ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO DE MAESTROS EN FORMACIÓN EN EL PROBLEMA DEL CASTILLO DE NAIPES[23]

Víctor J. Barrera

CES Cardenal Spínola-CEU

Encarnación Castro y María C. Cañadas

Universidad de Granada

RESUMEN

Presentamos una experiencia llevada a cabo con maestros en formación. Dichos estudiantes, han resuelto tareas en las que pueden poner en práctica razonamiento inductivo. Inicialmente lo han trabajado en el aula, tanto de forma teórica como resolviendo problemas presentados en un cuaderno de trabajo que ha sido especialmente preparado para tal ocasión. En este trabajo nos centramos en el análisis de la resolución del problema denominado del castillo de naipes. Para este análisis se utiliza un modelo de pasos para la descripción del proceso de razonamiento inductivo.

INTRODUCCIÓN

Razonamiento es la acción de dar argumentos que ayuden a explicar un hecho. La división de razonamiento aceptada desde la filosofía clásica considera dos tipos: razonamiento deductivo y razonamiento inductivo. Nos centramos, para este trabajo, en el segundo de ellos, entendido como un proceso cognitivo que da lugar al conocimiento científico a través del descubrimiento de leyes generales a partir de la

23 Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías, construcción de significados en Educación Matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

observación de casos particulares (Neubert y Binko, 1992). El razonamiento inductivo queda caracterizado por el hecho de partir de la observación y, considerando la regularidad de los fenómenos observados, conduce al establecimiento de conjeturas. Por ello, se le considera un medio potente para la adquisición de conocimiento y para realizar descubrimientos, tanto en matemáticas como en otras disciplinas. En el caso de los estudiantes de Educación Primaria este medio cobra especial importancia en la construcción de sentido numérico.

Dado que consideramos que los alumnos de Educación Primaria se van a encontrar con muchas situaciones en las que harán uso del razonamiento inductivo, concedemos gran interés al hecho de que desde las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática se forme a los futuros maestros en la utilización de dicho razonamiento.

Habitualmente se trabaja el razonamiento inductivo asociado a la resolución de problemas. Esto se debe a que los problemas se consideran una actividad altamente formativa y que ponen de manifiesto diferentes tipos de razonamiento (Segovia y Rico, 2001). De hecho existe una clasificación de los problemas matemáticos que atiende al tipo de razonamiento que tiene que realizar el sujeto para su resolución. Así, hay problemas cuya resolución se apoya en un razonamiento de carácter deductivo y otros cuyo razonamiento básico es de tipo inductivo (Cañadas y Castro, 2002). Entre las heurísticas, Pólya (1966) habla de la inducción[24] como una heurística potente para la resolución de problemas en el mismo sentido que tratamos el razonamiento inductivo. Pólya identifica unos pasos en el proceso de razonamiento inductivo que permiten sistematizar el trabajo relacionado con el mismo. El proceso se iniciaría con casos particulares, pasaría por la formulación de una conjetura, y se llegaría a la comprobación de la conjetura con nuevos casos particulares. Partiendo de las ideas de Pólya y de un estudio exploratorio realizado con alumnos de secundaria (Cañadas, 2002) —cuyo objetivo principal era analizar los procesos que siguen los estudiantes al resolver problemas utilizando la inducción como heurístico—, Cañadas y Castro (2007) amplían los pasos hasta siete, y configuran un modelo para la descripción de este razonamiento: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de casos particulares, (c) identificación de un patrón, (d) formulación de conjetura, (e) justificación de conjetura basada en casos particulares, (f) generalización y (g) demostración. Utilizamos este modelo para analizar el proceso seguido por un grupo de maestros en formación en la resolución de un problema, después de que éstos hayan pasado por una fase de estudio de este tipo de razonamiento en el aula a través de un cuaderno de trabajo.

MARCO METODOLÓGICO

En este apartado presentamos los sujetos que participaron en la investigación y el trabajo que realizaron en la fase previa de trabajo.

Maestros en Formación

El trabajo se ha llevado a cabo con 36 estudiantes de tercer curso de la diplomatura de magisterio de la especialidad de educación física del Centro de Estudios Superiores Cardenal Spínola CEU de Sevilla.

24 Diferenciamos entre *inducción* o *razonamiento inductivo* y la *inducción completa* o *inducción matemática*. La inducción completa es un método de demostración basado en el Principio de Inducción Completa en el que predomina el razonamiento deductivo.

Como parte de los contenidos que trabajan estos maestros en formación hay un tema sobre resolución de problemas. Entre los objetivos de este tema están el análisis de diferentes estrategias heurísticas, siendo el razonamiento inductivo una de ellas.

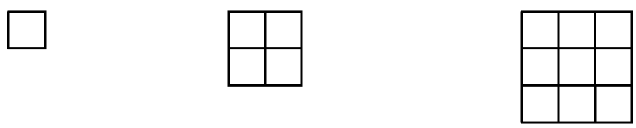
Trabajo en el Aula

Elaboramos unos cuadernos de trabajo para que los estudiantes conocieran las características del razonamiento inductivo y practicaran su utilización en la resolución de cierto tipo de problemas. Durante cinco sesiones de dos horas cada una, y de manera individual, trabajaron bajo la supervisión del profesor, quien también ofrece explicaciones complementarias en ocasiones puntuales.

El cuaderno de trabajo tiene varias partes. En primer lugar, hay contenidos teóricos relativos al razonamiento inductivo y a la inducción matemática, que son complementados con explicaciones del profesor, quien también les justifica el interés que tienen para su formación como maestros. En el cuaderno se proponen diferentes situaciones mediante los sistemas de representación gráfico y numérico, intercalando ejemplos y tareas para que los estudiantes pongan en práctica los contenidos tratados. El nivel de dificultad de los problemas aumenta conforme se avanza en el cuaderno. La información proporcionada y las tareas están relacionadas con los pasos del modelo de razonamiento inductivo.

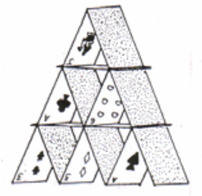
Para finalizar el cuaderno se plantean cuatro situaciones a los estudiantes. En cada una de ellas hay apartados relacionados con los pasos del modelo de razonamiento inductivo. El objetivo es comprobar la utilización que hacen los estudiantes de cada uno de los pasos en la resolución de los problemas planteados. Presentamos a continuación una de estas situaciones a modo de ejemplo.

> Toni y Tere están jugando con palillos formando diferentes figuras sobre la mesa. Construyen cuadrículas como base para un juego de mesa. Comienzan con la más pequeña, que es aquella que tiene un palillo en cada lado exterior, para la que necesitan 4 palillos. Aumentan un palillo por lado para tener la cuadrícula de lado dos formada por 12 palillos. De esa misma manera continúan construyendo cuadrículas.



> a) Toni ha construido la figura 4. Indica la cantidad de palillos que habrá utilizado.
>
> b) Si Tere quiere formar la figura 8, ¿cuántos palillos necesitará? Describe como se forma dicha figura.
>
> c) Han construido una cuadrícula para la que han necesitado 220 palillos. ¿Cuántos palillos tendrá dicha figura en cada lado exterior?
>
> d) Tere quiere saber cuántos palillos necesita para poder construir cualquier cuadrícula siguiendo el proceso que han utilizado hasta ahora. Ayudadle a encontrar una expresión que le permita conocer el número de palillos que necesitará para construir una cuadrícula en la que en el lado exterior tenga “n” palillos.
>
> e) Expresa el término de orden n descompuesto como sumas a partir del primer término de la sucesión, y demuestra utilizando el Principio de Inducción Completa que dicho resultado es igual al obtenido en el apartado d.

Posteriormente, se trabajan las progresiones aritméticas como herramienta para resolver problemas y se plantea una situación que puede resolverse utilizando lo tratado en el apartado previo. Se desarrolla la expresión de los números triangulares, sin presentarles la expresión general para las secuencias de números cuadrados, pentagonales ni hexagonales. Para finalizar se les proponen tres problemas a los estudiantes. Nos centramos en el último de ellos, el del castillo de naipes, en cuyo enunciado no se incluye referencia alguna a los pasos del modelo de razonamiento inductivo —como sí ocurría en casos anteriores—. El enunciado del problema es:

> Entre las diferentes competiciones planteadas para la semana cultural de un colegio, está la de construir castillos de naipes con la estructura que aparece en el dibujo:
>
> 
>
> De esta manera, se necesitarán 2 cartas para el castillo de un piso. En la ilustración aparece el castillo de altura 3, que, como puede observarse, está formado por 15 cartas.
>
> Utiliza todos los conocimientos estudiados sobre la inducción y describe cómo es la figura de altura n y cuantas cartas serían necesarias para construirla.

OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo de este trabajo es analizar los pasos del razonamiento inductivo que utilizan los estudiantes en la resolución del problema del castillo de naipes.

RESULTADOS

De los 36 estudiantes que entregaron el cuaderno de trabajo en este grupo, 9 no respondieron al problema. Nos centramos en las producciones de los 27 estudiantes restantes. A continuación, identificamos el número de estudiantes que realizaron cada uno de los pasos considerados en el modelo.

Trabajo con Casos Particulares y Organización de los Mismos

Todos los estudiantes que respondieron al problema, excepto 1, trabajaron con casos particulares. El número de casos particulares con los que trabajan está entre 4 y 7, si bien el número medio es 6.

Estos 26 estudiantes que trabajaron con casos particulares también los organizaron, utilizando todos ellos una tabla para presentar la información obtenida del trabajo con los casos particulares.

Patrón

En cuanto a la identificación de un patrón, observamos que los 27 alumnos llegan a ver regularidades en la tabla y, a partir de ella, descubren algún patrón.

Se observan diferentes patrones. De los 27 estudiantes, 23 detectan que va aumentando el número de cartas según aumenta el número de pisos de la torre, identificando que para cada piso nuevo, se suma el mismo número de cartas añadidas para el piso anterior más tres. Todos ellos identifican un patrón recurrente adecuado. Los otros 4 estudiantes descomponen la secuencia del número de cartas por piso como suma de dos secuencias: la de cartas de pie (el mismo patrón que utilizaron los otros 23 estudiantes) y la de cartas horizontales (que la relacionan con la secuencia de números triangulares). En la Figura 1 se puede observar un ejemplo de la producción de uno de estos estudiantes.

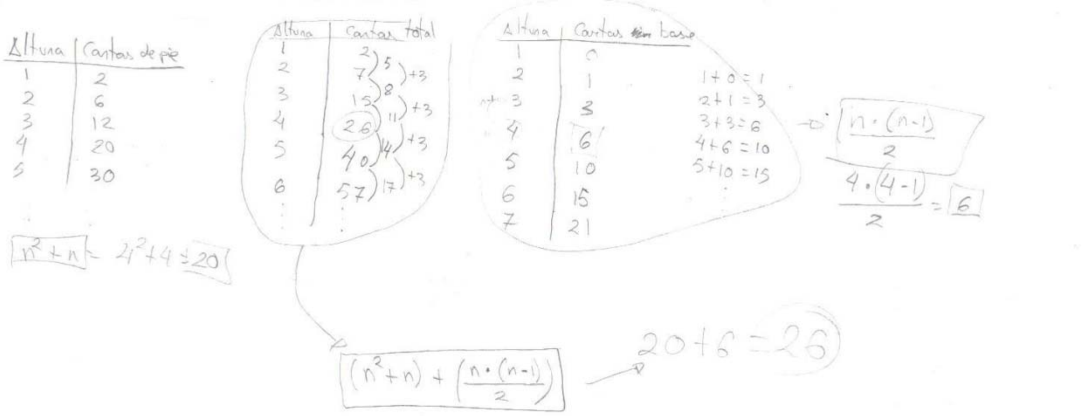


Figura 1.- Respuesta de un alumno que descompone la secuencia en dos

En cualquier caso, todos los patrones que detectan son patrones adecuados basados en una relación recurrente.

Formulación, Justificación de Conjeturas y Generalización

No es posible diferenciar la formulación de conjeturas de la generalización en las producciones de los estudiantes ya que todos los maestros en formación logran, algebraica o verbalmente, una expresión general para determinar el número de cartas de una torre con cualquier número de pisos. Dan la expresión general como solución al problema. Hay 24 estudiantes que expresan la generalización algebraicamente, dos de ellos expresan la generalización verbalmente y uno verbal y algebraicamente.

Los 24 que generalizan utilizando una expresión algebraica, llegan de tres formas diferentes. Cuatro de ellos lo hacen descomponiendo la progresión como suma de la progresión de las cartas horizontales (triangulares) y de las cartas de pie. Cinco estudiantes dan una expresión algebraica como suma de tantos términos como pisos tiene la torre, dando la expresión del sumando n-ésimo (se puede ver un ejemplo en la Figura 2). Los quince estudiantes restantes que generalizaron dieron la expresión como suma del número de cartas por piso.

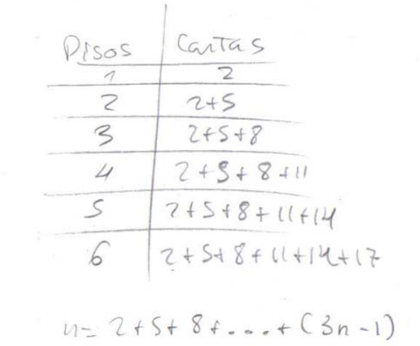


Figura 2.- Respuesta de un alumno que expresa el término general como suma

Únicamente un alumno comprueba que la conjetura que ha formulado es válida para algún caso particular.

Demostración

Ningún estudiante de los que expresan la generalización utiliza el Principio de Inducción Completa para demostrar que la expresión a la que han llegado es correcta.

Resumen de Resultados

En la Tabla 1 resumimos las frecuencias de uso de cada uno de los pasos del modelo de Cañadas y Castro (2007) en la resolución de este problema.

Lo usan	Trabajo casos particulares	Organización casos particulares	Identificación de un patrón	Formulación de conjetura	Justificación de conjetura	Generalización	Demostración
SI	**26**	**26**	**27**	**27**	**1**	**25**	**0**
NO	**1**	**1**	**0**	**0**	**26**	**2**	**27**

Tabla1.-*Frecuencias de estudiantes que utilizan los pasos*

CONCLUSIONES

En cuanto al número de estudiantes que responden al problema del castillo de naipes, consideramos que 5 de los 9 estudiantes que no resolvieron este problema fue porque no les dio tiempo, ya que tampoco resolvieron algunas de las tareas anteriores. De los otros 4 sujetos no tenemos información suficiente para plantear una conjetura.

Los resultados ponen de manifiesto que hay pasos que los estudiantes no utilizan para resolver un problema en el que pueden hacer uso del razonamiento inductivo, a pesar de conocerlos y haberlos trabajado en tareas anteriores. Los pasos que con más frecuencia utilizan son: (a) trabajo con casos particulares, (b) organización de casos particulares, (c) identificación de un patrón, (d) formulación de conjetura y (e) generalización. En el caso de la organización de los casos particulares, utilizan únicamente las tablas, que es el sistema que han trabajado en el cuaderno.

Los pasos relacionados con la justificación tienen asociados unas frecuencias bajas. Sin embargo, la no realización de un paso, no ha hecho que los estudiantes no hayan avanzado hacia otros pasos del modelo de razonamiento inductivo.

Los modos que tienen para llegar a la generalización son variados. Los que más utilizan son la comparación con la secuencia de los números triangulares, estudiada previamente, y en el caso concreto del problema del castillo de naipes, utilizan las características propias de la secuencia a la que llegan por ser una progresión aritmética.

Una línea de trabajo abierta y que tratamos de seguir consiste en analizar si la realización de ciertos pasos intermedios de los considerados en el proceso inductivo habría ayudado a los estudiantes a avanzar más en el razonamiento que llevan a cabo.

REFERENCIAS

BARRERA, V. J. y CASTRO, E. (2003). Uso intuitivo que hacen del razonamiento inductivo maestros en formación. En J. M. Cardeñoso, J. L. Lupiáñez, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds), *Investigación en el aula de matemáticas. La evaluación* (pp. 161-168). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y SAEM Thales.

CAÑADAS, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de Secundaria.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

CAÑADAS, M. C. y CASTRO, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno, y M. Peñas (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 147-153). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granaday SAEM Thales.

CAÑADAS, M. C. y CASTRO, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78. (Disponible en www.pna.es)

NEUBERT, G. A. y BINKO, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom.* Washington: National Education Association.

PÓLYA, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

POZO, J. I.; del PUY, M.; DOMÍNGUEZ,J.; GÓMEZ, M. A. y POSTIGO, Y. (1994). *La solución de problemas.* Madrid: Santillana.

SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.