

EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CÁLCULO CON EL USO DE LA TECNOLOGÍA

Arturo Arellano Rosario, Mayra Solana Sagarduy

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

arellano127@yahoo.com.mx, mayra_ss@yahoo.es

Resumen. *En cualquier carrera universitaria, los estudiantes se enfrentan a la asignatura de cálculo donde se les expone una diversidad de definiciones y teoremas que han sido elaborados durante años por muchos matemáticos. Los teoremas y conceptos, tienen un significado matemático preciso, pero los estudiantes, en general, encuentran las definiciones matemáticas y los teoremas formales tan comprimidos y exactos que no las pueden manipular, ni asimilar, ni comprender fácilmente. Aquí es donde adquieren importancia las nuevas tecnologías de la computación, que junto con la enseñanza problémica permiten diseñar experiencias en las cuales está presente la noción del cálculo, logrando así desarrollar el pensamiento creador de los estudiantes. En este trabajo resumimos parte del proyecto de investigación que estamos desarrollando con un grupo de estudiantes de Cálculo I en la Unidad Académica de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero. En el mismo mostramos algunas de las prácticas realizadas y damos conclusiones parciales.*

Palabras Clave: Enseñanza problémica, pensamiento creador.

Introducción

El bajo rendimiento académico y la deserción de estudiantes en los cursos de cálculo en cualquier carrera universitaria, ponen de manifiesto las dificultades que éstos confrontan para entender los conceptos y teoremas matemáticos.

Como es de todos conocidos uno de los grandes problemas de la educación en todos los países es la concerniente a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Los estudios realizados muestran que los índices de reprobación, desde los niveles básicos hasta el

superior, son alarmantes. Particularmente problemáticos son los conceptos asociados con función, límite, continuidad, tangente, derivada e integral, que se introducen en la interfase bachillerato-universidad en el contexto del pensamiento matemático avanzado. En la asignatura de cálculo, los alumnos del último año de preparatoria y primer año de universidad elaboran una diversidad de concepciones, que los sumen en estados de confusión y conflicto en el momento de estudiar las definiciones formales, definiciones que son resultados de todo un proceso que se produjo a través del tiempo en las mentes de los matemáticos, mediante el empleo de objetos geométricos, palabras y símbolos. Las definiciones y conceptos que resultaron de este proceso, conforman una rigurosa cadena ordenada de proposiciones lógicas y símbolos que tienen un significado matemático preciso. Pero los estudiantes, en general, encuentran las definiciones matemáticas formales tan comprimidas y exactas que no las pueden manipular, ni asimilar, ni comprender fácilmente (De la Torre, 2002). Esto podría deberse a que la manera en que se explica la matemática tradicionalmente, se ha visto privilegiada por la adquisición de un cuerpo de conocimientos ya construidos, donde los estudiantes han tenido poco o ningún contacto con el aspecto experimental e investigativo de la actividad matemática. Pero, el gran avance de la computación y el amplio desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC's), a finales del siglo pasado, permitió el desarrollo de equipos de cómputo, herramientas de programación y aplicaciones con gran potencial, que por su rapidez y facilidad de uso, abrieron enormes posibilidades de aplicación en todos los campos de la actividad humana, donde los recursos informáticos y tecnológicos facilitan la simulación de situaciones problemáticas reales y actualizadas, las cuales concretan la aplicación de la matemática en sus diferentes esferas, contribuyendo al fortalecimiento de valores y el desarrollo multilateral del estudiante (Lujan y Pochulu, 2006).

En el sector educativo, especialmente en el aprendizaje de la geometría, existe actualmente una inmensa gama de herramientas tecnológicas que facilitan la apropiación, por parte de los estudiantes, de los conceptos matemáticos básicos y el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

La investigación educativa en matemáticas está ligada al desarrollo del pensamiento crítico y creador de los estudiantes, que se manifiesta como proceso de búsqueda, elaboración de hipótesis, razonamientos, emisión de juicios, etc., pero en su mayoría, los alumnos no están preparados para hacer conexiones y entender el valor y el sentido de lo que se les enseña. A pesar de que nuestros alumnos necesitan desesperadamente entender conceptos matemáticos para poder desempeñarse bien en sus trabajos y en la sociedad en que vivirán y trabajarán, la mayoría tiene dificultad para entender dichos conceptos y teoremas tal como se los enseña habitualmente (CORD Communications, 2003). Entonces, ¿cuál es la mejor manera de transmitir la gran cantidad de conceptos que se enseñan en una clase para que todos los alumnos puedan retener y utilizar esa información?, ¿Cómo se puede visualizar mejor los distintos temas a enseñar y que son como piezas interconectadas que se agregan a lo que ya sabe el alumno?, ¿Cómo puede un profesor comunicarse efectivamente con sus alumnos cuando estos preguntan acerca del por qué, del significado y de la pertinencia de lo que están estudiando?, ¿Cómo podemos abrir las mentes de nuestros alumnos para que aprendan técnicas de aprendizaje que les abrirán las puertas a muchas oportunidades a lo largo de sus vidas? De aquí surge esta pregunta: ¿se podría, con ayuda de las TIC's lograr que el estudiante sea capaz de hacer conjeturas que lo acerque a los métodos de trabajo científico llevándolo a plantear y demostrar teoremas en la asignatura de Cálculo I? Estas son algunas de las cuestiones que podrían plantearse los docentes al enseñar el Cálculo, aunque las respuestas son difíciles de encontrar.

El marco teórico en que se inserta esta investigación es, por una parte, la enseñanza problémica, buscando un acercamiento del estudiante a los métodos de trabajo de investigación científica y, por otra, las ideas aparecidas en la literatura sobre la utilización de la computadora en la enseñanza, para con apoyo en la visualización, contribuir al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Nuestro objetivo principal es que en el marco de la enseñanza problémica y mediante la manipulación de gráficas en la computadora debidamente diseñadas para las actividades

buscando que los alumnos logren conjeturar las hipótesis de los distintos teoremas y conceptos que se encuentran al estudiar el cálculo.

Metodología

En este trabajo, exponemos algunas experiencias de investigación en matemáticas llevadas a cabo con el software matemático The Geometer's Sketchpad, las cuales deja las puertas abiertas para la creación de nuevos conocimientos en la disciplina, fortaleciendo el potencial de los estudiantes y favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático.

El trabajo con los estudiantes se llevará a cabo en dos etapas para cada actividad: primero, se les permitirá la manipulación libre de imágenes gráficas previamente diseñadas utilizando el software matemático. Después, por medio de preguntas problémicas, se les guiará hasta lograr que por sí mismo enuncie el teorema sobre el que estemos trabajando, permitiendo la discusión sobre si las condiciones son necesarias y/o suficientes, cambiando, quitando o agregando hipótesis. Dichas imágenes gráficas están enfocadas a la búsqueda del desarrollo del pensamiento creador de los estudiantes, y a un mejoramiento significativo en la comprensión de las condiciones de los teoremas y definiciones que permitan a los estudiantes continuar aprendiendo dentro de un medio científico, haciéndose cuestionamientos claves dentro de la materia a estudiar, y en especial, se busca el fortalecimiento de los procesos mentales que se dan en los alumnos en el momento en que éstos deben desarrollar, en sus propias mentes, las ideas y herramientas matemáticas, de modo que adquieran un nivel avanzado de razonamiento que permita superar con eficiencia los distintos obstáculos asociados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta materia. Estas preguntas se basan en la observación del movimiento de los distintos objetos gráficos que se les presentan a los estudiantes en las actividades.

Estas actividades formarán parte del curso de Cálculo I, utilizando como texto el libro de Cálculo de Spivak, M. (1999), y los teoremas en cuestión serán formalizados y demostrados posteriormente en clase.

Resultados

Aunque el trabajo aún no ha concluido, con las actividades realizadas hemos podido verificar que, con el apoyo del software y las preguntas problémicas, se logra una visualización que genera una nueva forma de realidad virtual asociada a objetos conceptuales matemáticos.

Al inicio se trabajó con actividades de introducción donde los alumnos conocieron el concepto de dominio, límite y continuidad, para que se familiarizaran con el software. En las figuras 1 y 2 mostramos dos de las graficas con que los estudiantes trabajaron cambiando los distintos parámetros de la función.

Hasta ahora se han trabajado en el laboratorio, los tres teoremas fuertes de continuidad, y algunos teoremas de derivadas, y se ha logrado por medio de las preguntas problémicas que los estudiantes conjeturen y puedan deducirlos. Estos resultados parciales obtenidos, nos lleva a seguir pensando que trabajando de esta manera se puede propiciar que el estudiante logre dar proposiciones, y generalizaciones despertando así su interés y participación en su trabajo escolar, provocando además el desarrollo del pensamiento creador y un mejoramiento significativo en la comprensión de las condiciones de los teoremas y definiciones, permitiéndoles así continuar aprendiendo dentro de un medio científico, haciéndose cuestionamientos claves, y en especial, fortaleciendo los procesos mentales que se dan en el momento de desarrollar en sus propias mentes las ideas y herramientas matemáticas.

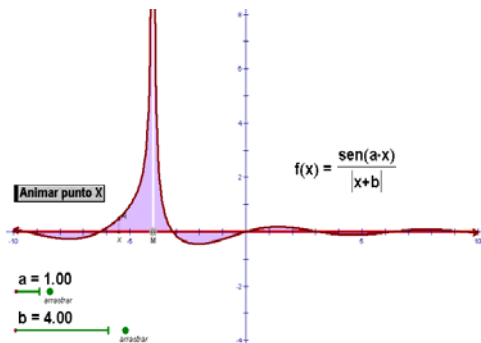


Figura 1. Actividad: Dominios

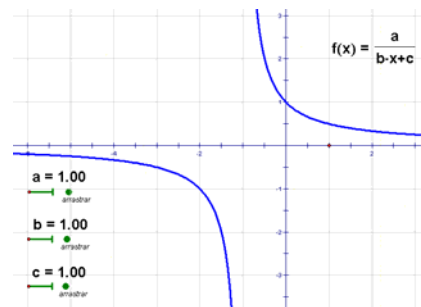


Figura 2. Actividad: Gráficas

Por medio de la observación, manipulación libre de las gráficas, y de preguntas problémicas, se les guió hasta lograr que por sí mismos enuncien los conceptos y teoremas sobre el que estemos trabajando tales como “límite” (figura 3) y “continuidad” (figura 4 y 5), permitiendo la discusión sobre si las condiciones son necesarias y/o suficientes, cambiando, quitando o agregando hipótesis.

También se logró que los estudiantes pudieran encontrar las condiciones necesarias para enunciar los tres teoremas fuertes de continuidad por medio de las preguntas problémicas que se les hizo para guiarlos en la búsqueda de estos resultados (figura 6, 7 y 8).

Notamos que el pensamiento creador de los estudiantes aumenta significativamente cuando ellos “ven” el por qué están aprendiendo esos conceptos y cómo se pueden usar los mismos para resolver problemas que trascienden el ámbito del aula. La mayoría de los alumnos aprende mucho más eficientemente cuando se le permite trabajar en equipos compartiendo problemas y soluciones entre ellos.

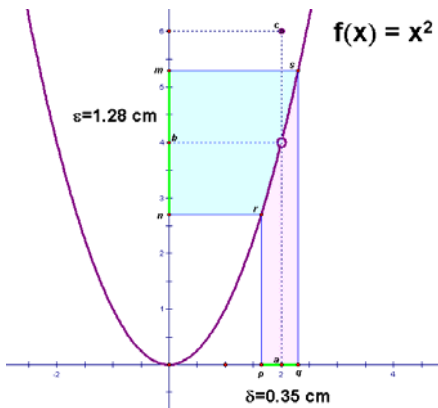


Figura 3. Actividad: Límites

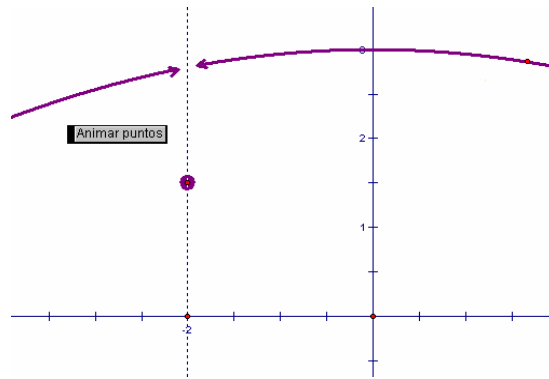


Figura 4. Actividad: Continuidad 1

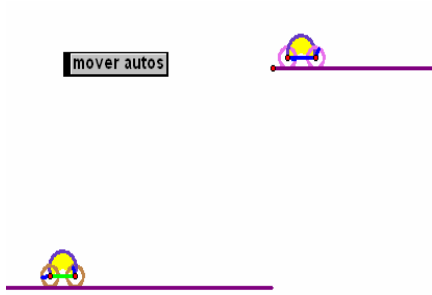


Figura 5. Actividad: Continuidad 2

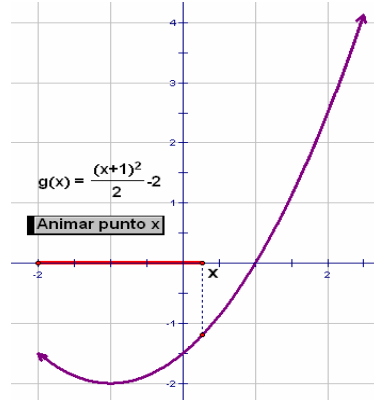


Figura 6. Actividad: Primer teorema fuerte

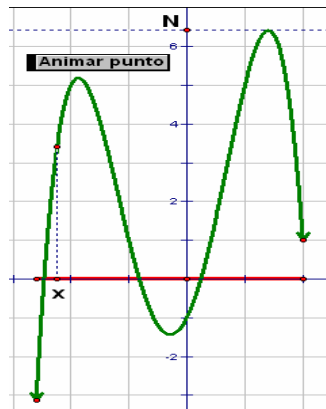


Figura 7. Actividad: Segundo teorema fuerte

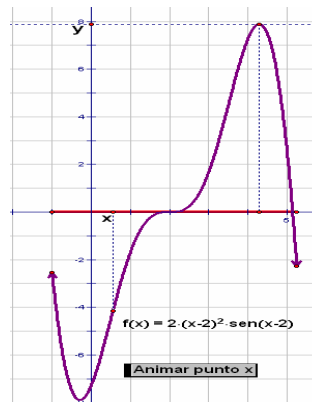


Figura 8. Actividad: Tercer teorema fuerte

Discusión

El trabajo de laboratorio es esencialmente cooperativo. En este tipo de actividades, los alumnos trabajan con otros compañeros y delegan, observan, sugieren y analizar.

El trabajo más difícil para el profesor es impedir que el alumno active las distintas herramientas del software y se ponga a crear dibujos que no conviene para nuestros propósitos.

Afortunadamente el software utilizado en esta investigación permite ocultar algunas de las herramientas para que no estén a disposición del alumno en este archivo (en este caso

ocultaríamos la caja de herramientas) y así trabajen encaminados únicamente a la actividad.

Como es tradicional en la enseñanza del cálculo en las distintas carreras universitarias, en el momento en que el maestro dicta a sus alumnos los conceptos y teoremas, el problema habrá acabado sin pena ni gloria para el estudiante sin darle la oportunidad de mostrar sus capacidades para desarrollar su razonamiento matemático. Si, por el contrario, el alumno se dedica a pensar en la figura que se obtiene al cambiar los parámetros de las gráficas de las funciones, analiza distintas posibilidades, observa, manipula las gráficas y explica por qué se da ese concepto como resultado, intenta convencer (demostrar) a sus compañeros de por qué va a ser con otras condiciones e hipótesis.

La comprensión de estos conceptos y teoremas involucran distintos aspectos, entre los cuales se destaca la historia del concepto, los objetos geométricos y la visualización que permiten concebir dicho concepto, los obstáculos que los alumnos enfrentan al abordarlo y la relación entre el concepto-imagen y el concepto-definición, que debe lograrse para su plena comprensión.

Los conceptos fundamentales del Análisis Matemático, como los de derivada e integral, se valen de los conceptos del cálculo para formalizar otros, aún más abstractos, que con frecuencia desembocan en conocimientos más profundos y refinados (De la Torre, 2002).

Conclusiones

Hoy en día con los nuevos recursos tecnológicos, se pueden realizar actividades abiertas e innovadoras que despierten interés en los alumnos, y que concluyan en una verdadera investigación matemática, donde el estudiante descubra y construya conocimientos, pudiendo llegar a ser temas no explorados aún por sus propios docentes.

A partir de los resultados parciales obtenidos, se piensa que el uso de los nuevos recursos brinda un importante apoyo en la labor de investigación en matemática, principalmente porque permiten: a) Formulación de hipótesis de trabajo, b) Comprobación de estas

hipótesis, c) Elaboración de conjeturas y formulación de contraejemplos, d) Elaboración de complicados y tediosos cálculos algebraicos.

En este sentido, se piensa que es muy importante generar en clases situaciones interesantes y bien pensadas, que “intriguen” al alumno motivándolo a estudiar e impidan que el olvido llegue fácilmente.

Las investigaciones que aparecen redactadas en múltiples revistas científicas revelan, que en matemáticas el trabajo de los estudiantes en un ambiente con computadoras es cualitativamente superior al tradicional. En este trabajo aún no concluido, se ha podido verificar tales afirmaciones, es decir, que los alumnos van más allá de los computadores programáticos, formulando conjeturas, acuñando definiciones, haciendo demostraciones, proponiendo y resolviendo problemas. El ambiente computacional es particularmente propicio para la exploración de un tópico matemático, el cual les lleva a proponer conjeturas y a “descubrir” relaciones matemáticas.

También se concluye que las herramientas computacionales han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático.

En consecuencia, estratégicamente utilizados, los nuevos recursos tecnológicos pueden provocar en los estudiantes sensaciones de capacidad, confianza en sí mismos e interés por adquirir los nuevos conocimientos que le permitan corroborar lo descubierto y explicar teóricamente su causa.

En el terreno de la matemática escolar básica, el uso de la calculadora y de software educativo, han proporcionado a los educadores ambientes de experimentación y nuevas metáforas para comunicar ideas matemáticas. Así, hoy en día es posible diseñar actividades de aprendizaje en los distintos escenarios del cálculo, los cuales llegan a ser apropiados para que el alumno confronte rápidamente problemas no triviales -pero tratables en su nivel- efectuando la exploración detallada de ejemplos paradigmáticos, busque contraejemplos y lleve a cabo una experimentación sistemática con el auxilio de modelos concretos.

Los software matemáticos son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas.

Con frecuencia, la secuencia de trabajo en una clase de matemáticas es: *Haz, discute, descubre*. D. Fielker (citado en Mora, 2007), en su libro Rompiendo las cadenas de Euclides, propone hacer permutaciones de estos términos según la tarea que queramos proponer a los estudiantes.

Cuando el alumno piensa de antemano en la situación, planifica y analiza las distintas posibilidades, puede imaginar lo que va a ocurrir, entonces la secuencia correcta podría ser: *Discute, haz, descubre*, si lo que necesita es realizar un trabajo práctico antes de emitir hipótesis. Aún más interesante sería: *Discute, descubre, haz* cuando lo que se quiere es que emita su hipótesis y después confirme o refute sus conjeturas (Mora, 2007).

Reconocimientos

Damos nuestros sinceros agradecimientos a la Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco de la Universidad Autónoma de Guerrero por permitirnos usar el aula especializada como laboratorio para llevar a cabo las actividades que servirán como eje central para nuestra investigación.

Hacemos un reconocimiento especial a la Dra. Mayra Solana Sagarduy por el gran interés que tiene para que este proyecto se concluya con buenos resultados y al Dr. Ramiro Santiago Bustamante por sus oportunas sugerencias.

También agradecemos enormemente a los estudiantes de 1°B en la asignatura de Cálculo I por mostrarse participativos en cada una de las sesiones para realizar las actividades propuestas con “*El geómetra*”.

Bibliografía

Spivak, M. (1999). *Cálculus, cálculo infinitesimal*. México: REVERTÉ

Granville, W. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: LIMUSA.

CORD Communications. (2003). *Enseñanza Contextual de Matemática, Piedra Angular del Cambio de Paradigmas*. Extraído en septiembre 25, 2007, de

<http://www.cord.org/uploadedfiles/Ensenanza%20Contextual%20de%20Matematica.pdf>

De la Torre, A. (2002). *Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*.

Extraído en agosto 8, 2007, de <http://matematicas.udea.edu.co/~edumath/LINKS/presentacion.htm>

Larios, V. (2006). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio*. (volumen 9, pp 361-382). México, DF.

Lujan, M. & Pochulu, M. (2006). *4º Jornada de Informática y Educación: El rol de los nuevos recursos en la investigación educativa en matemáticas*. Extraído en septiembre 15, 2007, de

<http://jornadaie.unvm.edu.ar/pon15.pdf>

Mora, J. A. (2007). *Geometría dinámica en secundaria*. Extraído en septiembre 20, 2007, de

<http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007%20Granada%20JAMora.pdf>

Geometría Dinámica con el Geometer's Sketchpad. (n.d.). Extraído en septiembre 25, 2007, de

<http://www.zonavirtual.org/Sketchpad/Sketch.htm>