REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo de 2014
páginas 181-198
Coordinada por Fredy González

Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica:

Consideraciones Históricas y Didácticas Relacionadas con el Símbolo Algebraico de Igualdad

Andrés González Rondell; Fredy González

Resumen	Este trabajo es un estudio del signo de igualdad que valora su génesis, implementación e implantación definitiva como símbolo representativo de la igualdad matemática. Se consideran: sus características específicas como objeto matemático, algunos aspectos renacentistas como momento histórico en el que Robert Recorde lo propuso, los diferentes usos que se le han dado en Matemáticas y otros símbolos que también han servido para la igualdad. Se hacen consideraciones didácticas y de investigación tomando en cuenta los diferentes usos e interpretaciones de los estudiantes así como los distintos errores que su comprensión limitada conlleva. Se asume la concepción del signo de Puig (2003) y Filloy (1993) y se acepta que el signo "=" es un símbolo en el sentido de Charles Pierce. **Palabras Clave**: igualdad matemática, símbolo, álgebra.
Abstract	This work is a study of the equal sign that values its genesis, implementation and final implementation as a representative symbol of mathematical equality. Are considered: their specific characteristics as a mathematical object, some aspects such as Renaissance historical moment in which we proposed Robert Recorde, the different uses that have been given in math and other symbols have also served to equality. Teaching and research considerations are made taking into account the different uses and interpretations of the students and the various errors that your limited understanding entails. Sign conception Puig (2003) and Filloy (1993) is assumed and accepted that the "=" is a symbol in the sense of Pierce. **Keywords:** mathematical equality, symbol, algebra
Resumo	O trabalho apresenta um estudo do signo de igualdade que valoriza sua gênese, construção e implantação definitiva como símbolo representativo da igualdade matemática.São consideradas suas características específicas como objeto matemático; alguns aspectos renascentistas, momento histórico em que Robert Recorde o propôs; os diferentes usos que lhes são dados em Matemáticas; e, por fim, outros símbolos que também têm servido para expressar a igualdade. O trabalho apresenta considerações didáticas e de pesquisas tendo em conta os diferentes usos e interpretações por parte dos estudantes, assim como os distintos erros advindos de sua compreensão limitada. Se assume aqui a concepção de Puig (2003) e Filloy (1993) e se aceita que o signo "=" é um símbolo no sentido de Charles Pierce. **Palavras-chave:** igualdade matemática, símbolo, álgebra.

Introducción

La igualdad es un concepto que nace en el mundo de la percepción sensorial, por lo que no es intrínseca a la Matemática, considerada ésta desde un punto de vista académico-institucional. Desde que se es niño, como afirman Infante y Hurtado (2010), se está sometido a un proceso de comparación para detectar regularidades y poder determinar cosas que son iguales y las que no lo son, sin necesidad de recurrir a un símbolo que permita la representación de dicha comparación.

Desde un punto de vista algebraico, la igualdad matemática puede ser considerada como una relación definida en un determinado conjunto, siendo así goza de las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad, lo cual quiere decir que la misma se constituye en una relación de equivalencia, cada clase de equivalencia contendrá todos aquellos elementos del conjunto dado que tienen la condición de ser iguales. Se debe a R. Recorde el uso del símbolo "=" para interpretar la igualdad matemática, que entre los símbolos matemáticos, es uno de los de mayor arraigo en la comunidad de matemáticos y de educadores matemáticos a nivel universal. Este símbolo se usa en todas las ramas de la Matemáticas en todos los niveles de escolaridad y también fue usado mucho antes que R. Recorde le diera su carta aval como signo matemático, pero con otros significados, además se emplearon distintos símbolos para identificar la igualdad. Luego de su aparición formal transcurrió mucho tiempo antes de ser aceptado con la notoriedad e intensidad que hoy en día exhibe.

Sin embargo, desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática, se han detectado algunas interpretaciones insuficientes de este símbolo en los estudiantes que limitan su comprensión del lenguaje algebraico y por ende en el aprendizaje del álgebra. En algunas oportunidades, se convierte en un obstáculo epistemológico, en el sentido de Bachelard (2007), para la comprensión de algunos conceptos algebraicos, entre los que figuran ecuación e identidad, componentes esenciales del álgebra escolar, traduciéndose en dificultades y errores de los estudiantes. Por esta razón, algunos autores han expresado un notable interés en focalizar la mirada en este símbolo desde un punto de vista investigativo en la Educación Matemática, particularmente en estudios relacionados con el pensamiento algebraico, de ello dan cuenta los trabajos llevados adelante por Kieran (1981); Molina (2004); Molina, Castro, y Castro, (2007), e Infante y Hurtado (2010), entre otros.

En este trabajo se hace un recorrido por algunos de los elementos arriba mencionados tomando en cuenta el Sistema Matemático de Signos (SMS) de Puig (2003) y Filloy (1993), en el que los signos no pueden ser considerados de manera aislada, pues en cualquier texto matemático convergen dos subconjuntos de signos: los propiamente matemáticos, y por otro los de la lengua vernácula. En los procesos de significación (aceptando la ambigüedad del término *significado*), de tanto interés para los educadores matemáticos, no tiene sentido esta distinción, pues lo que importa es el sistema en sí mismo, que es lo que debe ser señalado como matemático, y no los signos por separado.

Y para evitar la tediosa repetición de las palabras: "es igual a", pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o rectas gemelas de la misma longitud, así: ═══, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales.
Robert Recorde

Álgebra y Simbolismo Matemático

Al igual que Esquinas (2009) se asume que “el signo es cualquier objeto que puede ser percibido y que puede ser portador de algún tipo de información para el receptor” (p. 102). Esto significa que lo relacionado con la interpretación es un asunto potencial, no dado ni preestablecido.

Además, en este trabajo los signos son considerados en la misma perspectiva de Puig (2003) quien sigue la misma dirección de Charles Sanders Peirce (1839-1914). Desde esta óptica tres características definen el signo: constituye una entidad triádica (significado, significante y cognición interpretante), no es estático y no es arbitrario (la relación triádica no es arbitraria). Además los signos pueden ser de tres tipos: íconos (del griego *eikon)*, índices (etimológicamente, *dedo que señala*) y símbolos. “Los íconos son signos que tienen alguna semejanza con el objeto y tienen el carácter que los hace significar incluso si el objeto no existiera” (Puig, 2003, p.177). Mientras que “los índices no se parecen a los objetos, sino que los señalan, fuerzan la atención hacia ellos, pero no los describen” (ob.cit). Se puede decir entonces que una diferencia entre estas dos categorías de signos estriba en las sensaciones que activan en el interpretante: por un lado el ícono induce a la reflexión y, por otra parte, el índice hacia la acción.

En el caso del símbolo éste tiene que ver con lo convencional, es decir con lo acordado del signo, el ejemplo más emblemático lo constituye la bandera de un país. Los símbolos no siempre son intuitivos o sobrentendidos para todas las personas, sino que se requiere una preparación previa para su dominio (Mora, 2006), lo cual tiene una enorme significación para el caso de la educación en general y de la enseñanza de la matemática en particular en la que se trata de la comunicar ideas matemáticas. De acuerdo con Pimm (2002) los sonidos hablados, las palabras escritas, entre otros pueden interpretarse como símbolos. Afirma este autor: “Las palabras son símbolos, pero entran en una categoría especial porque nos son tan familiares y corrientes que suplen con eficacia a lo que simbolizan” (p. 196)

Desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas existe una relación conflictiva entre simbolismo y objeto matemático, es decir, entre significante y significado, ello obedece a que para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él; tal como lo señala Pimm (2002) “*en Matemáticas, el símbolo convencional constituye el único medio de evocar el concepto mismo*” (p. 222), de manera que la práctica es la de manipular y efectuar transformaciones en el signo que representa al objeto, como si éste fuese transformado. De aquí que el signo adquiere una importancia suprema, pareciera que lo es todo, pero la realidad es que el símbolo no sustituye al objeto, el cual existe en la abstracción del pensamiento con entidad propia y con independencia de su imagen concreta representada por su significante. Como se puede colegir, esta situación puede suponer un obstáculo para el estudiante si éste no logra aprehender el objeto matemático que conlleva la simbolización.

Esta situación se manifiesta con mayor nitidez en el contexto de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en virtud de lo cual Pimm (2002) da una señal de alerta al advertir que “*muchos de los errores que se producen en álgebra ocurren precisamente porque ésta suele enfocarse de forma abstracta y manipulativa de símbolos, sin prestar atención a los posibles significados*” (Pimm, 2002: 47).

Sin embargo, es posible afirmar que el desarrollo y crecimiento de los conocimientos matemáticos han estado fuertemente ligados con el desarrollo del simbolismo, por ello afirma Ribnikov (1987) que "*en la historia de las matemáticas, la historia de los símbolos puede compararse con la historia de los instrumentos de trabajo, a través de los cuales es posible reconstruir y comprender mucho*" (p. 132). En ese sentido se le reconoce a Leibniz la conciencia sobre "las potencialidades de un simbolismo racionalmente ideado, y nadie dedicó más laboriosos pensamientos a la 'filosofía' de la notación matemática que él" (Bell, 2002: 136)

Es por ello que desde el punto de vista de la didáctica del álgebra se hace pertinente un acercamiento al estudio del simbolismo matemático que permita su abordaje y comprensión desde el punto de vista de una estructura organizacional interna, en este sentido Pimm (2002) establece una organización de los símbolos matemáticos que comprende cuatro categorías: logogramas, pictogramas, símbolos de puntuación y símbolos alfabéticos.

En el cuadro 1, a continuación, se presenta un resumen de la caracterización que propone este autor.

Cuadro 1. Clasificación de los símbolos matemáticos según Pimm (2002)

Tipo	Definición	Ejemplos y comentarios
Logogramas	Formas inventadas para referirse a conceptos totales, sustituyen palabras completas, no se utilizan fuera de contextos matemáticos.	Dígitos del cero al nueve. +, -, ÷, %, ∧,∨,°, √, ∩, ∫, =, <, > El símbolo para señalar la igualdad pudo haber tenido un origen icónico y pictográfico. Según Pimm (2002) los logogramas "<" y ">" aun cuando sugieren su significado no son pictográficos en un sentido estricto (no tienen un origen geométrico)
Pictogramas	Íconos geométricos	□, ○, Δ, < (ángulo), Z (ángulos alternos), F (ángulos correspondientes)
Signos de puntuación	: ! [({ * / ' . ,	No siempre tienen el mismo uso que en la escritura normal En algunos casos actúan como modificadores de otros símbolos. Por ejemplo el apóstrofo, como en f', permite distinguir una función de su derivada. Llama la atención que el signo de interrogación es muy poco usado.
Símbolos alfabéticos	Alfabeto romano Alfabeto griego (con sus correspondientes mayúsculas y minúsculas)	Sujetos a una serie de convenciones. Aceptación del sistema Descartes (1637): las letras iniciales se usan para los parámetros y las finales para las variables, contra la propuesta de Viete en la que las vocales fuesen variables mientras que las consonantes representasen los parámetros. Otros ejemplos de convenciones son: Conjunto: mayúscula y elemento del conjunto minúscula. F: Campo (field en español). K: cuerpo (korper en alemán). Letras consecutivas para denotar objetos semejantes. Letra inicial del objeto para denotarlo. Combinación de alfabetos diferentes para establecer categorías, como en m, s para la media y desviación típica de una muestra, mientras que σ y μ para los parámetros de la respectiva población. Inicial de alfabeto diferente para indicar el objeto, por ejemplo, Δ (delta mayúscula) denota el discriminante de una ecuación cuadrática.

Renacimiento: Proposición y consolidación del simbolismo

El período medieval es una larga etapa temporal histórica que acaeció aproximadamente entre los años 473 y 1453, describir lo acontecido en estos mil años requeriría de grandes volúmenes de libros, pero para los propósitos de este artículo se tomarán en cuenta dos personajes junto con sus libros los cuales marcaron hitos históricos para la Matemática.

En este período la enseñanza tenía lugar principalmente en los monasterios, es decir era una enseñanza vinculada a la iglesia, aunque a mediados de este período, surgen las universidades como centros de producción del saber académico; los numerales romanos eran los únicos que se utilizaban ya “que para los problemas que se planteaban, esta forma de representar los números bastaba” (Casalderrey, p.16).

Dentro de esta etapa se ubican dos personajes muy importantes para el desarrollo del álgebra como lo son Leonardo de Pisa (1170-1240) y Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî. El primero es mejor conocido como Fibonacci, escribió un libro que intituló Liber abaci con el cual dio origen a las escuelas de ábaco hacia el norte de Italia, con el tiempo los Maestros escribían sus propias obras y a estos autores se les llamaba abacistas (Casalderrey, p.41), aquí las matemáticas se podrían denominar matemáticas del ábaco orientadas al cálculo para el comercio.

El segundo autor es mejor conocido por su nombre latinizado simplemente como Al-Jwarizmi, éste puede ser considerado el “padre del álgebra” (Boyer, 1999, p. 299), escribió un texto que denominó*Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala —alkitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa'l-muqâbala*. Aun cuando no resulta sencillo realizar una traducción literal del título, dos palabras se han destacado de él: *Al-jabr* y *muqâbala.* La primera significa, aproximadamente, restauración o completación, que en lenguaje actual consiste en la transposición de términos. Mientras que muqâbala hace referencia a la reducción o compensación, que en lenguaje vernáculo consiste en la simplificación de términos semejantes. Además de la palabra*Al-jabr* derivó la actual álgebra.

Es posible que sorprenda que este libro a diferencia del de Euclides o Diofanto “no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente las de segundo grado” (Boyer, p.296). Como está escrito en forma retórica, esto es sin símbolos, en él se pueden encontrar algunas palabras, que representan las incógnitas de manera concreta, como *jadhir* para la raíz, *mal* para su cuadrado, *kab* para el cubo, etc. (Boyer, 1999).

El declive de la Matemática del período medieval, según Boyer (1999), ocurre a partir de los trabajos relacionados con la proporcionalidad de Thomas Bradwardine (aprox 1290-1349), filósofo, teólogo y matemático inglés; y Nicole Oresme (1313-1382) matemático francés.

Los procesos históricos son ante todo el resultado de realizaciones humanas, razón por la que no es fácil establecer una ruptura discreta entre una época y otra, sin embargo, se reconoce la caída de Constantinopla (actual Estambul), capital del Imperio Bizantino (parte oriental del imperio romano), en 1453 en manos de los turcos como el evento que marcó el colapso definitivo de este Imperio y con ello la extinción del Medioevo, dando paso así a otro trascendente proceso histórico en Europa conocido como Renacimiento, temporalmente fue más corto que el medieval, pues ocurrió entre los siglos XV y XVI, pero significó un período de grandes y poderosas transformaciones en todos los órdenes de la vida. Dice Casalderrey (2009): "La característica fundamental del Renacimiento es el sentimiento humanista. El hombre pasa a ocupar un lugar central en el universo y con él, el arte, la literatura y el conocimiento de la naturaleza" (p. 13).

Desde el punto de vista matemático durante el Renacimiento se hacen esfuerzos hacia la recuperación de los ideales clásicos y la cultura griega. Esta restauración se hace a través de la matemática árabe, al principio fue Italia la beneficiada de las traducciones de los manuscritos de los tratados griegos y a partir de aquí el resto de Europa llegó a tener contacto con los trabajos de la antigüedad.

Es durante este período en el que se desarrolla la imprenta con tipos móviles (Joannes Gutenberg, hacia 1450) lo cual significó un fuerte espaldarazo a la difusión del conocimiento científico pues permitió que las obras cultas se extendieran y estuviesen más disponibles con mucha más facilidad que nunca hasta entonces (Boyer, 1999), en el caso de las matemáticas también fue así, aun cuando de una forma más lenta.

Además, al hablar del Renacimiento es imposible dejar de mencionar el nombre de Leonardo Da Vinci, hombre de pensamiento audaz, considerado como uno de los más grandes pintores de todos los tiempos y, prototipo de hombre renacentista; sin embargo (Boyer, 1999) afirma que no estuvo en estrecho contacto con el álgebra que era la tendencia dominante de la época.

El Renacimiento permitió, además del desarrollo de grandes ideas matemáticas, la consolidación de un simbolismo que se venía poniendo en práctica de una manera aislada y al servicio de distintos grupos humanos; esta unificación, poco a poco, se fue incorporando como una nueva de forma de hacer matemáticas y sentó las bases para que emergiera el álgebra como área de la matemática independiente de la Aritmética, la Geometría y el Cálculo.

Para las Matemáticas, el Renacimiento fue propicio para que emergiera y se consolidara un sistema representacional matemático que, a la larga, hacia mediados del siglo XIX con los trabajos de Évariste Galois (1811-1832), serviría para fundar el álgebra como una de las ramas de la Matemática. Será interesante entonces, precisar los períodos históricos que se han establecido para la evolución del álgebra a fin de conocer sus antecedentes y ubicar la emergencia del actual sistema matemático de signos (Puig, 2003). En 1842 G. H. F.Nesselmann en un libro intitulado *Die Algebra der Griechen* (El álgebra de los griegos) estableció una periodización en la evolución del álgebra que, pese a algunas críticas[1], se mantiene como "la historia oficial del álgebra" (Puig, 1998); estableció 3 períodos: retórico, sincopado y simbólico los cuales se muestran esquemática y resumidamente en el Cuadro 2.

[1]Algunos autores (Sessa, 2005; Puig, 1998) han hecho críticas interesantes a esta organización histórica del álgebra en virtud del énfasis que pone en el registro escrito, dejando de lado aspectos tales como la naturaleza de los problemas y los métodos de resolución empleados, sin embargo ante el desconocimiento de otra forma de organización se toma ésta como la "*historia oficial*" (Puig, 1998)

Cuadro 2. Síntesis de la evolución histórica del álgebra

Período	Características
Retórico 250 DC	Se usa exclusivamente el lenguaje natural sin recurrir a algún signo. Las cuestiones se plantean siempre en situaciones aritméticas o geométricas concretas, sin ninguna pretensión de generalización ni formalización (Esquinas, 2009). Se ubica en este estadio el álgebra de Al-Khwârizmî, en la que los problemas y su resolución se expresan enteramente en palabras.
Sincopado Época diofántica-finales siglo XVI (finales de 1500)	Los cálculos se desarrollan en lenguaje natural. Se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente Se intenta un proceso de generalización de problemas con un uso mayor o menor, según las épocas, de este incipiente simbolismo (Esquinas, 2009)
Simbólico Francois Viete (1540-1603)	Se usan letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones. Se puede operar con ese sistema de signos sin tener que recurrir a su traducción a la lengua original. Se utiliza el lenguaje simbólico no sólo para resolver ecuaciones sino también para demostrar reglas generales. Germen del Álgebra Moderna.

En esta organización histórica la etapa simbólica coincide temporalmente con el período renacentista. En los tratados árabes, durante el período retórico, se empleaba la palabra árabe *shay* que significa *cosa*[2] para referirse a lo desconocido de una ecuación, lo que se busca, es decir, la incógnita, en latín se dice *res*, en italiano se mantiene *cosa*, mientras que en alemán se denomina *coβ*. Pero, además, también el vocablo *cosa* se emplea para denotar el período en el que se transita de la aritmética al álgebra, caracterizado por el empleo de los primeros símbolos matemáticos y las primeras palabras inventadas (Wussing, 1998).

Además, con el florecimiento de la economía de mercado precapitalista en el Renacimiento surgieron (principalmente en Italia y Francia) los llamados maestros calculistas que eran personas dedicadas a actividades relacionadas con el cálculo del pago de impuestos en los ayuntamientos, desarrollaban algoritmos, trabajaban empíricamente, aún cuando también se constituían en corrientes de maestros calculistas creando sus propias escuela de cálculo (Wussing, 1998). Aparecen los cosistas como trabajadores intelectuales, eran los autores de escritos matemáticos en los que se plasmaban las palabras nuevas y los nuevos símbolos matemáticos. Para Wussing (1998) "*la cosa experimentó un floreciente desarrollo, visible interior y exteriormente en sus símbolos, lo que desembocó en la algebrización*" (p. 111). En este contexto, como se verá más adelante, el papel de las obras de Viete sirvieron para realizar un resumen original de las matemáticas del Renacimiento (Ribnikov, p.135). El período de florecimiento del álgebra en Italia finaliza coincidiendo con la publicación de los trabajos de Bombelli(1526-1572), además significó el traslado geográfico del foco de atención del álgebra. Como se ha visto, entre los siglos XV y XVI Italia se había constituido en epicentro de este vasto proceso de enriquecimiento del quehacer matemático. Sin embargo, como señala Wussing (1998):

> Bombelli fue el último algebrista italiano importante de este período. Con el cambio de gravedad económico y el surgimiento de formas de feudalismo y un clericalismo reaccionario, Italia hubo de ceder en el siglo XVII su posición de líder en el ámbito científico, incluido el matemático. El álgebra continuó su creciente desarrollo, pero a partir de entonces fue obra de autores alemanes, holandeses, ingleses y franceses (pp. 132-133)

[2] La españolización de esta palabra es xai, de ahí que la x como letra inicial de este vocablo pasó a convertirse en el símbolo que representaba a la cosa desconocida o incógnita (Andonegui, 2009)

Francois Viete un algebrista irreverente

El francés Francois Viete (1540-1603) puede considerarse un algebrista rebelde de su tiempo, rechaza de plano el nombre de álgebra por provenir del idioma árabe (Boyer, p 387), por lo que invoca el "*arte analítica*" al tomar en cuenta el tipo de razonamiento que se hace en álgebra cuando se resuelven ecuaciones (trabajar suponiendo que la solución existe, derivar una condición necesaria y luego evaluar). Por otra parte, para el tiempo en que Vieta publica su libro intitulado In artem analyticam Isagoge "Introducción al arte analítico", (1591), ya había sido superado el impasse entre Tartaglia y Cardano, lográndose conocer las soluciones de la ecuación cúbica y la cuártica (Ludovico Ferrari por encargo de Cardano), su mérito radica en que reacciona a la manera de hacer álgebra hasta entonces, pues las demostraciones se hacían sobre casos particulares (considérese por ejemplo, el tratado del álgebra de Al-Khoarizmi, ya descrito, en el que se tratan todos los casos para la resolución de ecuaciones de segundo grado, trabajado sobre ecuaciones particulares, pero en su justificación se invocaba su generalización). Es decir, Viete enfrenta la Logística[3] Numerosa (o numeralis), que supone el trabajo con números concretos, con la Logística Speciosa orientada a la generalización de los métodos. Ahí está su valor: el que por primera vez se considerarán las expresiones algebraicas de una manera que se abarcara cualquier caso de ellas

Es por esto que Viete tiene la gran virtud de contribuir para dar el salto de una matemática orientada hacia el trabajo con casos particulares hacia una matemática fundamentada en la generalización, tal proceso es evaluado por (Bell, 2002) como "uno de los pasos más importantes que jamás haya dado la matemática" (p. 130). La introducción de símbolos para representar objetos matemáticos es de vieja data, por ejemplo en la obra magna de Euclides se usa letras para la representación de los triángulos, sus lados y ángulos, también antes que Viete el portugués Pedro Nunes usó las letras para representar las operaciones; sin embargo es Viete quien realiza un giro extraordinario en su obra, pues por vez primera las ecuaciones se trataban de una forma general. Su trabajo se empezó a publicar por partes en 1591 y continuó luego de su muerte. Según Ribnikov (1987) "el surgimiento del cálculo algebraico literal constituye una de las facetas del fenómeno más general y profundo en la historia de las matemáticas que es el surgimiento del álgebra como una ciencia general de las ecuaciones algebraicas" (p. 133)

Figura 1. Francois Viete (1540-1603)
Imagen tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

[3] Aquí logística se emplea según la acepción griega

Con el trabajo de Viete todas las magnitudes fueron representadas por letras, las variables (incógnitas más propiamente dicho) con las vocales A, E, I, O, U, así como con la letra Y; mientras que para las cantidades conocidas (los parámetros en las ecuaciones) empleó las consonantes. No es el empleo de letras para designar números lo que se destaca en este autor (pues ya se habían empleado) sino su práctica "*como procedimiento general, tanto para los números conocidos como para las incógnitas*" (Bell, 2002, p. 130). Además, como señala Puig (s/f):

> Lo fundamental de este período no es pues el mero hecho de la existencia de letras para representar las cantidades o de signos ajenos a la lengua vernácula para representar las operaciones, sino el que se pueda operar con ese sistema de signos sin tener que recurrir a su traducción a la lengua vernácula (p.14)

Sin embargo, cabe destacar que ésta es un Álgebra en un estado inicial, muy diferente al Álgebra moderna, en ella se mezclan signos y palabras, con fuerte influencia geométrica lo cual, como señala Ríbnikov (1987), la hace muy engorrosa, imperfecta y con grandes insuficiencias; no obstante, fue el lenguaje usado por Fermat para la construcción de la Geometría Analítica, antes de queDescartes expusiera sus trabajos. Una breve descripción del trabajo de Viete es ofrecido por Wussing (1998):

> Utilizó siempre + y – como símbolos de las operaciones, usó la raya para los quebrados y la palabra in como abreviatura para la multiplicación. Sin embargo, no utilizó todavía el signo para la igualdad introducido por Recorde, sino que expresó la igualdad entre dos términos verbalmente por medio de aequibitur o aequale. Los términos relacionados los escribía Vieta uno debajo de otro y los encerraba entre llaves (p. 113)

Por ejemplo, (tomado de Wussing, 1998, p.114), en el lenguaje de de Viete la expresión $\frac{BA}{D}+\frac{BA-BH}{F}=B$ se escribía en la forma $\frac{B\,in\,A}{\mathrm{D}}+\left\{\begin{matrix} B\,in\,A \\ \frac{\mathrm{-\,B\,in\,H}}{\mathrm{F}} \end{matrix}\right\} aequale\ B$.

Como se puede observar Viete en su trabajo no incorpora el signo de igualdad, pese a que, como se verá más adelante, para esta época ya había sido introducido y usado explícitamente por R. Recorde en su obra. Los signos + y – que utiliza ya habían sido creados en Alemania por Widmann en 1489 (Bell, 2002: 107).

Igualdad matemática

Para expresar la igualdad matemática en forma retórica se emplearon palabras en diferentes idiomas tales como *aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck,* o*gleich*, y también abreviatura *aeq* de la correspondiente palabra en latín.

Los hindúes y árabes expresaban que dos cosas eran iguales colocando una de esas cosas sobre la otra (Bell, p. 137)

Los egipcios usaron la forma hierática de sus jeroglíficos para igualdad, los griegos las dos primeras letras de la palabra, los árabes la última de la suya, hasta que se volvieron al verbalismo total escribiendo igualdad con todas sus letras.

El primer tratado de álgebra escrito en español, intitulado *Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria* (1564), se debe al matemático portugués Pedro Nunes (1502-1578). ParaPastor y Babini (1997), éste es "el primer y más completo tratado de álgebra en español aparecido en el siglo" (p. 21), en él no adopta un símbolo particular para la igualdad sino que emplea la palabra '*ygual*' tal como se aprecia en la figura 2.

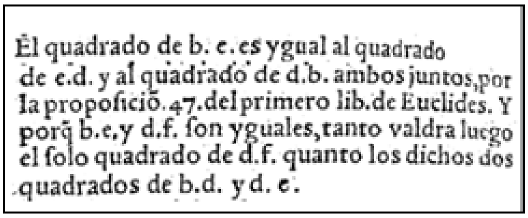

Él quadrado de b. e. es ygual al quadrado de e.d. y al quadrado de d.b. ambos juntos, por la proposició. 47. del primero lib. de Euclides. Y porq̃ b.e. y d.f. son yguales, tanto valdra luego el solo quadrado de d.f. quanto los dichos dos quadrados de b.d. y d. e.

Figura 2. Extracto de la obra de Pedro Nunes
Imagen tomada de http://www.apm.pt/files/177852_C69_4dd7a05861041.pdf

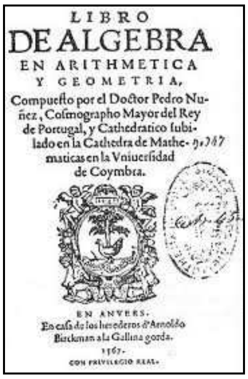


Figura 3. Tratado de Pedro Nunes
Imagen tomada de
http://www.vidaslusofonas.pt/pedro_nunes.htm

Figura 4. Pedro Nunes (1502-1578)
Imagen tomada de:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pedro_Nunes_ritratto.jpg

Vasconcelos (2010), basándose en el clásico libro de Historia de las notaciones Matemáticas de Cajori, (1993), realiza un profundo recorrido relacionado con la epistemología del símbolo de igualdad, en éste afirma que en el continente europeo los primeros libros de texto en usar el símbolo "=" fueron los holandeses a través de un libro y un tratado escritos por Stampioen en 1639 y 1640, respectivamente. Luego, *Teutsche Algebra* del suizo Johann Heinrich Rahn (1659) y Leibniz en su *De arte combinatoria* (1666). También, en 1667 Arnauld publica el primer libro parisiense en el que aparece, mientras que en Londres fue Dechales quien lo hizo en 1674.

No obstante, antes de que se generalizase la adopción del actual símbolo de igualdad matemática hubo el desarrollo de algunos otros símbolos para denotarla. En el siguiente cuadro 3 se muestran algunos de estos símbolos matemáticos (Gutiérrez, 2008; Molina y otros, 2007) utilizados para representar la igualdad durante el siglo XV y XVII.

Cuadro 3. Símbolos empleados para representar la igualdad matemática

Símbolo	Representante
[	Johannes Buteo (1492)
||	Whilhelm Holtzmann (1575)
)=(	Leonard y Thomas Digges (1590)
|	Samuel Reyher (1635)
2|2 y ⊔	Pierre Hérigone (1580)
_ᐱ_	Hugo de Omerique (1634)
—⌒—	Tomás Vicente Tosca (1651)
∝	Francisco Vieta (1540)
ꝏ	Rene Descartes (1637)

Como ha quedado en evidencia luego de este breve recorrido,en Matemática el concepto precede al símbolo, es por ello que en el planteamiento de la igualdad, como concepto, se echó mano de la expresión oral y se usaron distintas representaciones hasta que finalmente se convino en usar el símbolo “=”; es posible que este acuerdo, sin decreto oficial, se haya dado por razones prácticas tales como la facilidad de la escritura, ahorro de espacio en el registro escrito, etc.; pero también es posible que fuese el resultado del impacto de algún tipo de liderazgo académico, por ejemplo, para Gutiérrez (2008), la adopción definitiva de este símbolo se debe a que tanto Newton como Leibniz lo usaron en sus trabajos.

La obra de Robert Recorde: oficialización del símbolo de igualdad actual.

Después de la muerte de Bradwardine en 1349 la matemática inglesa no tuvo ningún progreso (Boyer, 1999). Es por ello que a Robert Recorde (1510-1558), matemático y médico inglés puede considerársele como uno de los más importantes cosistas de su época y de su país. En 1557 publica su obra The Whetstone of Witte[4] (La Piedra de afilar el ingenio), según Boyer (1986) “Este título era evidentemente un juego de palabras relativo a la palabra coss, ya que cos es el nombre latino para whetstone o piedra de afilar, y el libro está dedicado a “the cossike practise” es decir al álgebra (p. 369), se convirtió en el primer tratado inglés de álgebra, y en él emplea por primera vez el símbolo de igualdad matemático que, aun cuando las líneas son más largas, es esencialmente el mismo que se usa en la actualidad. Probablemente, el hecho de que Recorde haya escrito en inglés fuese la causa de su poco impacto en el continente (Boyer, 1999) y en consecuencia de la demora para el acogimiento del símbolo de igualdad actual.

De acuerdo con Pimm (2002) la selección del símbolo para denotar la igualdad matemática pudo deberse a razones de tipo icónicas y pictográficas, esto lo dice en función de lo que declara el propio R. Recorde en el epígrafe de este trabajo. Recorde muere en una prisión en 1558 (apenas un año después de la publicación de su libro), no se sabe a ciencia cierta la causa de de su encarcelamiento, pero existen dos hipótesis: razones políticas o religiosas.

Figura 5. Robert Recorde (1510-1558)

Imagen tomada de:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Robert_recorde.jpg

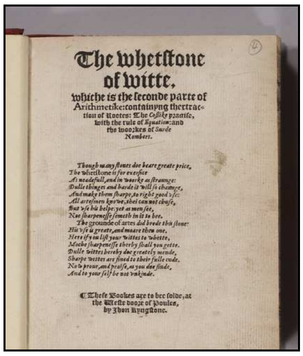
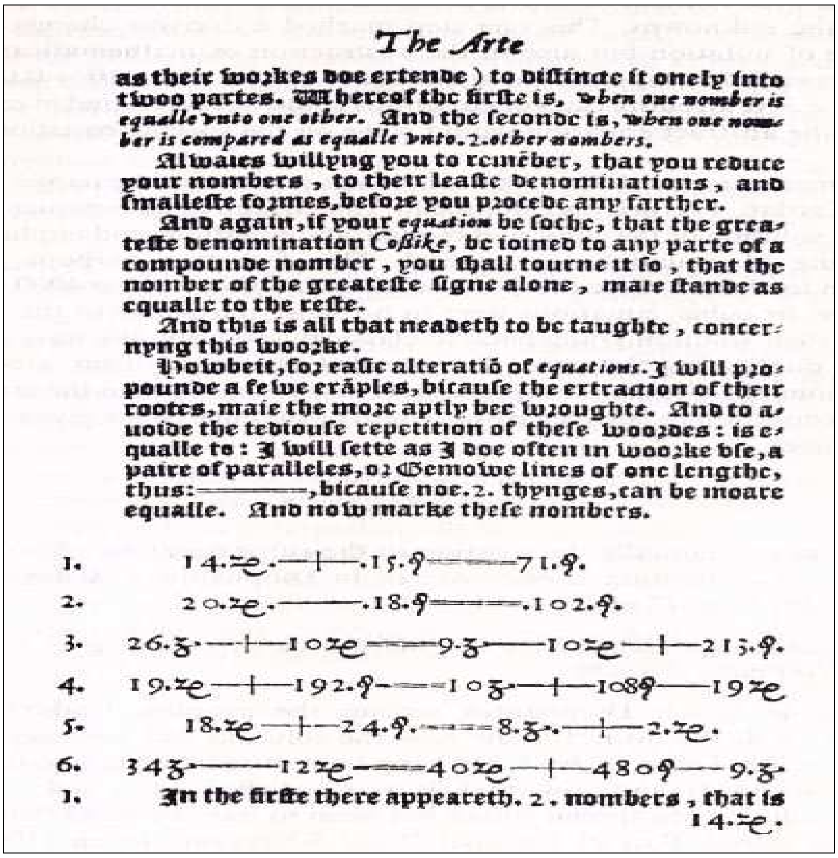


Figura 6. Libro de R. Recorde

Imagen tomada de
http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/mathematical-treasures-robert-recordes-whetstone-of-witte

[4]En realidad se trata de una abreviación, el título completo, un poco largo, es: The Whetstone of Witte, whiche is the seconde parte of Arithmeteke: containing the extraction of rootes; the cossike practise, with the rule of equation; and the workes of Surde Nombers

En la siguiente imagen se puede apreciar un fragmento de la obra de Recorde en la que usa el signo de igualdad, obsérvese que los segmentos son de mayor longitud que los correspondientes en la actualidad.



The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers*.

Alwaies willyng you to remeber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this worke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus:=======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

Fig. 6. Extracto del libro de R. Recorde

Imagen tomada de: http://mathmasterytutoring.wordpress.com/tag/the-whetstone-of-witte/

Otros usos matemáticos del símbolo de igualdad actual

Es interesante saber que el símbolo "=" ya había sido usado, pero con otras interpretaciones muy distintas de la que tiene hoy en día; además de la interpretación dada por Recorde en 1557, según (Gutiérrez, 2008) a este símbolo también se le han asociado los siguientes usos y significados:

- Diferencia aritmética (Francisco Viete, en 1591, en su *In artem analyticen isagoge*)
- Doble signo, más o menos, $\pm$, (Descartes, en 1638)
- Separador de la parte entera y la parte decimal de un número (Johann Caramuel). Por ejemplo, la expresión 34 ═══ 85 significaba lo mismo que el actual 34, 85.
- Indicador del paralelismo entre dos rectas (Dulaurens y S. Reyher)

Además, en la actualidad, es posible agregar el uso dado en informática a través de la escritura, en programación, de sentencias tales como: $x = x + 1$, la cual debe entenderse como la siguiente orden: "*súmele 1 a la antigua variable x y cree una nueva variable x*". En este caso la igualdad sirve para indicar la presencia de un proceso iterativo el cual se cerrará cuando se haya cumplido una determinada condición (por ejemplo que x=1500) o, en todo caso, se mantendrá mientras se cumpla una preestablecida (por ejemplo, x<1500). Como se puede ver esta igualdad tiene la propiedad de ser de asignación, no se trata de una ecuación ni de una identidad, no es reflexiva y es usada para indicar la transición entre una vieja y una nueva condición de la variable x.

Interpretación del Signo de Igualdad

La interpretación del signo de igualdad es un asunto que ha ocupado un lugar importante en los trabajos relacionados con la didáctica del Álgebra y el Pensamiento Algebraico como se desprende del trabajo de Molina (2004), razón que muestra su inseparabilidad y trascendencia al momento de tratar lo concerniente a la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en los primeros niveles de escolaridad.

En el trabajo de González y González (2012) se comprobó, en un contexto de educadores matemáticos en formación inicial, que mayoritariamente prevalecía una visión procedimental del símbolo de igualdad (=) en la cual se enfatiza el aspecto computacional sobre lo estructural (Sfard 1991, en Andonegui, 2009) en el cálculo del resultado de las operaciones. De acuerdo con esto, sería interesante estudiar el papel que, en este sentido, han jugado las calculadoras, pues se cree que el uso convencional de las mismas contribuye a reforzar el signo de igualdad como instrumento para la obtención de una respuesta.

Para Wheeler (1981), citado por Molina, Castro, y Castro (2007) el símbolo de igualdad es uno de los que han sufrido en mayor medida de un mal uso a lo largo de su evolución. A modo de ejemplificación, se ha evidenciado la escritura de “expresiones algebraicas” carentes de sentido matemático como $x + 0 \rightarrow x$ en la cual se confunde el signo de igualdad (=) con el signo de implicación lógica, en otros casos se ha constatado que algunos alumnos frente a una expresión del tipo $x + 6$ escriben $6x$. Este último caso Socas y otros (1998) lo describen como resistencia ante las expresiones abiertas, es decir, la expresión $x + 6$ es vista como incompleta por los estudiantes quienes no aceptan su falta de clausura; el conocimiento adquirido y demostrado aquí, el cual es cierto en contextos numéricos, es que el signo “mas” uniendo dos “cosas” genera una tercera “cosa”; se presenta entonces la necesidad de cerrar la expresión y para ello se recurre al signo de igualdad.

También se ha observado como este símbolo es utilizado para unir partes aisladas de una operación como en $4 + 2 = 6x8 = 48$. En estos casos no se interpreta la equivalencia lógica de este signo, sino como símbolo separador en el proceso de obtención de la respuesta. Esta forma de actuar está en consonancia, según afirma MacGregor (1996), con anteriores aprendizajes escolares consolidados en su estructura cognitiva. Para la autora, ésta y otras dificultades del aprendizaje del Álgebra escolar están relacionadas con conocimientos deficientes de la Aritmética, en este sentido afirman que:

> Los alumnos que no comprenden de modo suficiente las propiedades de los números y las operaciones no reconocen las relaciones y los procedimientos generales. Se les enseña a utilizar el lenguaje algebraico para expresar conceptos que no han desarrollado y relaciones que no comprenden (p. 66).

En relación con estas maneras de proceder de los estudiantes Molina y otros (2007) han clasificado 8 maneras de usar el símbolo de igualdad, las cuales se muestran en el cuadro 4.

Cuadro 4. Diferentes usos dados al símbolo de igualdad

Tipo de uso	Descripción	Ejemplo
Propuesta de actividad de cálculo	Se usa mediante expresiones incompletas que contienen una cadena de números y/o símbolos, junto con símbolos operacionales, seguida a su derecha del signo igual.	$\frac{24}{18} =$ $x(x+1)-2x =$
Operador	Indica la respuesta a un cálculo o simplificación. Predomina una concepción procedimental de los objetos matemáticos (Andonegui, 2009)	$7x3 = 21$ $x(x+1) = x^2 + x$
Separador	Significado otorgado por los alumnos al hacer uso de este signo como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad	$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2+1 = x = x^2 - x + 1$ $40+2 = 42-4 = 38x2 = 76$
Expresión de una equivalencia condicional (ecuación)	Equivalencia expresada por medio de este signo, la cual es cierta según el dominio de referencia, es decir puede ser cierta para algún (algunos) valor (valores) de la variable (variables) o ninguno.	$x^3 - 9 = 21 - 4x^2$ $e^x - 8 = 0$
Expresión de una relación funcional o de dependencia	Se refiere al uso del signo para indicar cierta relación de dependencia entre variables o parámetros	$A = \pi.r^2$ $y = -2x + 5$
Indicador de cierta conexión o correspondencia	Significado impreciso del signo, que refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como, por ejemplo, entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y expresiones no matemáticas	$\Delta = triángulo$ $\propto\propto\propto\propto = 4$ $5\,\text{camisas} = \text{Bs.}650$
Aproximación	Corresponde a las situaciones en las que este símbolo relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico	$\pi = 3{,}14$ $\frac{2}{9} = 0{,}2$
Definición de un objeto matemático	El signo se utiliza para definir un objeto matemático o asignarle un nombre	$0! = 1$ $a^0 = 1,$ $f(x) = 6 - x$

Otras dos interpretaciones son reportadas en González y González (2012) referidas a la igualdad como signo de equivalencia entre dos expresiones la cual es cierta para cualquier valor(es) de la(s) letra(s), en este caso se denomina identidad para distinguirla de la ecuación en el cual hay más restricción. Ejemplos de identidad son las siguientes: $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$, $Senx.Cosy + Seny.Cosx = Sen(x+y)$.

También desde el punto de vista de los estudiantes, en algunos casos, el signo de igualdad es interpretado como intercambiable o se hace equivalente al signo de implicación lógica; por ejemplo cuando escriben: $8+(2.8) \to 8+16 \to 24$, o también $8+(2.8) \to 8+16 = 24$.

A propósito de este último ejemplo vale la pena señalar otro intercambio entre un símbolo lógico y el signo de igualdad: la suplantación del signo de equivalencia lógica "$\cong$" por el signo de igualdad "=" Esto se ha observado en el proceso de simplificación de fórmulas proposicionales: Por ejemplo, al escribir: $p \to q = \neg p \vee q$. Tal proceso de simplificación básicamente consiste en realizar un encadenamiento de varias proposiciones lógicamente equivalentes hasta conseguir una proposición "más sencilla" en su escritura. Es probable que esta actividad se confunda con la práctica de resolución de una ecuación en la que se van construyendo ecuaciones equivalentes a la ecuación dada hasta conseguir una del tipo canónica. Se piensa que esto pudiese apuntar a un débil conocimiento en cuanto a la semántica de los signos lógicos más que a un error en el manejo de la sintaxis.

Estos dos últimos ejemplos de reemplazos irregulares de ambos símbolos es evidencia de una notable limitación relacionada con el lenguaje algebraico. En efecto, ambos signos lógicos sirven para enlazar enunciados del tipo proposicional colocados a ambos lados de él, y con esto permiten la construcción de una nueva proposición; mientras que el signo de igualdad adquiere un valor proposicional considerando todo el enlace que el mismo realiza como una totalidad; pero parcialmente, los objetos colocados a sus lados no son proposiciones.

En el caso del cálculo de las derivadas Kieran (1981) provee un ejemplo de un uso irregular del símbolo de igualdad que es muy frecuente en el ámbito universitario:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \sqrt{x^2+1} \\
& = (x^2+1)^{1/2} \\
& = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} D_x(x^2+1) \\
& = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) \\
& = x(x^2+1)^{-1/2} \\
& = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

Obsérvese como se "enlaza" la función con una derivada parcial y finalmente con su derivada. En función de esta manera de actuar afirma Kieran (1981) que se puede ver como una "tendencia a interpretar el signo igual en términos de un símbolo de operador, aunque a un nivel más sofisticado, más que como un símbolo de una relación de equivalencia" (p, 325). Esta aseveración, realizada hace más de 30 años atrás, pareció constituir una propuesta de investigación para desentrañar ese "nivel más sofisticado", sería interesante examinarla de acuerdo a los nuevos aportes teóricos de la Educación Matemática para determinar el en qué estado en que se encuentra en la actualidad.

Un caso extraño de confusión en el manejo de signo de igualdad fue proporcionado por un docente amigo. Se planteaba el caso de la resolución de una ecuación de segundo grado, por ejemplo $x^2 - 5x - 14 = 0$, cuyas soluciones se acostumbra escribirlas como$x = 7$ y $x = -2$. Entonces como $7 = x$, por transitividad de la igualdad resultaría $7 = -2$ lo cual es una contradicción. Obviamente no existe tal contradicción: en primer lugar, debe observarse que no hay un manejo acertado del papel de la letra x[5], que en este caso representa una incógnita, es decir como una letra que representa "uno o varios valores desconocidos que vienen determinados por la imposición de ciertas condiciones" (Esquinas, 2009, p. 144).

[5]En una expresión algebraica, la letra puede jugar distintos papeles: parámetro, incógnita y variable.

Consecuentemente, se trata de un inadecuado manejo de la noción de ecuación: igualdad que es válida sólo para algunos valores de la incógnita que en este caso son 7 y -2, es decir la incógnita puede tener cualquiera de los dos valores, pero una vez que tiene un valor no puede tener el otro simultáneamente. Esquinas (2009) establece una metáfora en la que es posible establecer una correspondencia entre la incógnita de una ecuación y el número(s) solución (o soluciones). En ese sentido plantea que:

> "En el caso de las variables y las incógnitas el signo literal puede representar distintos números, es decir, todo un conjunto de números con una determinada cualidad. Por ello mismo la relación entre el signo y el número no es una aplicación. La variabilidad va asociada a una relación que no es una aplicación, en general, pero una vez restringida a un valor concreto dicha relación es una aplicación inyectiva, como ocurre en el caso del parámetro. En este caso la variabilidad se restringe a una particularización aritmética, aunque sea con un número general" (p. 144)

Pero, aún más, esto se puede revisar desde el punto de vista de la lógica proposicional: en este caso cuando se escribe $x = 7$ y $x = -2$, lo que se quiere decir en realidad es que es verdadera la siguiente proposición: "$x = 7$ es una solución de la ecuación y $x = -2$ es una solución de la ecuación", en razón de lo cual no es legítimo sacar conclusiones operando con contenidos aislados de las proposiciones (en realidad, de forma aislada estas igualdades carecen de sentido). Finalmente, obsérvese que también es verdadera la siguiente proposición: "Si $x = 9$ es solución de la ecuación, entonces $x = 7$ no es solución de la ecuación", sin que de ello se pueda derivar que $x = 7$ no es una solución de la ecuación.

Comentarios finales

A la luz del análisis planteado ha quedado claro el aspecto profundamente humano del proceso de construcción tanto de los objetos algebraicos como su simbolización; y en consecuencia del camino recorrido en el desarrollo del álgebra, esto tiene un significado relevante en la consideración de la trayectoria seguida por la matemática como ciencia, no ha tenido un único sentido, han habido momentos de avances y de retrocesos, e incluso de parálisis. Esto no puede ser descuidado en cualquier discusión didáctica en la Educación Matemática.

Particularmente, en torno al símbolo algebraico de igualdad quedaron en evidencia, por lo menos, cuatro cosas: (1) Luego de ser expresada la igualdad matemática en forma retórica a través de distintas palabras, usando incluso la sincopación de dichas palabras, se recurrió también a distintos símbolos para denotarla, (2) el registro escrito de este símbolo, tal como se conoce actualmente, ya había sido empleado para significar otros objetos matemáticos, (3) luego de la publicación de Recorde hubo algunos usos aislados de este símbolo, pero también hubo que transcurrir aproximadamente 100 años antes de que se lograse su implantación total en el sistema matemáticos de signos, lo cual fue posible debido a distintas razones, entre ellas, por haber sido empleado por connotados matemáticos de la época, como Leibniz y Newton, y (4) jamás pensó Recorde ni quienes lo siguieron que alrededor de este símbolo se acumularan tantas interpretaciones escolares y que fuese motivo de interés para los investigadores dentro del campo de la Educación Matemática, específicamente en lo relacionado con el pensamiento algebraico.

Referencias

Andonegui, M. (2009). *La Matemática de primer año de bachillerato.* XIII Escuela Venezolana para la Enseñanza de la matemática.

Bachelard, G. (2007). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* México: Siglo veintiuno editores.

Bell, E. T. (2002). *Historia de las matemáticas* (R. Ortiz, Trad.) (6ª Edición). México: Fondo de cultura económica.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications.

Casalderrey, F. (2009). *Cardano y Tartaglia. La aventura de la ecuación cúbica*. Madrid: Nivola

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente*. Memoria de tesis doctoral (Director: Félix E. González J), Madrid, España.

Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la Geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 11, 2, pp.160-166.

González, A. y González F. (2012). Exploración del Pensamiento Algebraico de Profesores de Matemática en Formación. La Prueba EVAPAL". *Scientiae*. [Revista en línea]. Disponible en: http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/acta_scientiae_v.13_%20n1_2011.pdf , [Consulta, 2014, enero, 10].

Gutiérrez, V. (2008). *Robert Recorde: el creador del signo igual.* [Artículo en línea], disponible en. http://revistasuma.es/revistas/57-febrero-2008/robert-recorde-el-creador-del.html, [Consulta, 2014, enero 11].

Infante, L. y Hurtado, C. (2010). *Significados del signo igual en la resolución de ecuaciones de primer grado.*Trabajo de grado, Universidad del Valle, Colombia.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol.*Educational Studes in Mathematics.* Num. 12, pp. 317-326.

MacGregor, M. (1996). Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. Monográfico: El futuro del álgebra y la aritmética, *UNO*, (9), pp. 65-69.

Molina, M. (2004).*Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo del pensamiento relacional*. Trabajo de Investigación tutelada, España.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. En M. Guzmán, *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinares y Didácticos. Homenaje a la Profesora Ana Vilches Benavides* (pp. 249-261). Granada: Editorial Atrio.

Nesselman, G. H. F. 1842. *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Pastor, J. R. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática Volumen II. Del renacimiento a la actualidad* (3ª edición). Barcelona: Editorial Gedisa

Pierce, C.S. (1987). *Obra lógico-semiótica* [Edición de Armando Sercovich]. Madrid: Taurus.

Pimm, D. (2002) *El lenguaje matemático en el aula*. (3era ed) Madrid: Ediciones Morata

Puig L. (s/f). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khwârizmî restaurado. En Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, México, Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En: Filloy, E. (Coord.) *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Fondo de Cultura Económica.

Ríbnikov, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Moscú: Mir

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Universitaria de formación del profesorado, nº 32*, mayo/agosto 1998, pp.73-86. [Documento en línea].Disponible en http://documat.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117980. [Consulta, 2014, enero, 10]

Vasconcelos, V. (2010). Um passeio pela historia de simbolos que representaram igualdade Matemática. *Revista brasileira de Historia da Matemática*, vol 10, N° 19, 75-87

Vergnaud, G.; Cortes, A.; Artigue, F. (1987). Introduction l'algebre aupres de debutants faibles. Problemes epistemologiques et didactiques. Actes du colloque de Sevres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques

Wussing, H. (1998). Lecciones de historia de las Matemáticas. España: Siglo veintiuno editores, S.A.

Andrés González Rondelles es MSc. en Educación, Mención Enseñanza de la Matemática. Egresado de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela); sus asuntos de interés indagatorio se ubican en el campo del Álgebra y su Didáctica; es Doctorante del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela. **agorondell@yahoo.es**

Fredy Enrique González es Doctor en Educación; se desempeña como formador de profesores de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL, Núcleo Maracay, Estado Aragua, Venezuela); es Coordinador Fundador del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM); además coordina el Proyecto de Reconstrucción Histórica de la Educación Matemática en Venezuela, el cual forma parte de una indagación de más largo alcance intitulada Historia Social de la Educación Matemática en América Latina (HISOEM-AL). **fredygonzalez1950@gmail.com**