos.

Lo anterior puede deberse a que en efecto los matemáticos de este siglo (y también en el siglo XVIII y parte del XIX) estaban interesados, sobre todo en descubrir y no tanto en demostrar sus hallazgos en forma impecablemente lógica, como lo hacían los griegos. De aquí que Newton estuviera más interesado por descubrir que por demostrar. En el mismo sentido la frase:

> "Præterea notandum est quod in hoc exemplo, fi dubitarem an $0{,}1 = p$ veritati fatis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxiffem $6p^2 + 10p - 1 = 0$ & ejus radicis primam figuram in Quotiente fcripfiffem…"

en la opinión de Cajori (1960), refleja que Newton era consciente de que su método podía fallar. Siendo esto una constatación más de que el interés de los matemáticos de la época se inclinaban más por el descubrimiento que por la fundamentación rigurosa de lo descubierto.

Cabe mencionar que Newton no sabía si existían antecedentes del método en el sentido que aquí aplica, por lo que quizá sea esta una de las razones por las que se le dio el crédito total. En relación a esto menciona:

> "Hæc Methodus resolvendi Æquationes pervulgata an sit nefcio, certe mihi videtur præ reliquis simples, & usui accommodata. Demonstratio ejes ex ipso modo operando patet, unde cum opus sit, in memoriam facile revocatur"

Lo que podría significar que ignoraba si el método había sido divulgado, que le parecía un método muy simple y de uso cómodo. Que la demostración es similar a la forma de operar el método y por lo tanto que es fácil de recordar cuando es necesario.

Newton hace referencia a que el método se aplica casi con igual facilidad a ecuaciones en las que falte alguno o ninguno de sus términos. Ya que la ecuación inicial podría descomponerse en otra ecuación realizando sustituciones de cantidades[25] por otras, plantea que ello puede hacerse diversamente y que el siguiente modo (ejemplo siguiente) es el más expedito.

Ejemplo 2. Sustitución de unas cantidades por otras.
Sea $p + 3$, que ha de sustituir a y en la ecuación

$$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Como quiera ésta puede resolverse en esta forma $\overline{\overline{\overline{y - 4} \times y + 5} \times y - 12} \times y + 17 = 0$,[26] o lo que es igual, en términos actuales la ecuación (b) puede agruparse en la forma,

$$(((y-4)y+5)y-12)y+17=0. \qquad \text{(b')}$$

Lo que hace Newton es realizar la sustitución $p + 3$ iniciando por la agrupación $(y - 4)y$, esto es,

[25] Newton utiliza el término cantidad en dos sentidos: cantidades fijas y cantidades que varían, que en términos actuales serían constantes y variables, sin embargo, en el *De Analysi* Newton todavía no usó dichos términos.

[26] Los superrayados indican paréntesis, fue Van Schooten quien difundió el uso de los superrayados para indicar lo que quedaba afectado por la correspondiente operación. Euler (1707-1783) con el uso habitual de los paréntesis contribuyó finalmente a su implantación. La expresión en forma actual equivale a $(((y-4)y+5)y-12)y+17=0.$ (Durán, 2003)

$$\begin{aligned}(y-4)y &= (p+3-4)(p+3)\\ &= (p-1)(p+3)\\ &= p^2+2p-3\end{aligned}$$

a continuación (b') indica que hay que sumar 5 a esta última ecuación,

$$\begin{aligned}((y-4)y+5) &= p^2+2p-3+5\\ &= p^2+2p+2\end{aligned}$$

y a esta última ecuación hay que multiplicar por y, o sea por $p+3$,

$$\begin{aligned}((y-4)y+5)y &= (p^2+2p+2)(p+3)\\ &= p^3+2p^2+2p+3p^2+6p+6\\ &= p^3+5p^2+8p+6\end{aligned}$$

luego hay que restar 12

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12) &= p^3+5p^2+8p+6-12\\ &= p^3+5p^2+8p-6\end{aligned}$$

como puede verse (b') indica que hay que multiplicar por $y=p+3$, esto es,

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12)y &= (p^3+5p^2+8p-6)(p+3)\\ &= p^4+5p^3+8p^2-6p+3p^3+15p^2+24p-18\\ &= p^4+8p^3+23p^2+18p-18\end{aligned}$$

Finalmente hay que sumar 17 a la última ecuación obtenida,

$$\begin{aligned}(((y-4)y+5)y-12)y-17 &= p^4+8p^3+23p^2+18p-18+17\\ &= p^4+8p^3+23p^2+18p-1\end{aligned}$$

Así obtenemos que la nueva ecuación a resolver es $p^4+8p^3+23p^2+18p-1$.

Hemos observado entonces cómo aplica el método numéricamente, es decir, se ha hallado una aproximación numérica de la raíz real de una ecuación de una variable.
Finalmente para dar una visión general de la evolución del método de Newton mencionamos un breve recorrido por la historia: Joseph Raphson consideró al igual que Newton sólo polinomios en su *Análysis aequationum universalis* de 1690, pero con un enfoque más iterativo, de allí el método actual; Simpson publicó en 1740 una versión generalizada donde por primera vez aparecía reconocida implícitamente la representación de la derivada de la función en el método; A principios del siglo XIX Joseph Fourier presentó el método en términos de la ahora universal notación $f'(x)$, describiéndolo como 'le méthode newtonienne' (1831); Lagrange trabajó el método solamente en términos algebraicos; En Alemania, Runge dio el método en forma Leibnizciana, atribuyéndole el mérito a Newton (1900); Moritz Cantor estudió los métodos de aproximación de Newton, Raphson, Halley y de Lagny, describiendo a Raphson 'un absoluto admirador e imitador de Newton' (1898).
Como puede observarse hay varias reseñas sobre el método de aproximación por lo que hubo demasiada polémica en su génesis.

Conclusiones

Dos características de los métodos de aproximación para la resolución de ecuaciones que se han mostrado en este documento es la *repetición* en el proceso de operar sus cálculos y asimismo puede observarse que son de carácter *mecánico*.
Respecto a los objetivos que nos hemos planteado, hemos vislumbrado que en esencia el método que nos muestra Newton es puramente geométrico, aunque la tabla 1 muestra operaciones algebraicas, en realidad los problemas que Newton intentaba resolver son de orden geométrico, en la mayoría se referían a encontrar áreas bajo curvas, y esto se remonta a Arquímedes, estos problemas en la época de Newton se volvieron importantes, debido a que las curvas eran utilizadas para representar las magnitudes de velocidad en el tiempo. El área bajo una curva representaba entonces el cambio total en cuanto a posición. Dennis y Confrey (2000) mencionan que la geometría era considerada como la principal representación en matemáticas en el siglo XVII. La aritmética y el álgebra eran consideradas, como las formas de lenguaje escrito para la discusión de la verdad geométrica.
En el desarrollo mismo del escrito, se ha dado una visión epistemológica y socio-cultural del método de Newton, sin embargo, queremos mencionar unas últimas observaciones: Kollerstrom (1992) señala que cuando Raphson anunció el método a la Royal Society en 1690 hubo énfasis en su naturaleza innovadora, y refirió a Newton en su prefacio, declarando que su método era similar al descrito anteriormente por Newton, pero cuando publicó el método como un libro prefirió quitar el prefacio, y refirió únicamente a Viète como el antecesor de su método. Raphson también refirió a Oughtred y Harriot e hizo mencion sólo al Teorema binomial de Newton. Esto refleja que de alguna manera Raphson temía ser acusado de plagio por los miembros de la Royal Society. También menciona que en 1740 Simpson escribió ‘A new method for the solution of equations’ no haciendo referencia a algún predecesor y afirmando lo siguiente: “as it is more general than any hitherto given, it cannot but be considerable use”. Abiertamente dijo: “Take the fluxion of the given equation…”, de lo cual se procede a una versión de la regla que refleja el método de Newton, es decir, de la fórmula $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ donde $x = \alpha$ es una aproximación a la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y $f'(x)$ es la derivada de la función en la cual ha sido sustituida α. Así esta versión de la que se habla, usa fluxiones en su procedimiento. Sus instrucciones fueron: ‘…and having divided the whole by $\dot{x}$, let the quotient be represented by A’[27] De esta manera aplicó fluxiones al método de aproximación.
En el siglo XVIII hubo un debate sobre cuál método era preferible, Newton o Raphson, Frend (1796) menciona que con respecto a la simplicidad y concepción de los dos métodos se observa que el método de Raphson es preferible al de Newton, ya que el primero siempre regresa a la ecuación original, mientras que el segundo requiere una ecuación transformada la cual tiene más términos y coeficientes que la original.
Joseph Louis Lagrange discutió el método en su *Résolution des équations numériques* de 1798, concibiéndolo sin referencia a fluxiones o diferenciales. Al respecto del método de

[27] La expresión diferencial $\frac{dy}{dx}$ era a lo que se refería Simpson con ‘A’.

Newton señaló: primero, su falla para encontrar una raíz conmensurable en términos finitos; segundo, la inseguridad del proceso el cual deja duda de la exactitud de cada corrección en la nueva aproximación y; por último, la falla del método en el caso de una ecuación con raíces casi iguales. Desde el periodo de Lagrange, las contribuciones más importantes al análisis de ecuaciones numéricas, en suma a la mejora de Horner de los métodos de aproximación de Viète y de Newton, son las hechas por Fourier (1768-1830), Budan (1761-1840) y Sturm (1803-1855). Las investigaciones de Budan fueron publicadas en 1807, las de Fourier en 1831 (después de su muerte) y las de Sturm en 1835.
Isaac Newton asimiló lo esencial del conocimiento matemático de tal forma que fue capaz de resolver problemas que cambiarían completamente la faz del análisis en particular y de la matemática en general. Descubrió la joya suprema del cálculo: la derivación y la integración. (Sánchez, 2003)
Finalmente cabe mencionar que el trabajo histórico sirve para informarnos sobre el presente, pues muchas de nuestras suposiciones actuales salen a la luz del trabajo histórico. Los resultados matemáticos son presentados a los estudiantes como un objeto terminado, sin embargo, podemos realizar cambios consustánciales a través de esta forma de investigación.

Reconocimientos

Agradecemos el apoyo del programa ALβAN, programa de becas de alto nivel de la Unión Europea para América Latina, por el suministro de recursos para esta investigación.

Referencias Bibliográficas

Aaboe, A. (1954) Al-Kāshi's iteration method for the determination of sin 1°. *Scripta Math*. 20, 24-29.
Burnside, W. y Panton, A. (1918) *The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms.*8a. Ed. Dublin University Press Series.
Cajori, F. (1960) *A history of mathematics.* Chelsea publishing company, -Chicago.
Cantoral, R. et al. (2000) *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas, 1ª reimpresión.
Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2001). *Aproximaciones Sucesivas y Sucesiones. México: Grupo Editorial Iberoamérica.*
Cantoral, R. y Rodríguez, F. (2005). *Recursividad, convergencia y visualización. México:* Serie cuadernos didácticos. Edición especial Casio.
Dennis, D. y Confrey, J. (2000) La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Relime*, 3, 5-31.
Durán. J. A. (2003). Newton y el Análisis. *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* Facsímile del libro Newton (1711). LXIX – CLXXVIII.
Frend, W. (1796) *The principles of algebra.* London. p. 456.
González, M. T. (2002) *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.
Kollerstrom, N. (1992). Thomas Simpson and method of approximation. *British Journal of the History of Science,* 25, 347 – 354.

Newton, I. (1711). *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Facsímile 2003. Editado por Antonio, J. Durán Guardeño y Francisco Javier Pérez Hernández. Real Sociedad Matemática Española.

Pajus, M. (2000). On the benefits of introducing undergraduates to the history of mathematics – A french perspective in Katz, V. (2000) *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective.* Mathematical Asociation of America. 17 – 25.

Ruiz, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación en *Revista Española de Pedagogía* 34 (134). 449 – 475.

Sanchéz, J. M. (2003) Newton: el grande entre los grandes. *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* Facsímile del libro Newton (1711). VII – L.

Sierra, M. (1989) Dos ejemplos de investigación histórica en Educación Matemática y su didáctica en las Escuelas de Magisterio (1940-1983) y Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (1958-1973). *Conferencia a las jornadas de Profesores de Didáctica de las Matemáticas de las escuelas de Magisterio de Andalucía*, Junio 1989., España.

Sierra, M., González, M.T. Y López, M del C. (2002) Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno Revista de Didáctica de la Matemática* 29, 77 – 94.

Whiteside, D. T. (1967) *The mathematical papers of Isaac Newton.* Tomo I. Cambridge University Press, Cambridge.