UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LA INTEGRAL. LA APROXIMACIÓN COMO UNIDAD DE ANÁLISIS

Yuridia Arellano, Silvia Vargas, J. Marcos López, Ricardo Cantoral

CINVESTAV-IPN

yarellano@cinvestav.mx, svargas@cinvestav.mx, jmlopez@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. *El objetivo primordial de este trabajo es reconocer una unidad de análisis adecuada, que sea coherente con lo que la socioepistemología propone y que nos permita hacer un análisis sistémico de la noción de Integral. Utilizamos para ello la metodología propia de la socioepistemología, que consiste en un análisis sistémico de las cuatro componentes que consideramos básicas para el estudio en la construcción del conocimiento matemático, estas son, a saber, las dimensiones epistémica, didáctica, cognitiva y social. De modo que tras un primer estudio epistemológico postulamos a "la aproximación" como unidad de análisis e intentamos dar evidencia de que está presente en las cuatro dimensiones consideradas en el marco. Además de identificar cuatro practicas de referencia en el desarrollo epistémico de la integral comparar y medir, algoritmizar, formalizar.*

Palabras Clave: Aproximación, Socioepistemología, Representación Social.

Introducción

En la búsqueda de explicar cómo se construye el conocimiento matemático, haremos referencia no sólo en la parte cognitiva alrededor de la construcción del objeto sino desde un punto de vista que ha podido entender que los conceptos no solo se dan en el dominio matemático, sino que también se dan en las prácticas de referencia (Cantoral y Farfán, 2003). Para ello hemos considerado importante explicar esta construcción en cuatro diferentes categorías que desde nuestro punto de vista son las básicas para mostrar que la aproximación es fundamental para explicar la construcción de un concepto tan complejo como lo es la integral. La socioepistemología como una aproximación teórica incorpora de manera sistémica estas cuatro componentes; la epistemología del conocimiento, la dimensión sociocultural del saber, los procesos cognitivos y los mecanismos de institucionalización (dimensión didáctica). El siguiente diagrama ilustra las componentes que este acercamiento considera, en el que la componente social, se representa como la reguladora del resto de las dimensiones.

Figura 1. Las cuatro componentes del acercamiento socioepistemológico.

El estudiar a la integral desde una perspectiva socioepistemológica, abre un panorama distinto y amplio que sólo hacerlo de manera tradicional, es decir, no es suficiente con entender la parte epistemológica del conocimiento sino que habría que entender, como se construyó este sistema complejo de conceptos que nos llevan en la actualidad al concepto de integral. Es así como las investigaciones socio epistemológicas han ayudado a precisar que dicha problemática se trata de la ausencia de marcos de referencia que permiten re-significar el conocimiento matemático (Buendía y Cordero, 2005, citado en Cordero 2005). También busca explicar fenómenos didácticos producidos en el campo de las matemáticas a través del examen del papel que juega la construcción social del conocimiento bajo un enfoque sistémico: las dimensiones epistemológica, didáctica, cognitiva y social (Cantoral y Farfán, 1998). Además de explicar la generación del saber a través de las prácticas sociales que le dan origen (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2000; Cordero, 2001; Cantoral y Farfán, 2000).

Desde esta perspectiva, nuestra investigación propone ver a la integral con un enfoque distinto, lo que pudo y puede ser un acercamiento al conocimiento institucional mediante *la aproximación*, la cual explique al cálculo integral como una manifestación de sus usos en el discurso escolar.

De la misma manera reconocemos que existen esquemas de conocimiento compartido por una sociedad (Perinat, 2007), las representaciones sociales (RS), que incorporamos en la dimensión social en este estudios intentando con ello explicar la evolución del concepto de integral como un constructo social. Aceptamos que dentro de las representaciones sociales, son las prácticas sociales quienes orientan y organizan a las prácticas de referencia (PR). Asimismo intervienen en procesos tan diversos como la construcción de conocimientos, en el desarrollo individual y colectivo. Por tanto el abordaje de las RS posibilita, entender la dinámica de las interacciones sociales y aclarar los determinantes de las PS, pues la representación, el discurso y la práctica se generan mutuamente (Abric, 1994).

Metodología

La metodología se basa en el marco teórico socioepistemológico que postula desde una perspectiva sistémica la articulación de las cuatro componentes: la epistémica, la cognitiva, la didáctica y la socio-cultural, se basa en un marco teórico que permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple (Cantoral y Farfán, 2004).

Desde esta perspectiva es necesaria la identificación de una unidad de análisis (UA) ya que esto nos permitirá articular las componentes. La UA se caracteriza como elemento que regula y cohesiona el quehacer humano respecto a las prácticas de referencia, está por tanto presente en las cuatro dimensiones de la construcción social del conocimiento matemático. La elección de una UA nos conduce a la realización de un análisis tanto epistémico, didáctico, cognitivo y social.

Recurrimos al análisis de una línea de tiempo identificando aspectos epistémicos que se mantenían en cada época y aspectos que eran cambiantes, esto con la finalidad de reconocer las practicas de referencia y/ sociales inmersas, que nos llevaran a reconocer la posible UA. Para ello se revisaron distintos libros de historia de las matemáticas, de texto, y de divulgación científica, de diferentes épocas y autores. Teniendo como resultado la elección de *la noción de aproximación* como UA, para probar nuestra conjetura, como segundo análisis se revisaron diferentes libros didácticos, tratando de identificar los acercamientos utilizados para el trabajo con la integral, un tercer análisis fue buscar investigaciones con las cuales obtener información cognitiva de los estudiantes y como en el caso anterior, analizar si la UA que se había elegido seguía presente. Como cuarto análisis se recurrió a la observación del discurso cotidiano, y la noción de representación social, pues así pudo mostrarse la necesidad social de utilizar la aproximación cotidiana y escolarmente.

Resultados

Los resultados los hemos estructurado de acuerdo a las componentes utilizadas en la socioepistemología, de acuerdo a nuestra metodología.

Análisis epistémico

En parte se hará mención de las etapas fundamentales que identificamos al realizar el análisis epistemológico, así también se describirá en que consiste cada una de ellas.

Comparar

Desde los griegos y su trabajo geométrico la comparación fue uno de los métodos más utilizados y hasta su momento efectivo, aproximar un área desconocida comparándola con otras ya conocidas o fáciles de conocer, resultó ser un método eficiente para dar inicio a las primeras aproximaciones de lo que hoy se conoce como integral (como área bajo la curva) estas comparaciones utilizadas frecuentemente por Arquímedes y sus seguidores, llegaron a formar parte esencial de los llamados métodos de

Arquímedes y su uso excelente del método de exhausión para aproximar las áreas de figuras geométricas, volúmenes de cuerpos, longitud de curva, etc.

Un ejemplo claro de las aplicaciones de los métodos de Arquímedes, es la cuadratura de la parábola (En su libro Cuadratura de la parábola, clasificada como la segunda obra escrita)

Una sección de una parábola excede en $1/3$ *el área del triangulo de igual base que la sección y cuyo vértice es el de la parábola. (Fig. 1)*

En el Método, Arquímedes muestra como usó ideas precedentes de la mecánica para obtener teoremas matemáticos. Da dos métodos para hallar el área de un segmento parabólico. El primero utilizando argumentos mecánicos donde se compensan áreas mediante el principio de la palanca.

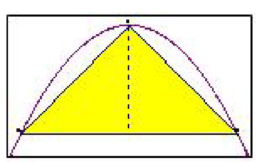


Fig. 1 Sobre la cuadratura de la parábola

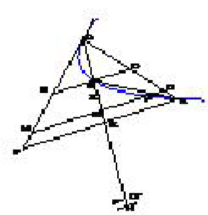


Fig. 2 Método de la palanca

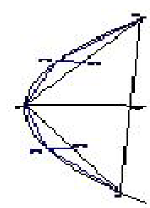


Fig. 3 Por inscripción de triangulos.

En un segundo método se prueba que el segmento parabólico puede "agotarse" mediante una serie de triángulos.

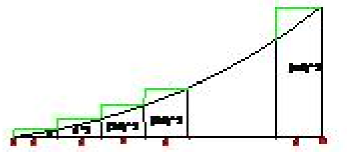
Medir

Es conveniente y necesario señalar las diferencias entre el método de los antiguos griegos y la integración. La cuestión está en que el método de las sumas integrales de los antiguos se apoya en un concepto de área intuitivo, no rigurosamente definido y no utiliza el aparato aritmético-algebraico. Otra es el hecho de que el método usado por los antiguos para determinar cuadraturas y curvaturas de figuras geométricas estaba basado en el uso de la comparación de magnitudes a través de ciertas razones y proporciones, y no precisamente la medida de esta con parámetros numéricos. La etapa en que esta idea intuitiva de área se relaciona con la determinación de medidas numéricas la hemos llamado *medir.* El ocultamiento permanente del infinito convierte a casi toda la matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere una salida: el método de exhausión de Eudoxo, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados

Algoritmizar

En el siglo XVII, se impuso una nueva actitud hacia los problemas matemáticos. En este mismo siglo se produjo una impresionante profusión de nuevos resultados, a base de nuevas técnicas y métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico ya que era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas que las nuevas condiciones sociales planteaban, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque hubiera que echar por la borda el rigor.

En particular, se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido (indivisibles, infinitamente pequeños, incrementos evanescentes, cantidades despreciables, etc.), se desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, y que conducen, bajo una visión de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal. El nuevo método más importante para calcular áreas, volúmenes y otras cantidades comenzó con modificaciones del método exhaustivo. Mientras que este usaba diferentes tipos de figuras aproximantes rectilíneas, dependiendo del área curvilínea en cuestión, algunos adoptaron en el siglo XVII un procedimiento sistemático utilizando rectángulos, como se muestra a continuación.



$A = d^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$. La suma de las *d* es la longitud fija OB dividida por *n*. Resulta ser $A = OB^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$.

Figura 3. Aproximación a áreas curvilíneas

Si se considera entonces, como lo hicieron ellos, que los dos últimos términos se pueden despreciar cuando n es infinita, se tiene el resultado correcto. El proceso de paso al límite no había sido introducido todavía – o era percibido toscamente.- y por lo tanto despreciar términos tales como los dos últimos no estaba justificado. Vemos que el método requiere aproximar la figura curvilínea mediante otras rectilíneas, como en el método exhaustivo. Sin embargo hay un cambio vital, en lugar de la demostración indirecta utilizada en el método de exhausión, aquí el número de rectángulos se hace infinito, aunque pensar en términos de *límite* no era en absoluto implícito en esta época. Este nuevo enfoque, fue seguido por muchos otros, incluyendo a Fermat. (Bromberg, S., y Rivaud, J., 2001).Este resultado también fue obtenido independientemente por otros (como Cavalieri) aunque en algunos casos sólo en forma geométrica y para *n* y *a* más limitados.

El concepto de lo infinitamente pequeño, usado hasta entonces preferentemente en sentido filosófico, se introdujo de lleno, gracias a Kepler (1571-1630), en la geometría. La aparición del libro de Cavalieri (1598-1647), *Geometría indivisibilibus continuorum* (1635) estimuló a un número considerable de matemáticos en diferentes países para estudiar problemas que implican infinitesimales. Los problemas fundamentales comenzaron a ser abordados en una forma más abstracta y, de esta manera, ganaron en generalidad. Otros como Fermat (1601-1665), Descartes (1596-1650) y John Wallis (1616-1703 condujeron la nueva álgebra a dominar el tema. Y encontraron, cada uno a su manera, fórmulas equivalentes a $\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$, primero para m entero positivo, posteriormente para m entero negativo y fraccionario. La representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación. Centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc. Se hacía necesario, conservando el núcleo de las ideas del cálculo integral, apartándose de la forma geométrica y consolidar una matemática infinitesimal de tipo aritmético-algebraico. En este proceso Wallis (1616-1703) extendió el álgebra hacia un análisis verdadero.

Formalizar

Las distintas etapas de ampliación de los procedimientos antiguos, con el método de exhausión, la teoría de los indivisibles y la aritmetización de esta última se sucedieron históricamente, paralelamente al estudio de las tangentes, de la cuadratura de las parábolas más generales y de su aplicación a problemas sobre extremos.

En el siglo XVIII se presenció un constante desarrollo de los métodos infinitesimales, la consolidación del concepto de función y los orígenes de áreas superiores del análisis, acompañado de disputas ideológicas y metodológicas sobre la naturaleza de lo infinitamente pequeño. En esos momentos se contempló que una sucesión infinita de valores de una variable (llamémosla x), la diferencia entre dos valores sucesivos era precisamente el dx, que era infinitesimal. Al tomar la suma de tales diferencias, denotada por $\int dx$ (el símbolo $\int$ es una deformación de la letra S de suma), se obtiene una variable completa *x*, es decir, $\int dx = x$ (Muñoz, 2006).

En esta época también se abandonó el estudio de curvas geométricas y se profundizó el estudio de los infinitésimos, sobre una teoría formal de funciones. De alguna manera esto significó una ruptura entre un Cálculo de variables y un Cálculo de funciones numéricas.

El cálculo infinitesimal de Leibniz parece ser una extrapolación lógica de los conceptos simples de sucesiones de sumas y diferencias, para sucesiones de números, al caso de sucesiones de variables asociadas a la curva geométrica. Las sucesiones básicas asociadas a la curva son sucesiones de la abscisa x y ordenada y de los infinitos vértices del polígono. Se supone que las cantidades dx y dy no son cero sino infinitamente pequeñas, así se asume que el producto se vuele despreciable. De este modo se hacen participes las diferenciales de orden superior como $d(dx)=d^2x$, y así sucesivamente.

Leibniz (1646 —1716), tal como hizo en la suma de la serie de los inversos de los números triangulares, consideraba sumas y diferencias de sucesiones de números. Observó por ejemplo que dada la sucesión a_0, a_1, a_2,..., a_n, si consideramos la sucesión de diferencias d_1, d_2,..., d_n, donde $d_i=a_i-a_{i-1}$. Entonces $d_1+d_2+\cdots+d_n= (a_1-a_0)+ (a_2-a_1)+ \cdots + (a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$.

Si suponemos que la distancia entre estas ordenadas es 1, entonces su suma $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n$ es una aproximación de la cuadratura de la curva, mientras que la diferencia entre dos sucesivas yi's da aproximadamente la pendiente de su tangente. Además, cuanto más pequeña sea la unidad 1 elegida, mejor será la aproximación. Si la unidad se pudiera elegir infinitamente pequeña, entonces las aproximaciones serían exactas, la cuadratura sería igual a la suma de ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de ordenadas. Con el contexto y la estrategia se derivan argumentos próximos para relacionarlos a la definición de integración y a la idea de función primitiva, esto a través de procedimientos de "alcanzar", es decir utilizando la noción de límite en expresiones analíticas bajo nociones geométricas.

Bajo esta idea estudiamos la definición de limite de la suma, "$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x$" y la concepción de existencia de la función primitiva.

El análisis didáctico

Los libros de texto son una parte de la expresión del Discurso Matemático Escolar. Para efectos del presente trabajo se desarrolló un análisis de libros de texto correspondientes al cálculo integral, que estuvieron o están en uso, que se muestran en la siguiente tabla, en la que se describe distintos tratamientos didácticos con su respectiva descripción.

Sumando áreas:
Un acercamiento utilizando la noción de área, enfocándose en el cálculo de áreas de curvas no lineales, utilizando el método de la partición de un intervalos k en n sub-intervalos iguales y así construir rectángulos de base k/n de modo que el área de estos rectángulos irán cubriendo el área a encontrar, haciendo con esto una *aproximación*. (Stewart, J. 1994), (Tipler, P. 1999).
Estudiando el movimiento:
Un acercamiento con base en el estudio de la velocidad de un cuerpo y de su posición, de modo que la función derivada de una función tiempo-distancia (en particular) será la modelación de la velocidad instantánea del cuerpo en un tiempo t, el modo inverso se aproxima la función integral que representara la distancia recorrida por el cuerpo en un tiempo t, si su razón de velocidad esta dada. (Imaz, C. 1968), (Hughes, D. et al 2002).
Aplicando fórmulas:
Un acercamiento con base en la primitiva de una función considerando a la integral como una anti-derivada. Se parte de la familiarización con las operaciones inversas, así la integración será la operación inversa a la derivada destinado a poner a la disposición de los estudiantes un conjunto de reglas algorítmicas. Aunque en un momento el tratamiento particular de la integral definida esta basado en la sumatoria de áreas. (Zubieta, 1961), (Purcell, E.et al. 2003) (Granville, 1982)(Leithor 1998) (Ayres, 1971).

El análisis cognitivo

Mencionaremos algunos resultados que evidencian cómo la aproximación es parte importante en la formación del concepto de integral y cómo asimilan los estudiantes este hecho.

Calvo (1997), realiza una investigación con estudiantes de entre 17 y 20 años del Curso de Orientación Universitaria (España). En esta investigación intentaba realizar un análisis de algunos aspectos que involucrarían una presentación de las integrales a partir de la noción de área. Entre las conclusiones extraídas se encuentra:

✓ Que al acotar áreas de regiones no rectilíneamente determinadas se detectaron tres líneas de acción:

- Ubican una figura relacionada por inclusión con la región a acotar.
- Ubican una figura con la que comparar visualmente usando argumentos cuya validez es discutible.
- Aproximan el área y allí “deducir” las cotas.

✓ Que el tratamiento para las cotas inferiores y superiores, en el caso de las regiones definidas bajo un grafico no es análogo y parece estar relacionado con la concavidad de la función.

También mencionaremos a Olave, (2005) quien caracteriza las estrategias utilizadas por los estudiantes en el cálculo de áreas bajo curvas:

1. Divide a la región en figuras conocidas de las que conoce como calcularles el área.
   i. Acotar por exceso con trapecios, el caso de la hipérbola. y por defecto con triángulos, el caso de la parábola.
   ii. Usa partición sobre alguno de los ejes.

2. Aproximar mediante *estimación visual* con argumentos o explicaciones visuales que pueden ser validas o no.
   i. Figuras familiares que consideran equivalentes a la región que analizan.
   ii. Identificar las curvas involucradas con otras curvas.
   iii. Comparar el área de la región con el de otra figura estimando que tienen igual área.

Con lo que muestra que las estrategias de aproximación están presentes en los estudiantes ya sea mediante la exhausión o mediante la estimación.

El análisis social

La condición natural del hombre como ser social, le permite resolver sus necesidades básicas, compartir intereses comunes comunicando sus formas de pensar y proceder en las actividades que realiza o realizan en grupos sociales, esta forma de compartir experiencias, observando, analizando y comunicando, es una forma de construcción del conocimiento. (Dolores, Gómez y Martínez-Sierra, 2005). Desde esta idea, se considera que lo gestual es parte de lo discursivo así pues el habla es parte del discurso y éste último es una práctica social que permite acceder y desarrollar al conocimiento matemático (Aparicio, 2006), entonces podemos decir que las ideas de *redondear, casi, más o menos, estimar*, nos muestran evidencia del uso de la noción de aproximación en el discurso cotidiano.

Desde la perspectiva de la representaciones sociales (RS), tenemos en primera parte que son esquemas de conocimiento compartido por una sociedad (Perinat, 2007), podemos mencionar que en las distintas épocas que detectamos, se tenían diferentes representaciones sociales; es decir, en el periodo Helénico lo que se quería era encontrar áreas de figuras geométricas utilizando la comparación. Además de calcular el área y volúmenes utilizando la proporción. Con el renacimiento y la introducción de lo infinitamente pequeño se modifica la RS ya que se pretendía encontrar métodos generales. Cuando se consolidan los infinitésimos la RS que se tiene el interés de encontrar un modelo general para determinar la integral de cualquier curva, haciendo un análisis de funciones. Postulamos que el núcleo central de esta RS es la aproximación, de modo que la RS de la integral (como calculo de área y anti-derivada) esta mediada por métodos de aproximación y calculo, bajo el principio de exceso-defecto. En nuestro caso la práctica de aproximación es compartida no sólo por la sociedad actual sino que fue evolucionando conforme se requería resolver distintos problemas.

Conclusiones

Como resultado del análisis de libros podemos aseverar que la visión Geométrica ha persistido en el tratamiento de la integral en el estudio de las matemáticas mientras que en física prosperó la Cinemática, esto debido, según nuestro análisis, a la progresiva aritmetización de la matemática.

Existió, en el siglo XVII, un cambio de paradigma entre los indivisibles y los infinitesimales mediante la idea del límite. A la noción de limite le anteceden las prácticas de aproximación, la idea de "acercarse a" por lo que podemos suponer que sin pensamiento variacional no hay acceso a los conceptos de análisis y por consecuencia un estudio profundo del cálculo.

Aunque el concepto de integral ha evolucionado notablemente, la noción de aproximación persiste en ese transito, acompañándose, en el sentido de considerar a la integral como concepto y la aproximación como una práctica. Desde la noción de exhausión, hasta la noción especifica del limite tal y como la conocemos hoy, partiendo de las prácticas de *comparar*, *medir*, *algorítmica y formalizar* mediante las nociones de "*acercarse a*" o de "*estar tan cerca como se quiera de*", la aproximación está ligada a la noción de error y a la idea de minimizarlo. Está tendrá una implicación didáctica, que habrá de considerar a las prácticas de referencia antes mencionadas en el diseño de situaciones de aprendizaje, en las que entren en juego la noción de aproximación como noción reguladora. Postulando que el cambio de la representación social del área bajo una curva hacia la de integrabilidad de funciones está mediada por las prácticas de referencia y por tanto un paso en el aprendizaje formal de la integral será el uso de estas practicas en el cambio de las RS. En tanto postulamos que para el estudio de la integral es necesario incluir actividades previas de aproximación de áreas, los estudiantes deben tener experiencias previas con acotamiento de áreas por exceso y defecto, ya que así lo muestra la epistemología pero además, será necesarias las actividades de comparar, antecediendo a las practicas de acotar y aproximar, lo que hay que llevar a la algoritmización y posterior formalización mediante la noción de límite.

Bibliografía

Abric, Jean – Claude. (2001). *Prácticas Sociales y sus Representaciones* (Dacosta, J. y Flores, F). D. F., México: Ediciones Coyoacán. (Trabajo original publicado en 1994).

Aparicio E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociado a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 7-30.

Arellano, Y., López, J.M. y Vargas, S. (2007). *Un estudio socioepistemológico de la integral, La aproximación como unidad de análisis*. Documento interno. Manuscrito no publicado, Cinvestav - IPN, México, D.F., México.

Ayres F. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. (Serie schaum).D.F., México: Editorial Mc Graw-Hill.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Alianza Editorial, pp. 228-275

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la Analiticidad*. D.F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R.; Farfán, R. (1998) pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, 42,* 353-369.

Collette, J. (2002). *Historia de las Matemáticas I*. D.F., México: Ediciones Siglo Veintiuno.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del discurso matemático escolar*. Tesis Doctoral. Cinvestav-IPN. México

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior: Una socioepistemología de la integral. *Relime. 8* (3), 265-286.

Granville W. (1982). *Cálculo diferencian e integral* (ed. 6). México D.F. editorial Limusa.

Hughes, D. Gleason, A. Frazer, P, Flath, D. (2002). *Cálculo aplicado*. México .Editorial continental.

Imaz, C. (1968). *Fundamentos del cálculo diferencial e integral* (Monografías, Serie M. No. 1). Departamento de Matemáticas del CIEA del IPN, México: Sociedad Matemática Mexicana.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días I*. España: Alianza Editorial.

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (séptima edición). D.F., México: Editorial Oxford

López, V. (1992). *Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México 1785-1867*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN. México.

Muñoz, G. (2006). *Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Tesis de Doctoral. Cinvestav-IPN. México.

Olave, M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes del bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. Tesis de Maestría. CICATA-IPN. México.

Purcell, E., Overberg, D. y Rigdon, S. (2003). *Cálculo diferencial e integral* (ed. 8). México: Editorial Pearson educación.

Saldaña, R. (1988). *Del área a la integral: de la noción y de ahí a su definición (ensayo histórico).* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN. México.

Stewart, J. (2001). *Cálculo* (séptima edición). México: Internacional Thomson Editores.

Struik, D. (1980). Historia concisa de las matemáticas. D.F. México: IPN.

Waldegg, G. (1982). *Historia del cálculo* (Sección Matemática Educativa). Cinvestav-IPN. D.F., México.