

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LAS CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS ACERCA DE LA PROBABILIDAD

Héctor Agnelli, María Inés Rodríguez

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO. ARGENTINA

hagnelli@exa.unrc.edu.ar, mrodriguezbriguet@gmail.com

Resumen. Con la finalidad de analizar las concepciones y formas de razonar de los alumnos acerca de la probabilidad, se realizó una encuesta en un curso introductorio de Estadística destinado a estudiantes de ciencia biológicas y del profesorado de matemática antes de tomar su primer curso de probabilidades. Las preguntas se orientaron a indagar su comportamiento ante la concepción de la probabilidad desde un punto de vista clásico, frecuencial o subjetivo. Estos conocimientos previos con que el alumno llega al curso de estadística pueden convertirse en obstáculos para la enseñanza de la probabilidad y dificultar, luego, el aprendizaje de los conceptos propios de la inferencia estadística. Los resultados obtenidos indican que el énfasis, durante el corto tiempo destinado a la enseñanza de la probabilidad, debe ser puesto en clarificar las distintas interpretaciones más que en los aspectos algorítmicos del tema.

Palabras clave: probabilidad, interpretaciones clásica, frecuencial, subjetiva.

Introducción

Como señala Shaughnessy (2002), “nuestros estudiantes no son páginas en blanco, esperando que la teoría normativa de la probabilidad descienda de nuestra boca. Los estudiantes ya tienen sus propias heurísticas, sesgos y creencias acerca de la probabilidad y estadística”. Por lo tanto a la vez que esta situación plantea un problema para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de probabilidad y estadística, también nos señala la importancia de conocer cuáles pueden ser algunas de estas concepciones previas.

Para aportar al conocimiento de esta situación, en particular sobre las concepciones y formas de razonamiento acerca de la probabilidad con que llegan los alumnos a un curso

inicial de estadística, se realizó una encuesta a estudiantes de ciencias biológicas y con fines comparativos se administró la misma encuesta a estudiantes del profesorado de matemáticas antes de tomar su primer curso de probabilidades. Las preguntas formuladas están orientadas a indagar su comportamiento ante problemas cuya resolución implica concebir la probabilidad desde un punto de vista clásico, frecuencial o subjetivo. Una encuesta similar a la presentada fue utilizada por Albert (2003). En el desarrollo del presente trabajo se describen los enfoques probabilísticos denominados clásico, frecuencial y subjetivo, como así también sus implicancias para la enseñanza de la estadística. Se describe la encuesta y se muestran los resultados obtenidos.

Interpretaciones de probabilidad

En los cursos introductorios, la enseñanza de la estadística se puede desarrollar sobre la base de tres concepciones fundamentales de la probabilidad: clásica, frecuencial y Bayesiana. Las diferencias fundamentales entre estos tres enfoques radica en la manera de asignar probabilidades y en la interpretación de los valores de probabilidad obtenidos después de realizar cálculos. Es importante distinguir entre asignar y calcular probabilidades. Para el cálculo de probabilidades se aplican las propiedades derivadas de la construcción axiomática de la probabilidad, pero estos cálculos dependen de asignaciones iniciales de probabilidad o de la adopción de ciertos modelos distribucionales, o de ambos. Así, por ejemplo, cuando una característica observable en una situación experimental se modela como una variable aleatoria que sigue una distribución binomial, la probabilidad de un evento se calcula usando la función de densidad correspondiente, pero el valor de la probabilidad del éxito (p) debe ser asignado inicialmente de alguna manera.

La interpretación clásica que se atribuye a Laplace, aunque ya aparece en los trabajos de Pascal, Bernoulli, Huygens, y Leibniz, en las situaciones en las que la evidencia está ausente o esta evidencia está presente de manera simétricamente balanceada, asigna la misma probabilidad a todos los resultados posibles. De esta forma, la probabilidad de un evento es el cociente entre el número de maneras en que puede ocurrir ese evento y el número de

resultados posibles. La aplicación de esta interpretación queda reducida a espacios muestrales finitos y con resultados equiprobables.

La interpretación frecuencial o empírica asume que el experimento es repetido muchas veces bajo condiciones similares y la probabilidad de un evento es estimada por la frecuencia relativa de aparición del evento en el conjunto de resultados experimentales. Así expresada esta interpretación tiene cierta similitud con la interpretación clásica, ya que otorga igual peso a cada miembro de un conjunto de eventos y, simplemente, calcula la proporción de los favorables en el total de los resultados producidos. La diferencia esencial con la interpretación anterior es que justamente el enfoque frecuencial tiene en cuenta los resultados producidos por el experimento, mientras que el enfoque clásico tiene en cuenta los resultados posibles de un experimento. Es decir, la interpretación frecuencial es un concepto post-experimental y la interpretación clásica, es pre-experimental. Para poder aplicar la interpretación frecuencial se debe asumir que la situación aleatoria se repite bajo condiciones similares; de esta manera, no se abarcan por esta interpretación los sucesos aleatorios de ocurrencia única en el tiempo. Y si bien esta interpretación extiende la interpretación clásica a situaciones en las que los resultados no son equiprobables, su propia definición operativa genera algunos problemas. Por ejemplo, si una moneda se tira una vez, la frecuencia relativa de cara es 0 ó 1, cualquiera que sea su sesgo. Si se tira dos veces, las frecuencias relativas de caras podrían ser 0, $\frac{1}{2}$, 1. Es decir, la “separación” entre los valores de las frecuencias relativas estará dada por $1/n$ (Hajék, 2003). Entonces surge el problema de cuál es el número n adecuado para la asignación de probabilidades. Una extensión para superar el frecuentismo finito fue considerar a la probabilidad como límite de sucesiones de frecuencias relativas. Exponentes de la escuela frecuentista han sido Venn (1876) y von Mises (1957).

La interpretación subjetiva considera la probabilidad como una medida numérica de la creencia que tiene una persona acerca de la ocurrencia de un evento. La persona asigna una probabilidad a un evento de manera que refleje su creencia acerca de la verdad o falsedad del mismo. Este es el enfoque más general, ya que se aplica a eventos que pueden no ser

equiprobables y a eventos que no pueden repetirse bajo las mismas condiciones. De esta manera, la probabilidad está referida a la incertidumbre y no únicamente a la repetición de experimentos. La incertidumbre significa, en muchas situaciones, conocimiento incompleto y no ausencia absoluta de conocimiento. Esta interpretación es personal en el sentido de que diferentes personas pueden tener diferentes opiniones y en consecuencia asignar al mismo evento diferentes probabilidades; de aquí el nombre de probabilidad subjetiva. También la probabilidad depende de la información que posea la persona al momento de emitir su juicio; si dispone de nueva información, su asignación de probabilidad puede variar. La formalización de la probabilidad como grado de creencia fue realizada por De Finetti (1937). Para De Finetti, cualquier incertidumbre debe ser expresada mediante una distribución de probabilidad y ésta es la característica esencial de la metodología estadística Bayesiana.

La probabilidad y la Inferencia Estadística

Moore (1997), en un trabajo en el que analiza la conveniencia de enseñar inferencia estadística clásica o Bayesiana, debate en el que obviamente subyace la cuestión de si asignar más o menos importancia a la interpretación de probabilidad frecuencial o a la subjetiva, señala “Como es usual, en los primeros cursos la barrera principal es la probabilidad. Tanto la estadística clásica como la Bayesiana están basadas en el concepto de probabilidad y en ambos casos este concepto puede ser presentado con mayor o menor grado de formalidad. Creo que en cualquier nivel de formalismo el razonamiento Bayesiano requiere una más compleja noción de probabilidad y una maquinaria probabilística mayor que la necesaria para la inferencia estándar.” (p. 254-261)

Para sustentar la opinión anterior argumenta “Las dificultades acerca de las ideas probabilistas han sido documentadas tanto por los psicólogos, quienes investigan cómo las personas piensan las chances, como por los investigadores en educación, quienes estudian los efectos de nuestra intervención (enseñanza) sobre el pensamiento de los estudiantes. El mejor trabajo psicológico conocido es el de Tversky y Kahneman (1982), quienes muestran

que: los juicios intuitivos acerca de las probabilidades marginales, conjuntas y condicionales no son probablemente coherentes, esto es, pueden no satisfacer las restricciones de la teoría de probabilidad.” (p. 254-251)

Albert (2003), quien aboga por la conveniencia y factibilidad de enseñar inferencia Bayesiana en los primeros cursos, cita a Hawkins y Kapakia (1984), quienes revisaron las investigaciones sobre las concepciones de probabilidad que tenían los niños y concluyeron que la probabilidad subjetiva es más próxima a la intuición. También Falk y Konold (1992), señalaron que la intuición de las personas al aprender de su experiencia y revisar sus creencias, es consistente con el análisis Bayesiano.

Por su parte, Lécoutre (2006), a partir del reconocimiento de la creciente aplicación de metodología inferencial Bayesiana, concluye que esta situación cuestiona seriamente la tradicional elección que se hace desde la educación matemática en enfatizar la interpretación frecuencial de la probabilidad, ignorando a su vez la concepción subjetivista y desde esta posición aboga por no mostrar a estas interpretaciones como opuestas, sino más bien como complementarias.

Método

Para recopilar datos sobre cómo los estudiantes comprenden la probabilidad se formularon nueve preguntas que fueron contestadas por 67 alumnos de un curso inicial de estadística dirigido a estudiantes de Biología y Microbiología. También se administró la misma encuesta a 9 estudiantes de Matemáticas.

Ninguno de los grupos había recibido en la Universidad enseñanza alguna sobre probabilidad. Si bien en los planes de estudio de la escuela media está previsto el desarrollo de temas vinculados con la probabilidad y la estadística, estos forman parte de la asignatura matemática y no necesariamente, por diversas razones, son cubiertos en todas las escuelas. Esta situación es expuesta por los mismos profesores cuando realizamos actividades académicas destinadas a darle continuidad a su formación. En este grupo, menos del 8% de los alumnos confirmó haber recibido algunas nociones de probabilidad en el secundario.

Por otra parte, indagando en los textos de estudio más comunes en este nivel educativo como por ejemplo, Kaczor (2002) y Camuyrano (2003), hemos comprobado que los mismos desarrollan el enfoque probabilístico clásico y frecuencial, pero no el subjetivo.

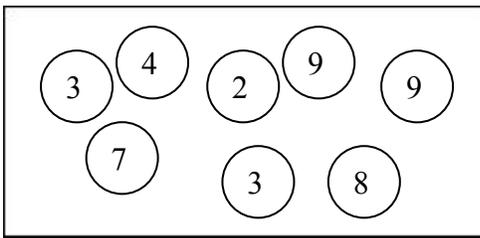
El cuestionario consistió en nueve preguntas, tres para cada tipo de interpretación de la probabilidad, preguntándose en cada caso acerca de la probabilidad de un evento. Se pidió a los estudiantes que las respuestas fuesen razonadas, expresadas numéricamente y además justificadas brevemente.

El cuestionario se aplicó en el aula en el día de inicio de cada uno de los cursos. A cada alumno se le entregó una copia impresa de las preguntas, con espacio disponible para sus respuestas, estipulándose una duración de 45 minutos para concretar las mismas.

Cuestionario

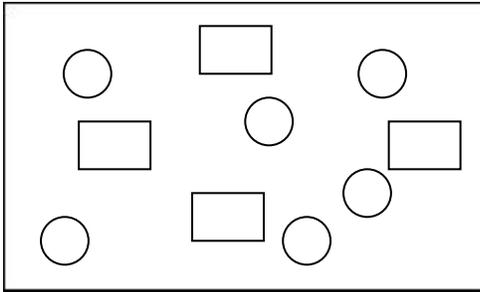
1.- Interpretación clásica.

Pregunta 1. Supongamos que Usted elige de esta caja una bolilla al azar



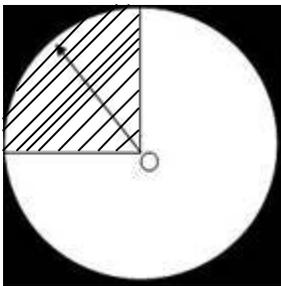
¿Cuál es la probabilidad sacar una bolilla numerada con 5 o mayor que 5?

Pregunta 2.-Suponga que Usted elige de la siguiente caja un objeto al azar.



¿Cuál es la probabilidad de elegir un cuadrado?

Pregunta 3.- Supongamos que Usted tiene un juego como el que muestra la figura. La aguja se impulsa y gira libremente alrededor del punto O hasta que se detiene. ¿Cuál es la probabilidad de que al detenerse lo haga dentro del área rayada?



Estas tres preguntas pertenecen al tipo clásico. La diferencia entre la primera y la segunda está dada por la forma de los objetos. En la primera, si bien se asume visualmente que los objetos son iguales, se los distingue por su numeración, pero la igualdad en la forma evoca la correspondencia de este experimento con los sorteos de la lotería, en el sentido de que no existe una bolilla que posea algún rasgo para su extracción preferencial. En la segunda, la distinción está dada por la forma, por lo que la manera de operativizar el azar podría originar dudas, pues si la elección al azar consistiese en sacar un objeto directamente de la caja esta extracción podría quedar sesgada por la forma de los objetos. Por lo tanto esta situación será útil durante el desarrollo del curso para motivar la necesidad de utilizar dispositivos, ajenos a los objetos y al individuo, para generar extracciones aleatorias. En

cuanto a la pregunta número tres, si bien la respuesta se puede dar teniendo en cuenta que el sector elegido es uno de los cuatro sectores posibles en los que puede detenerse la aguja, la situación planteada también podrá ser útil para mostrar, más adelante, que para el cálculo de algunas probabilidades se hace necesario medir en lugar de contar.

2.- Interpretación frecuencial

Pregunta 4.- Suponga que Usted tira una moneda 20 veces y sale 19 veces cara y una cruz. Si Usted tira la misma moneda una vez más ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara?

Pregunta 5.- Suponga que esta mañana se produce en el hospital local un nacimiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sea varón?

Pregunta 6.- Suponga que se elige al azar un estudiante de primer año de su carrera. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

La respuesta a la pregunta 4 podría deberse a la desatención total a la información suministrada, o bien teniéndola en cuenta. Al ignorar la información, la respuesta, asumiendo que la moneda es equilibrada (dato no suministrado), la probabilidad de cara sería $\frac{1}{2}$. Y si se asume la información, se podría asignar una probabilidad basada en la frecuencia relativa $\frac{19}{20} = 0.95$. Este problema es interesante para discutir los tamaños de muestras necesarios para estimar probabilidades a partir de frecuencias relativas, ya que si el número de repeticiones no es elevado, y no se presta atención a las rachas y fluctuaciones del proceso estocástico, se puede reforzar un sesgo, ya caracterizado en la literatura de investigación, conocido como creencia en la ley de los pequeños números (Tversky y Kahneman, 1982, p. 23-31).

En la pregunta 5, a diferencia de la anterior, se pide la asignación de probabilidad sin proporcionar información numérica en el enunciado. Una posible respuesta puede derivar de la referencia a la composición poblacional de niños y niñas de la ciudad y dar una estimación de probabilidad basada en la frecuencia relativa; otra posible respuesta es

asignar probabilidad a partir de que sólo existen dos resultados posibles, varón o mujer. Esta última situación, al igual que la comentada en la pregunta anterior —y que se repetirá también en algunas de las preguntas siguientes—, da lugar al así denominado por Lêcoutre (1985, 1992) sesgo de equiprobabilidad. Éste consiste en asignar la misma probabilidad a todos los resultados asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso para aquéllos en que no es aplicable el principio de indiferencia (Gutierrez Cabría, 1992, p.277-280) o donde no hay una simetría física.

Aunque para la pregunta 6 tampoco se proporcionan datos, sí se conoce que las mujeres representan aproximadamente el 80% del conjunto de estudiantes de las carreras de Ciencias Biológicas y Matemáticas en la Universidad Nacional de Río Cuarto.

3.- Interpretación Subjetiva.

Pregunta 7.- ¿Cuál es la probabilidad de que Boca gane su próximo partido contra Gimnasia y Esgrima de La Plata el próximo fin de semana?

Pregunta 8.- ¿Cuál es la probabilidad de que Usted se gradúe en la UNRC en 4 años o menos?

Pregunta 9.- ¿Cuál es la probabilidad de que Usted se case antes de los 25 años?

Para la pregunta 7, se podría esperar que, si se dispone de información acerca de cómo se han desempeñado los equipos antes de llegar a este encuentro, sería razonable asignar probabilidades teniendo en cuenta esa información. Dadas las características del curso y del evento por cuya probabilidad se pregunta, se esperaría que los alumnos contaran con poca información y esto podría originarles dificultades en expresar la probabilidad a partir de sus creencias y no responder, o contestar utilizando una interpretación equivocada.

La pregunta 8 se podría responder mediante una interpretación frecuencial basada en la proporción de estudiantes que se gradúa en los tiempos establecidos y asumir que el tiempo que requiere la graduación no está influenciado por las condiciones personales.

Alternativamente, se puede responder la pregunta desde la situación personal de cada individuo.

La pregunta 9 es tal vez la que mejor configura la característica de que el evento a probabilizar es no repetible en similares condiciones en el tiempo y además la concreción del mismo está determinada por el comportamiento personal.

Resultados de la encuesta

1.- Interpretación clásica

Las respuestas a las tres primeras preguntas relativas a la interpretación clásica la respondieron correctamente el 87% de los estudiantes. De cualquier manera, de éstos el 28% expresaron la probabilidad como un número entre 0 y 1; el otro 72% expresó la probabilidad como un porcentaje y, aún en los casos cuando por vía del cálculo otorgaban un resultado numérico, a éste lo expresaron como un porcentaje. Todos los que contestaron correctamente llegaron a una expresión numérica considerando la cantidad de resultados posibles finita (cuatro cuadrantes en el caso del círculo) y estos resultados equiprobables.

Por otra parte, es notable que varios alumnos distinguieron entre sacar la bolilla numerada con el 5 (no existente en la caja), evento al que asignaron probabilidad nula, y las bolillas numeradas con valores mayores que 5, evento al cual asignaron probabilidad 50%. También, y en la misma dirección, algunos alumnos asignaron probabilidad cero al evento de extraer un cuadrado, ya que las figuras presentadas son rectángulos.

2.- Interpretación frecuencial

Pregunta 4: Un 43% de los alumnos optó por asignar probabilidad 50%. El resto hizo una asignación de probabilidad basada en la información disponible pero, de ellos, sólo el 14% calculó correctamente la frecuencia relativa.

Pregunta 5: La mayor parte de los alumnos dio como respuesta 50%.

Pregunta 6: La mayoría de las respuestas tuvieron en cuenta la interpretación frecuencial y la asignación de probabilidades se expresó por valores tales como 80%, 90%, 99%, como atribuibles a probabilidad “alta”. Algunos estudiantes expresaron que tenían que conocer el número de varones y de mujeres de primer año. Pero otra cantidad importante de respuestas asignaron probabilidad $\frac{1}{2}$ al dicotomizar la situación en: “mujer” o “varón”. Entre éstas, parece oportuno citar la respuesta: “si bien la mayoría son mujeres la probabilidad es 50%”, ya que si bien el estudiante posee información él no utiliza para asignar probabilidades.

3.- Interpretación Subjetiva.

Pregunta 7: El 70% de los estudiantes contestaron a la pregunta asignando probabilidad $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$. Para el primer caso consideraron los resultados posibles ganar o perder y, para el segundo, ganar, empatar o perder. Pero en ambas situaciones consideraron a los resultados equiprobables. El 20% dio una respuesta que refleja sus creencias y el resto no contestó.

Pregunta 8: La mayoría (67%) contestó sobre la base de su opinión y asignó probabilidades “altas” o “bajas”- pero no valores numéricos- al evento y también hubo casos con respuesta 100% o 0%. En algunas respuestas con probabilidades altas se justificaban esos valores a partir de las expectativas de concretar la graduación. También existieron respuestas (12%) con probabilidad $\frac{1}{2}$. Estos alumnos dicotomizaron la situación en: “me gradúo” o “no me gradúo” considerando nuevamente la equiprobabilidad.

Pregunta 9: Las respuestas a esta pregunta presentaron las diferencias más notables entre los alumnos de matemáticas y los de biología. En el primer grupo, las respuestas fueron “objetivas”, en el sentido de emplear algún mecanismo de cálculo para generar la respuesta, e iguales a $\frac{1}{2}$, respondiendo al esquema “me caso” o “no me caso”, una respuesta llamativa fue $\frac{2}{25}$. En el grupo de biología, las respuestas fueron marcadamente subjetivas. Los porcentajes que representan las probabilidades asignadas fueron desde 0% (en un caso justificado como un suceso imposible, pues la persona era ya mayor de 25 años y no estaba casada), 10% hasta 100%. Hubo respuestas atribuibles a la interpretación frecuencial: “la

probabilidad es baja porque la mayor parte de la gente se casa después de los 25 años”; una respuesta interesante, porque parece evidenciar la postura de que no se pueden asignar probabilidades a situaciones que dependan de situaciones personales, fue “no se puede saber la probabilidad porque no es un hecho matemático”.

De las nueve preguntas formuladas, sólo en las tres últimas se presentaron casos de no respuesta, (10%).

Conclusiones

En general los estudiantes no distinguen las tres interpretaciones de probabilidad. Si bien con relación a las preguntas vinculadas con la interpretación clásica las respuestas fueron correctas, es notorio que se asume de manera automática la equiprobabilidad de los resultados y esto conduce a asignaciones de probabilidad incorrectas cuando se pasa a situaciones donde no está presente la simetría. Esta afirmación se sustenta en que muchos alumnos (62%) cada vez que enfrentaron resultados dicotómicos, los consideraron equiprobables (varón-mujer; ganar-perder, graduarse-no graduarse).

Si bien los alumnos no presentan problemas en la asignación de probabilidades bajo la interpretación clásica, éstos hubiesen aparecido si se hubiera pedido calcular probabilidades usando análisis combinatorio. Por lo tanto, parece conveniente utilizar más tiempo, en el marco de la interpretación clásica de probabilidad, en reflexionar acerca de que no necesariamente los resultados de los experimentos dicotómicos son equiprobables; que la probabilidad puede ser expresada como un número; y que implementar extracciones equiprobables requiere en algunos casos usar mecanismos aleatorios ajenos al sujeto, como por ejemplo el uso de tablas de números aleatorios o rutinas aleatorias en un computador.

Es marcado el déficit en la asignación de probabilidades desde el punto de vista frecuencial. Ya sea porque aún ante la evidencia informativa que parece contrariar la simetría (pregunta

4) se asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ como si ésta fuese una propiedad inherente a todas las monedas o por dejar de lado el contexto en el que se asigna la probabilidad (pregunta 5). Es conveniente, por lo tanto, enfrentar al alumno a diversas situaciones en las que tenga que estimar probabilidades a partir del cálculo de frecuencias relativas. Esta interpretación es la más común en los cursos de inferencia estadística, ya que constituye la herramienta necesaria para interpretar las distribuciones muestrales, intervalos de confianza y valores de p en las pruebas de significación.

Por otra parte, el creciente desarrollo teórico y el auge en las aplicaciones de la metodología Bayesiana, basada en la interpretación subjetiva de la probabilidad, hacen necesario prepararse para enseñar la misma en los cursos introductorios. Dado que los resultados pusieron en evidencia las dificultades que tienen los alumnos en traducir sus a valores numéricos de probabilidad, sería oportuno ejercitar la asignación de probabilidades subjetivas mediante experimentos de calibración como los descritos en el libro de Berry (1996).

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de SECyT y PIIMEG, de la UNRC 2007-2008

Bibliografía

- Albert, J. (2003). "College Students' Conceptions of probability". *The American Statistician*, Vol.5. 7, N° 1.
- Berry, D.A. (1996). *Statistics: A Bayesian Perspective*. Belmont. Duxbury Press.
- Camuyrano, M. B. ; Net, G.; Aragón, M. (2000). *Modelos matemáticos para interpretar la realidad*. Buenos Aires: Estrada.
- De Finetti, B. (1972). *Probability, Induction and Statistics*. Chichester. Wiley.
- Falk, R.; Konold. (1992). *The Psychology of Learning Probability. Statistics for the Twenty-First. Florence and Sheldon Gordon*. The Mathematical Association of America.
- Gutierrez Cabría, S. (1992). *Filosofía de la Probabilidad*. Valencia: Tirant Lo Blanch
- Hajék, Alan (2007). Interpretations of Probability, <http://plato.stanford.edu/entries>.

Hawkins, A.; Kapakia, R, (1984). "Children's Conceptions of Probability. *Educational Studies in Mathematics*, 15.

Kaczor, P.; Schaposchnik, E. F.; Cicala, R.; Diaz, B. (1999). *Matemática I*. Buenos Aires: Santillana

Lêcoutre, B. (2006). People intuitions about randomness and probability. *Statistical Education Research Journal*. 5(1).

Moore, D. (1997) Bayes for Beginners? Some reasons to hesitate. *TAS*, vol 51,Nº3.

Shaughnessy, M. (2002). *Investigación en Probabilidad y Estadística: Reflexiones y Orientaciones*. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Tversky, A.; Kahneman, D.; Slovic, P. (eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Venn, J. (1876). *The logic of the chance*, 2a edición, reprinted ,New York: Macmillan: (1962).

Von Mises R. (1957). *Probability, Statistics and Truth*. New York: Macmillan.