

EL PAPEL DE LA LINEALIDAD COMO UNA NOCIÓN ARTICULADORA EN LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

acostah@uaeh.reduaeh.mx, rondero@uaeh.reduaeh.mx, anataras@uaeh.edu.mx

Resumen. *La conceptualización de la linealidad no está articulada en asignaturas de matemáticas que se imparten en los diferentes niveles educativos. Esta investigación está en desarrollo y su objetivo central es el de hacer un estudio epistemológico, cognitivo y sociocultural de la noción de linealidad. Se reportan algunos avances acerca de la génesis y desarrollo de la noción, lo que está permitiendo mostrar su relevancia articuladora en la didáctica de la matemática. A través de un análisis histórico y epistemológico, que se viene realizando, se tienen evidencias de la filiación que hay entre la proporcionalidad directa, y la linealidad, lo que se manifiesta en los conceptos de función lineal, sistemas de ecuaciones lineales, hasta la misma definición de mapeo lineal. En la parte experimental se reporta el análisis de una entrevista con estudiantes de licenciatura, diseñada para buscar vínculos conceptuales entre la proporcionalidad y la linealidad.*

Palabras clave: Linealidad, Epistemología, Cognición, Sociocultural

Introducción

La linealidad es una noción empleada por muchos individuos en lo cotidiano, aunque en ocasiones no se perciba con tal denominación. En el ámbito no escolar, hay ejemplos donde dicha noción está presente, como en el cálculo que hace una persona del interés simple de un capital invertido o del pago de una deuda contraída, por el préstamo de un monto de dinero. Como parte de los saberes escolarizados, la linealidad aparece desde la proporcionalidad directa, hasta el Álgebra lineal. Posteriormente la noción aparece en aspectos especializados como la modelación de un sistema a través de la Programación

Lineal, mediante el cual se buscan las mejores decisiones, al optimizar una función objetivo con restricciones, ambas lineales.

Las actividades humanas influyen en las concepciones de los individuos, de tal manera que al llegar a los ambientes escolares, donde se abordan los conceptos matemáticos, éstos son permeados por el significado original que se había instalado con anterioridad. Esto es, la linealidad es preconcebida a partir de las experiencias cotidianas de hechos simples que se expresan en lenguaje coloquial como “el camino es recto”, “no te pases de la raya”, las cuales son llevadas a la escuela donde el estudiante descubre que se pueden resolver problemas con la proporción directa y que la recta tiene una ecuación, pero el discurso escolar tradicional no articula estos dos conceptos. Vale la pena resaltar que por medio de un análisis histórico y epistemológico, que se está desarrollando, se han recabado evidencias acerca de la estrecha vinculación conceptual que existe entre la proporcionalidad directa, y la linealidad, vinculación que se muestra también en los conceptos de función lineal, sistemas de ecuaciones lineales, hasta las misma definición de mapeo lineal o transformación lineal.

En lo relativo al aspecto sociocultural, se resalta que los individuos tienen concepciones intuitivas acerca de la recta, las cuales ya en el ámbito escolar requieren su matematización como función lineal, transformando los significados previos. Ahora bien en lo que se refiere al discurso escolar, tanto en los libros de texto en que se apoya la enseñanza como las explicaciones que brinda un docente en la escuela, a menudo parte de experiencias cotidianas para explicar un fenómeno lineal. Tal es el caso cuando se estudia el movimiento rectilíneo uniforme, en el que se postula la proporción directa a través de, “distancias iguales en tiempos iguales”, lo que manifiesta una razón de cambio constante, que no es otra cosa que la velocidad. Esto es, la trayectoria que describe el móvil es una línea recta.

El propósito de esta investigación es analizar los aspectos epistemológicos y cognitivos que le dan resignificación a la noción de linealidad. Es a través de la articulación de saberes que se buscan explicitar las relaciones conceptuales de la linealidad en el curriculum escolar. Adicionalmente se muestran algunos avances de aspectos cognitivos que presentan cuatro

estudiantes de licenciatura, entrevistados en conjunto. Además se dan evidencias acerca del desarrollo de la noción en distintos momentos históricos. Los resultados de las perspectivas anteriores darán elementos para incidir en la didáctica.

Metodología

Se han considerado dos vertientes, una encaminada al análisis de las ideas de la noción de linealidad a partir de diversas fuentes, como son libros de Historia de las Matemáticas y otros referidos a las obras de pensadores clásicos, como Eudoxo y Arquímedes, entre otros. En dicho análisis se resalta que desde la antigüedad ha habido la necesidad del cálculo de intereses e impuestos, a partir de la expresión del interés simple, la cual es una forma de la linealidad (Struik, 1986). La otra vertiente es la del análisis de los textos escolares antiguos y contemporáneos, a partir del cual ha sido necesario identificar momentos y autores significativos que han contribuido a la evolución de la noción misma. Esto ha posibilitado realizar un rescate epistemológico de la linealidad, haciendo un recorrido discreto, desde la proporcionalidad directa, estudiada en la matemática elemental, hasta conceptos de mapeo lineal, transformación lineal y espacio vectorial en el Álgebra Lineal. Para ello se han tomado elementos de la metodología de Schubring (Camacho, 2000), el cual esencialmente, desde una perspectiva holística, propone un estudio de textos antiguos y de planes y programas, realizando una contrastación de estos elementos.

Por otra parte, dada la naturaleza de este estudio, se ha empleado la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), por ser una metodología de investigación cualitativa. En la primera fase, el análisis preliminar, se ha realizado parte del estudio epistemológico, ya citado antes; y se tienen elementos de carácter cognitivo a partir de artículos de investigación referidos a la noción de linealidad, desde la perspectiva de la proporción directa. En este análisis del estado del arte, se muestra que la noción de linealidad, en su versión como función lineal de la forma $y = mx$ con $x \in R$, tiene un vínculo conceptual con la proporción directa $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

En Singh (2000), se resalta la importancia del razonamiento multiplicativo al abordar la

proporcionalidad. Además dice que el problema de la enseñanza del razonamiento multiplicativo está compuesto por las maneras en que enseñamos las proporciones en la escuela, y que se requiere investigar cómo los esquemas de unidades compuestas de la estructura multiplicativa de los niños, pueden desarrollarse a través del pensamiento proporcional. En otra investigación (De Bock, et. al., 1998) se afirma que el tema más importante en educación matemática elemental es el correspondiente a las relaciones lineales o directamente proporcionales. Además señalan que

“Debido a la gran aplicabilidad para el entendimiento de problemas en matemáticas y ciencias, el modelo lineal (o proporcional) es un concepto clave en educación primaria y secundaria” (Traducción libre de De Bock, et. al., 1998).

En esta investigación se muestra la relevancia del modelo lineal, debido a que subyace como elemento básico de una gran cantidad de problemas que se estudian en matemáticas escolares. Es de resaltarse que algunos estudiantes crecen con la idea que estos modelos tienen una aplicabilidad universal y adquieren la propensión a considerar cualquier relación numérica como si fuera lineal. Los resultados arrojan una fuerte presencia del modelo lineal en las respuestas de los estudiantes a los problemas de aplicación involucrando longitud y área de figuras planas, presentados en contextos escolares. Pero a pesar de que el modelo lineal no tiene aplicación universal, sí es de resaltarse que la instalación adecuada de dicha noción desde educación elemental, es elemento importante para la articulación de conceptos, tanto en bachillerato, como en el nivel superior.

En relación con las concepciones que, desde los usos cotidianos, han edificado personas de escasa o nula escolaridad a partir de su experiencia en problemas donde, entre otros conceptos, se involucran a la proporcionalidad, Ávila (Ávila, et. al., 1995) reporta que

“[...] las personas han construido estrategias para resolver problemas donde la proporcionalidad directa está implicada. Estos problemas, comúnmente conocidos como de regla de tres, generan respuestas matemáticas por parte de todos los sujetos con quienes trabajamos. [...] En todos los casos, las

estrategias de resolución son diferentes a las escolarizadas. [...] imponen una revisión profunda al curriculum de matemáticas.” (Ávila, et. al., 1995)

En este estudio, el aspecto sociocultural de la proporcionalidad directa, juega un papel preponderante en las concepciones de personas de baja escolaridad, ya que las mismas pueden resolver problemas en forma distinta a las escolares. Los datos que obtuvieron estos investigadores, se recolectaron mediante entrevistas individuales bajo la técnica del interrogatorio crítico. En cuanto al manejo de la proporcionalidad directa, se le considera relevante por los usuarios de la educación básica de adultos, como lo refiere De Lella (1988) (Citado en Ávila, et. al., 1995),

“Tal conocimiento, en efecto, es indispensable para una interacción adecuada con el entorno laboral y comercial. Sus aplicaciones son innumerables y están presentes en todos los sectores de la actividad humana (Dupuis y Pluvinage, 1981; Soto y Rouche, 1995). Asimismo, y de acuerdo con diversos investigadores [...] Lesh, Post y Behr, 1988) la proporcionalidad es la culminación de la matemática elemental y la piedra angular de toda la matemática que vendrá después.” (Ávila, et. al., 1995)

Tomando como referencia los resultados de las investigaciones antes aludidas, es posible resaltar que la proporcionalidad es un elemento de vínculo entre la matemática elemental y la matemática avanzada, pero su característica como elemento articulador se ha descuidado en la didáctica, al no explicitarse los puentes conceptuales en la construcción de saberes que conlleven a un entendimiento más amplio acerca de la linealidad.

Por lo que respecta al análisis a priori, en el aspecto epistemológico de la *noción de linealidad*, hay evidencias de ella en el concepto de proporción, como lo plantea Gómez (1999) al reportar que en la historia vista a través de los libros de texto, la enseñanza de la proporcionalidad ha tenido cambios metodológicos, vinculados a tres grandes periodos. El primero considerado a finales del siglo XVIII, donde los libros de aritmética, ubican a la proporcionalidad a partir de la comparación de números, a través del estudio de las razones y progresiones, lo que derivó en varias reglas con motivos prácticos, como la de:

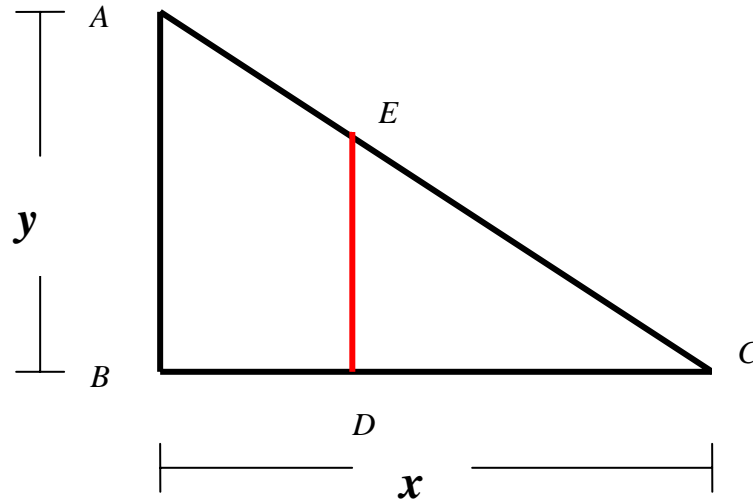
tres; compañías (reparto del beneficio; la falsa posición (usar números arbitrarios para encontrar el verdadero); entre otras. En el segundo periodo, ubicado en el siglo XIX, cambia el tratamiento de la proporcionalidad al incorporar planteamientos generales del álgebra. Se considera que una proporción es una igualdad y los problemas de proporciones se reducen a la solución de ecuaciones. El tema de la proporcionalidad se organiza en torno al estudio de “cantidades que varían en la misma razón”, lo que más tarde se denominan magnitudes proporcionales. El tercer periodo que considera Gómez (1999) en cuanto a la enseñanza de la proporcionalidad por medio de textos, está datado en el siglo XX, en donde este tema se ubica en los libros escolares de nivel superior y sus representaciones principalmente se expresan como: frases, formas tabulares, gráficas, así como expresiones algebraicas y aritméticas.

Resultados y Discusión

Con apego a la Ingeniería Didáctica, como sustento metodológico de esta investigación, dentro del Análisis Preliminar, se llevó a cabo una entrevista en dos etapas, en la cual participaron cuatro estudiantes de licenciatura y dos entrevistadores. Se dio un debate colectivo, con la finalidad de enfrentar a los estudiantes, a un problema que permitiera analizar algunas de sus estrategias y concepciones en relación con la noción de linealidad. El diseño de esta actividad estuvo enmarcada a partir de temas como: razones y proporciones; semejanza de triángulos; razones trigonométricas, pendiente, recta y función lineal.

Se planteó el siguiente problema.

Sean los triángulos ABC y EDC , considerando que $DC = 4$ y el segmento DE paralelo a AB ¿Cuánto mide DE ?



El problema se planteó en un escenario geométrico, en el cual se esperaba que los estudiantes emplearan en la resolución, propiedades acerca de la semejanza de triángulos y plasmaran la igualdad de las dos razones entre los lados de ambos triángulos.

En el primer intento de solución, Iván ubicó el vértice B del triángulo ABC, con el origen del sistema cartesiano, sin llegar descubrir alguna proporción. Puede considerarse que su proceder fue de esa manera, porque el escenario de los eje cartesianos están dentro de su uso inmediato y cotidiano, reforzado por lo explícito de x e y en la figura. Por su parte Javier, identifica dos triángulos, sin hacer referencia explícita a su semejanza y manifiesta que el ángulo ACB es el mismo que el ángulo ECD , llamándole θ . Obtiene la tangente trigonométrica de ambos triángulos, igualando las dos razones:

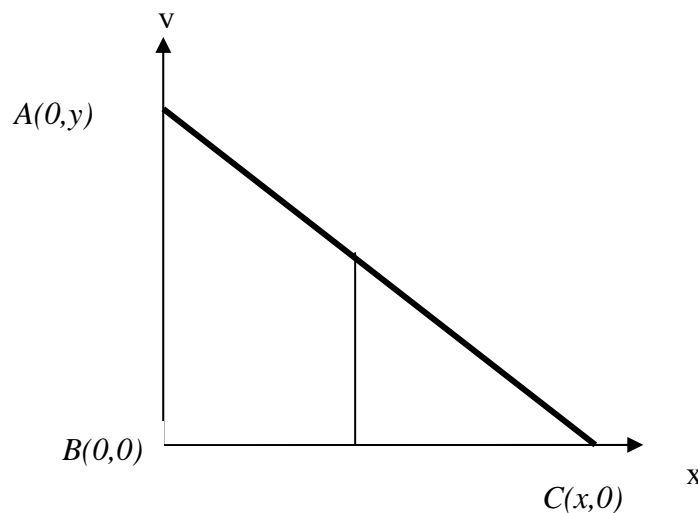
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \tan \theta &= \frac{DE}{4} \end{aligned} \quad \text{las iguala} \quad \frac{y}{x} = \frac{DE}{4}.$$

Aunque él no le llama proporción, igualando las razones y despejando DE llega al resultado pedido. Pareciera que aún no identifica a la proporción, ya que está empleando recursos de la Trigonometría.

Dado que hasta ese momento en los argumentos no aparece la idea de proporción, los entrevistadores tratan de llevar al grupo al escenario, sólo de semejanza de triángulos, al preguntar *¿Alguien estaría pensando en proporcionalidad? En otras palabras si no ponemos en juego a \square , ¿habría otra manera de llegar a la misma relación?* A lo que Javier responde, que se pueden usar las razones y proporciones ya que se basan en el mismo ángulo y que la semejanza de triángulos se basa en lo mismo; además menciona que para que haya semejanza, los ángulos deben ser iguales o los lados proporcionales, por lo que escribe:

$$\frac{y}{x} = \frac{DE}{4}$$

Al reconsiderar el primer intento, que había sido abandonado, por parte de Iván de anclar los triángulos a un sistema cartesiano. Con el propósito de desequilibrar cognitivamente a los participantes, se pregunta *¿qué característica verían aquí? (se señala las hipotenusas de los triángulos semejantes) ¿habrá alguna relación con alguna de las características de la recta?* A lo que Javier identifica, que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(0, A)$ y $(C, 0)$ fijando el origen en B , es $\frac{y}{x}$ y además negativa.



En ese momento se les llevó a reflexionar sobre algún concepto que enlace: semejanza, proporcionalidad, recta y pendiente. Se esperaba que surgiera el término linealidad, pero a

pesar de que no lo manifiestan explícitamente, sí se muestran indicios acerca de la *constatificación* de una magnitud; esto se mira cuando los estudiantes identifican cantidades constantes. En este caso, la primera que aparece como tal, es el ángulo común a ambos triángulos, después la igualdad de las razones entre los lados proporcionales de los triángulos y al final la pendiente de la recta, que en sistema coordinado asociado, surge de la prolongación de la hipotenusa.

Al continuar con la tónica de propiciar el desequilibrio cognitivo, se preguntó *Cuando se trabaja con pendiente y recta, ¿ustedes ven alguna relación de proporcionalidad?* A lo que Iván, responde dibujando triángulos de diferentes tamaños, cuyas hipotenusas están a lo largo de una recta sobre el plano cartesiano, arguyendo que esos triángulos tienen la misma tangente trigonométrica, vista como una razón de catetos, sin que se explicita en su argumento la proporcionalidad, ni la semejanza de triángulos. Por otra parte, se les lleva a reflexionar acerca de la inclusión de la proporcionalidad en la pendiente de la recta, al preguntar *¿Qué característica tiene la recta en relación a su pendiente?* O dicho de otro modo, *¿qué caracteriza a una recta?* Iván, dice que la proporcionalidad está dada por la relación de la altura respecto a la base y que la pendiente de una recta es la misma en todos sus puntos.

Posteriormente, al final de la entrevista, se mencionó en consenso, que la semejanza y proporcionalidad, como entes geométricos, se transforman en algo analítico, como es la función lineal en \mathbb{R}^2 ; aunque en un principio de la discusión, los estudiantes no los relacionaron de manera directa.

Discusión

Bajo la perspectiva cognitiva, donde su esencia es la búsqueda de elementos que permitan analizar cómo se percibe la linealidad por parte de los sujetos cognoscentes, se analizaron algunos reportes de investigación que dan cuenta de ello, además de la propia experimentación de esta investigación, diseñada con la finalidad de identificar las concepciones que tienen los estudiantes sobre la misma noción.

La entrevista se centró en la discusión del tránsito conceptual entre la proporcionalidad y la linealidad. La intención fue provocar, a través de preguntas pertinentes, desequilibrios cognitivos con los cuales los estudiantes pudieron construir puentes conceptuales entre la semejanza de triángulos, proporción directa, recta y pendiente. En particular los estudiantes descubrieron el término linealidad, aún cuando no lo manifestaron en forma explícita, sí hubo un acuerdo en la relevancia de la constantificación de una magnitud, la cual fue provocada por la dinámica de la discusión, al identificar en el proceso cantidades constantes, como el ángulo, la igualdad de dos razones y la pendiente de la recta.

Partiendo de una perspectiva epistemológica se muestran algunas evidencias de cómo desde la antigüedad aparece la noción de linealidad en los trabajos de Euclides, y Arquímedes, entre otros. La base de sus aportaciones son las razones y proporciones, las cuales, desde nuestra percepción son sustento epistemológico de la proporcionalidad, forman parte del antecedente de la misma noción de linealidad. Arquímedes, da la definición de recta más empleada hasta nuestros días. Euclides probó que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros. Arquímedes retoma esta consideración para la relación entre el volumen del cilindro y el de la esfera insertada (Torija, 1999). Esto nos lleva a conjeturar que el volumen de la esfera es directamente proporcional al diámetro elevado al cubo, por lo que hay una dependencia lineal al haber una proporción directa entre las dos cantidades, el volumen y el cubo del diámetro. En otros contextos, como es el caso de la Física, también hay esta dependencia lineal, en particular en la segunda ley de Newton y en la ecuación de Einstein.

En los libros de texto se percibe a la noción de linealidad, desde que se aborda la proporción directa, inmersa en la regla de tres y en la semejanza de triángulos, pasando por la función lineal $y = mx$ con $x \in R$, hasta el concepto de linealidad que es uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal.

En los libros de texto la proporcionalidad se ha transformando didácticamente; esto es, hasta fines del siglo XVIII, tomó la connotación de comparación de números, donde se estudiaban razones y progresiones, con miras a las aplicaciones. Durante el siglo XIX se

involucran aspectos generales obtenidos del álgebra y donde se considera a la proporción como una igualdad en problemas y se expresan como ecuaciones. Posteriormente en el siglo XX, el asunto de la proporcionalidad se localiza en los libros escolares de nivel superior y sus formas textuales son básicamente: enunciados verbales, tablas de valores, representaciones gráficas y expresiones simbólicas.

La noción de linealidad se manifiesta desde la infancia, con ideas del doble, triple o mitad, de conjuntos de objetos. Se amplía en primaria al ver razones y proporciones y la regla de tres simple directa. En quinto y sexto año de primaria se estudia el interés simple, la cual es otra manifestación de la linealidad; y en secundaria se estudia la solución de una ecuación de primer grado, problemas con una incógnita y se resuelven sistemas de ecuaciones lineales simultáneas de dos incógnitas. Estos temas se abordan nuevamente en el primer año de bachillerato, donde se plantean problemas en contexto. Ya en los primeros semestres de licenciaturas de ciencias e ingenierías se aborda la “linealidad” bajo la óptica del álgebra lineal. Pero en la didáctica de la matemática escolar no hay un vínculo conceptual de la noción entre los diferentes niveles educativos.

Conclusiones

El problema del aprendizaje de la noción de linealidad en ambiente escolar, es un fenómeno complejo donde intervienen las dimensiones, epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. En este trabajo se han dado algunas evidencias de todo ello, aunque en las etapas posteriores de la investigación se tratará de sustentar más estas consideraciones.

Se ha mostrado cómo es que la noción de linealidad es un elemento de articulación en el ámbito escolar de la matemática. Aún sin ser la única, no se percibe en forma transversal en las etapas escolares y su concepción en cada una se estudia de manera aislada y sin conexión.

A partir de este trabajo se considera a la linealidad como una noción que ha evolucionado en la historia, primero a partir de necesidades socio culturales de la época referida, hasta constituir desde el siglo XIX, un cuerpo de conocimientos estructurados en teorías formales.

Se concibe que la evolución de estas ideas pudiera aportar elementos que repercutan hacia la instalación didáctica de la noción de linealidad en distintos momentos de la trayectoria escolar. La didáctica de la matemática, no ha agregado los elementos de enlace entre las vertientes que la sustentan.

Se pretende a partir de esos saberes inmiscuidos con la noción de linealidad, aportar elementos que den cuenta de las rupturas y filiaciones epistemológicas, así como de sus implicaciones en la didáctica.

Bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez. *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (pp. 33-59). México: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, A., et al. (1995). Experiencia de vida y construcción de los números racionales. *Pedagogía*. Tercera época, Universidad Pedagógica Nacional. México. Vol. 10, Num. 5, pp. 38 – 47.

Camacho, A. (2000) *Difusión de conocimientos matemáticos los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite*. Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV – IPN, México, D.F., México

Cantoral, R.; Farfán, R. (2004b) La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématique*. La Pensée Sauvage, France. Vol. 24, Num. 2.3, pp. 137 – 168.

Chevallard, Y. (1991) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Editorial Aique. Buenos Aires: Argentina.

De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics an International journal*. Kluwer Academic Publisher. 35(1), 65-83

Furinghetti, F. y Radford, L. (2002). Historical conceptual development and the teaching of mathematics: From philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. En L. D. English (ed.) *Handbook of international research in Mathematics Education*. USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. NTCM.

Golubitsky, M. y Dellnitz M. B (2001). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, con uso de MATLAB*. México, D.F., México: Thomson Editores.

Gómez, B (1999) Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de “compañías” *RELIME* 2(3), 19-29.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics an International Journal*. Kluwer Academic Publisher. 43(3), 271-292

Struik, D. (1986). *Historia concisa de las matemáticas*. (2ª ed.). [Serie Maestros del Pensamiento Científico]. México, D.F., México: Instituto Politécnico Nacional.

Torija, R. (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo*. (2ª ed.) [La matemática en sus personajes]. España: NIVOLA.