ALGUNAS DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES AL ASOCIAR ECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES CON SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Ferman Arellano Cabezas, Asuman Oktaç

CINVESTAV - IPN

farellano@cinvestav.mx, oktac@cinvestav.mx

Resumen. *Frecuentemente se enfatiza que una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos registros de representación. Sin embargo, la conversión de una representación en una representación de otro registro no es asunto fácil, por ejemplo, en la conversión ecuación $\rightarrow$ gráfico, no parece surgir ninguna dificultad, pero todo cambia cuando se hace la conversión inversa. En este sentido, el objetivo de nuestra investigación es identificar aquellas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica, y aquéllas que se relacionan con el concepto de sistema. Para esto, se diseñaron actividades donde se pone de manifiesto dichas características.*

Palabras clave: Ecuaciones, Sistemas, Representación, Gráficas.

Introducción

Este trabajo de investigación está enfocado en identificar algunas dificultades que puedan presentar los estudiantes de nivel Medio Superior cuando asignan una ecuación lineal para un gráfico dado. Asimismo, nos interesa analizar las estrategias que pueden emplear, los razonamientos que pueden utilizar, las propiedades que pueden conjeturar estos estudiantes al resolver problemas relacionados con dicho tema. Por otro lado, también abordaremos el tema de sistemas de ecuaciones lineales en el contexto de la construcción de un sistema de ecuaciones lineales que cumpla con ciertas condiciones geométricas.

El aprendizaje de las matemáticas hace que las actividades fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representaciones distintas: varios sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, entre otros.

Problemática de investigación

Algunas investigaciones en Didáctica del Álgebra Lineal, por ejemplo Mora (2001), Eslava y Villegas (1998), reportan que a los alumnos se les dificulta relacionar un sistema de ecuaciones con un gráfico ya elaborado. Al plantear ejercicios como: ¿cuál es el sistema de ecuaciones lineales con dos variables para el gráfico?, muchos de los estudiantes no pueden asignar el sistema adecuado.

Abordar el estudio de este problema, teniendo como marco de referencia la teoría que corresponde a "La articulación de dos registros" desarrollado por R. Duval, nos permitió analizar los argumentos y concepciones que presentan los estudiantes al resolver actividades donde se involucran significados de los términos que conforman a una ecuación lineal así como las propiedades que guarda un sistema de ecuaciones para representar las diferentes categorías de tres rectas en el plano. Por lo general, en cursos de álgebra se prioriza el manejo eficiente de los procedimientos y algoritmos de carácter algebraico, dejando de lado las representaciones gráficas. Estas circunstancias propician que los estudiantes tengan dificultades de interpretación al enfrentarse con preguntas en el contexto algebraico o que requieran de una reinterpretación de los conceptos algebraicos.

Objetivo de la Investigación

El objetivo de nuestra investigación es *identificar aquellas dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica, y aquéllas que se relacionan con el concepto de sistema*.

Para observar el fenómeno que nos interesa utilizamos una serie de actividades donde se pongan de manifiesto algunas variables visuales de la gráfica y algunas unidades significativas de la escritura algebraica.

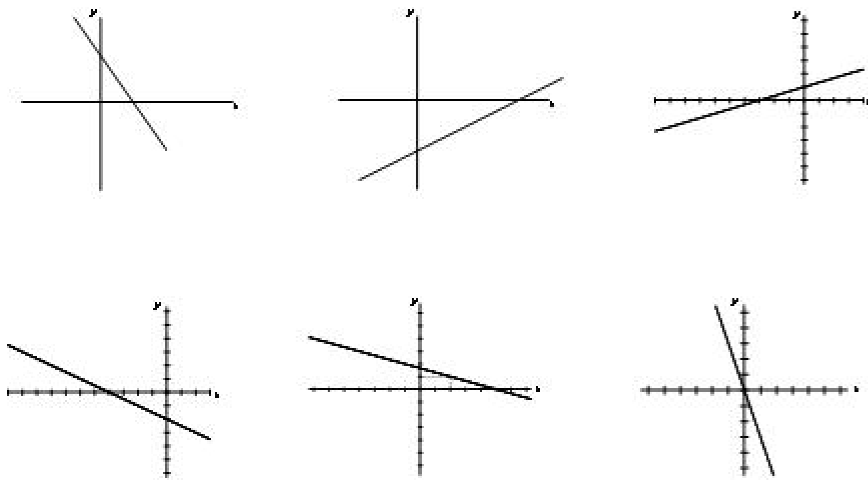
Metodología

Se presentan algunos aspectos metodológicos para la aplicación de las actividades y análisis de la información.

Se aplicaron las actividades a seis estudiantes de nivel Medio Superior que oscilaban entre los 16 y 18 años, se tomó a dos estudiantes que cursaban el segundo semestre (Jessica, Roberto), el cuarto semestre (Daniel, Bruno) y el sexto semestre (Alex, Sergio). Los antecedentes académicos de los estudiantes de segundo semestre son: Funciones lineales, Ecuaciones lineales, Sistemas de ecuaciones lineales, los de cuarto semestre: Geometría, Sistemas de coordenadas y lugares geométricos, La recta y su ecuación cartesiana, y los de sexto semestre: Cálculo diferencial e integral. Para la recopilación y análisis de datos se desarrolló una entrevista clínica. Se indicó que al considerar erróneo algún procedimiento, no borrarlo sino encerrarlo en un círculo para que de esta manera observar las diferentes estrategias que utilizaban para intentar resolver un problema.

Las actividades que se aplicaron fueron las siguientes:

1. Adivina mi ecuación



El propósito de esta actividad es identificar y analizar las dificultades que pueden presentar los estudiantes al tratar de asignar una ecuación lineal a gráficas que pasan por distintos cuadrantes del plano cartesiano representado este en dos formas distintas (sin escala y con escala en los ejes).

2.

a) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica sean rectas paralelas.

b) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica sean rectas idénticas.

c) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica muestre sólo un punto de intersección entre las rectas.

3.

a) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables cuya representación gráfica forme un triángulo con las intersecciones de sus rectas.

b) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables, donde en su representación gráfica se observen sólo dos rectas.

c) Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables, donde en su representación gráfica se observen sólo dos intersecciones.

El propósito de las actividades 2 y 3 es identificar las dificultades que se puedan presentar al construir sistemas de ecuaciones que generen las diferentes categorías de tres rectas en el plano.

4.

Escribe dos ecuaciones lineales con dos variables cuyas gráficas intersecten a:

a) Los ejes x y y positivos
b) El eje x negativo y el eje y positivo
c) Los ejes x y y negativos
d) El eje x positivo y el eje y negativo

El propósito de esta actividad es identificar y analizar las dificultades que pueden presentar los estudiantes respecto a las unidades significativas de la escritura algebraica y las modificaciones pertinentes de las variables visuales del gráfico.

Resultados y discusiones

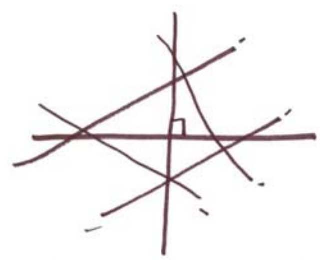
En la actividad 1:

Alex concluye en varias ocasiones con la ecuación $y = mx + b$ argumentando:

Alex: es que creo que es, bueno, creo que es de todas las pendientes, o sea cualquier recta que cruce a cualquier eje *x* ó *y*, sí mientras no tenga 90° creo que ésta es la ecuación.

Entrevistador: puedes poner por ejemplo las rectas que representan esta ecuación ($y = mx + b$) o las posiciones como tú dices.

Alex: sería así,



bueno son ésas las posibles rectas.

Cuando se le pregunta ¿qué es pendiente?, Alex contesta: *es la inclinación que, bueno, es cualquier recta que no cumple con los* 90°, y argumenta *por ser pendiente la recta* su ecuación es $y = mx + b$ *ya que la pendiente está dada por dicha ecuación*. De esta manera observamos que Alex confunde la pendiente como una recta y no como la inclinación de la recta.

Además, afirma que para encontrar la ecuación necesita dos puntos y la pendiente, pero al preguntarle ¿se puede calcular la pendiente con los dos puntos?, él contesta: *no, no se puede, únicamente conociendo el valor de b*, al cual se refiere como la *inclinación* y para encontrar el valor de *b* necesita el valor de *m*, así cayendo en un argumento cíclico.

Este estudiante no discrimina las unidades simbólicas correspondientes a los valores de las variables visuales, pues lo que importa en la escritura de $y = ax + b$ es el coeficiente *a* y la constante *b*.

Para la actividad 2 a):

En esta actividad **Daniel** presenta cierto desconcierto ante la palabra "sistema" y bajo la condición de representar rectas paralelas, él comenta:

Daniel: ¿de tres ecuaciones?

Entrevistador: sí.

Daniel: ¿cada una debe ser una recta diferente?

Daniel: podrá ser éste, $\begin{array}{l} 2x-y=0---(1) \\ 4x-2y=0---(2) \\ -x+y=0---(3) \end{array}$.

Entrevistador: ¿este sistema representa gráficamente rectas paralelas?

Daniel: sí.

Entrevistador: ¿me puedes explicar cómo llegaste a tal sistema?

Daniel: cada sistema es diferente, ¿no?

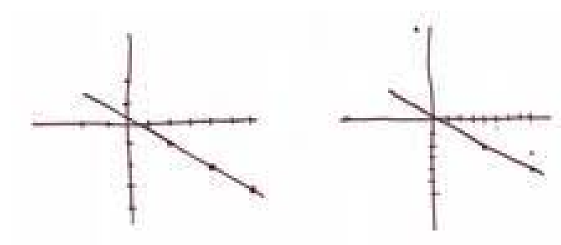
Entrevistador: ¿cómo cada sistema?

Daniel: sí, son tres ecuaciones diferentes.

Entrevistador: ¿deben ser diferentes?

Daniel: aja, pero que den el mismo resultado, rectas paralelas. En este caso (ecuación 1) puede decirse que *x* avanza 2 ($2x$) en el eje de las *x* y baja 1 (-*y*) en el eje de las *y*, y así se va en toda la gráfica, en la ecuación 2) avanza 4 y va a retroceder 2 en el eje de las *y*, y de igual forma para la ecuación 3).

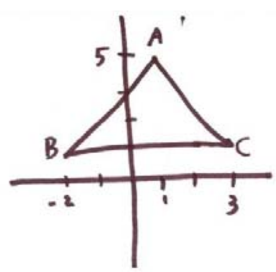
Observamos que el lenguaje que emplea muestra que se refiere a cada ecuación como un *sistema diferente*. También presenta dificultades para graficar una ecuación, por ejemplo: realiza la gráfica de $2x-y=0$, punto por punto. Para encontrar el primer punto, considerando la ecuación como $ax+by=0$, el coeficiente en *x* lo interpreta como el primer componente y el coeficiente en *y* como el segundo componente, así obteniendo el par ordenado (*a*,*b*). Para establecer el segundo punto utiliza el mismo método, únicamente que ahora parte de la posición del punto anterior, el cual lo define como un punto en el origen de nuevos ejes:



A pesar de que obtiene rectas "idénticas" afirma que es el sistema correcto. De esta forma identificamos que Daniel presenta dificultades para graficar una ecuación y para interpretar tres rectas paralelas en el plano.

En la actividad 3 a):

Alex bosqueja:



asignando en cada intersección las letras A, B y C llamándolas como variables, pero al tratar de construir las ecuaciones entra en conflicto ante el número de variables:

Alex: es que no podría usar aquí las, dos variables, tendría que usar la tercera que sería *C*, o sea las intersecciones de las rectas es, a lo que le estoy asignando los puntos

A, B y *C*, entonces para establecer el sistema de tres ecuaciones sí tendría que ocupar otra variable.

A pesar de que presenta cierta confusión, Alex trata de resolverlo utilizando la siguiente vía: *bueno creo que hay una manera de hacerlo con dos variables y establecer unos, no sé, los puntos, se me está ocurriendo por ejemplo* (observa y escribe los puntos A(1, 5), B(-2, 1) y C(3, 1)) y escribe:

$$
\begin{array}{ll}
A(\overset{x}{1},\overset{y}{5}) & ①\ \overset{A}{1x+5y} = \overset{B}{-2x+1y} \\
B(-2,1) & ②\ \overset{B}{-2x+1y} = \overset{C}{3x+1y} \\
C(3,1) & ③\ \underset{C}{3x+1y} = \underset{A}{1x+5y}.
\end{array}
$$

Analizando el razonamiento utilizado para construir las ecuaciones observamos que este estudiante aplica de manera peculiar un corolario de Euclides: *dos puntos determinan una y sólo una recta*.

Alex: lo primero que hice fue proponer los puntos del triángulo y sacar los valores de *x* y *y*, posteriormente igualarlos, igualar la recta *AB* que está dada por 1), *BC* por 2) y *CA* por 3) y esto quiere decir que por ejemplo conociendo la recta *AB* podemos decir que es igual a la recta *BC*, que a su ves *BC* es igual a la recta *CA* por lo que ya tendríamos las tres ecuaciones que intersectan en tres puntos formando un triángulo.

A raíz de la figura construida consideramos que lo primero que le viene a la mente es la forma de un triángulo equilátero y en base al lenguaje que emplea consideramos que su respuesta la relaciona con su experiencia en clases de geometría. Este estudiante se enfoca sobre los datos del trazo (los tres puntos que lo construyen) y no toma en cuenta las variables visuales pertinentes de la representación gráfica.

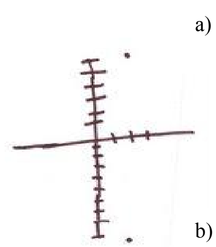
Cuando se trata de partir de la representación gráfica para encontrar, por ejemplo, la ecuación correspondiente es la vía de interpretación global de las propiedades de las figuras que se vuelve necesaria, acción que no es realizada por este estudiante.

Para la actividad 4:

Jessica interpreta la solución de esta actividad como encontrar un punto (*x*, *y*), siendo los signos de sus coordenadas iguales a los signos de los ejes indicados en cada inciso.

Ella escribe: $\begin{matrix} y+3=0 & x+2=0 & ---c) \\ y-6=0 & x-2=0 & ---a) \\ y-5=0 & x+12=0 & ---b) \\ y+9=0 & x-3=0 & ---d) \end{matrix}$, y argumenta: *eso es más fácil, pues únicamente hay que despejar y dejas sola a "y" y a "x", y ya te sale* (señala *x* y *y* en cada ecuación).

Al indicarle que aplique su razonamiento, para a) y b), se obtiene: a) $\begin{matrix} y=+6 \\ x=+2 \end{matrix}$, b) $\begin{matrix} y=-9 \\ x=+2 \end{matrix}$, y lo bosqueja de la siguiente manera:



En base a sus argumentos observamos que Jessica presenta dificultades para expresar una ecuación lineal con dos variables. También presenta dificultades para construir una ecuación que interseque un lugar específico del plano, al interpretar esta condición como establecer un punto coordenado (*x*, *y*). Esto nos condujo a realizar la siguiente pregunta:

¿Qué es una ecuación lineal?

Jessica: pues es, hacer una operación con dos números que no se conocen, y hay que saber cuál es su valor.

Tal parece que a raíz de esta forma de concebir a una ecuación lineal impidió que contestara de manera correcta este problema.

Conclusiones

A pesar de que el diseño de actividades enfatizó diferentes valores visuales en el registro gráfico, a los estudiantes se les dificulta relacionar dichos valores con las unidades simbólicas correspondientes en la escritura algebraica.

Todas las dificultades expuestas en el análisis se deben principalmente a que los estudiantes no conciben que un conjunto de trazos forme una imagen que representa un "objeto" descrito por una expresión algebraica. Toda modificación de dicha imagen implica una modificación en la escritura de la expresión algebraica la cual determina una variable visual pertinente para la interpretación de la gráfica. Por tal motivo, es importante identificar las modificaciones conjuntas de la imagen y de la forma de la escritura algebraica.

Cabe mencionar que de acuerdo a las dificultades observadas y a los argumentos por parte de los estudiantes, que una de las posibles razones por lo que no existe una articulación entre los dos registros de representación (gráfico y algebraico) se debe a que en la forma de abordar el tema de sistemas de ecuaciones lineales desde los primeros niveles de enseñanza de las matemáticas (2º de secundaria), se prioriza el resolver sistemas de dos incógnitas mediante el manejo eficiente de los procedimientos y algoritmos de carácter algebraico, dejando de lado las representaciones gráficas. De esta manera se omiten los significados y propiedades que una ecuación guarda respecto a su representación gráfica.

La puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, puede establecerse a través de una correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales de cada uno de los registros.

Entonces, no puede haber utilización correcta de las representaciones gráficas cartesianas sin discriminación explícita de las variables visuales pertinentes y sin una correspondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables y las unidades significativas de la escritura algebraica (Duval, 1988).

Este trabajo de investigación forma parte de los estudios enfocados a la identificación de dificultades que presentan los estudiantes ante la articulación de los registros gráfico y algebraico. Pero creemos necesario seguir realizando este tipo de estudios para conocer los argumentos y concepciones que presentan los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra lineal, para modificar nuestro sistema de enseñanza.

Agradecimientos

Agradezco al CONACYT por el apoyo otorgado a través del proyecto 2002-C01-41726 al financiar este trabajo de investigación.

Agradezco al Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN por darme la oportunidad de realizar este trabajo de investigación en sus instalaciones.

De manera particular, a la Dra. Asuman Oktaç por su apoyo y comprensión para el desarrollo de este trabajo. También al M.C. Carlos A. García P. quien me impulsó en el ámbito de la investigación.

Bibliografía

Acuña, C. (1998). La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano. F. Hitt (ed.). *Investigación en Matemática Educativa II*, Grupo editorial Iberoamérica, 203-223.

Clement, J. (1985). *Misconceptions in Graphing*. P. M. E. 85, 369-375.

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: I'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (ed.). *Investigación en Matemática Educativa II*, Grupo Editorial Iberoamérica, 173-201.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Vega, M, Trad.). Santiago de Cali, Colombia.: Peter Lang. (Trabajo original publicado en 1995).

Eslava, M. y Villegas, M. (1998). *Análisis de los modos de pensar Sintético y Analítico en la representación de las categorías de tres rectas en el plano*. Tesina de Diplomado, UAEH. Hidalgo.

Herscovics, N. (1980). *Constructing Meaning for linear Equations; a problem of Representation*. R. D. M., 13, 351-383.

Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de Maestría, Cinvestav–IPN, México, D.F, México.

Ramírez, C. (2005). *Dificultades que presentan los estudiantes en los sistemas de ecuaciones lineales en los modos geométrico y analítico*. Tesis de Licenciatura, UAG, Acapulco, Guerrero.