INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: ALGUNOS ASPECTOS DE LA DERIVADA[22]

Gabriela Buendía Abalos, Liliana Suárez Téllez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS. CINVESTAV-IPN, MÉXICO

buendiag@hotmail.com, lsuarez@cinvestav.mx

Resumen. *El propósito de este artículo es proporcionar una visión de introducción a la investigación que se realiza en Matemática Educativa. Proponemos una estrategia a fin de presentar tres etapas en la investigación: identificación de problemáticas de investigación, tratamiento desde diversos marcos teóricos y tratamiento en la Sociopistemología. Para ello, seleccionamos la investigación que se ha realizado sobre la derivada.*

Palabras Clave: Matemática Educativa, fenómeno didáctico, derivada, periodicidad, uso de las gráficas.

Introducción

La matemática no es un saber que haya sido creado para enseñarse y su introducción al aula provoca una serie de transformaciones y adecuaciones. Su enseñanza posee particularidades sobre las cuales la investigación ha arrojado resultados que han ido evolucionando desde aquéllos que la alejan de ser considerada un arte y, en consecuencia difícilmente analizable, hasta ser vista como un conjunto de hechos y fenómenos didácticos cuya investigación requiere y ha alcanzado ya un rigor científico (Chevallard et al, 1998). En ese marco, el quehacer sistemático del matemático educativo[23] ha producido una serie de

[22] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior*. Clave: No. 47045.

[23] Matemático educativo, didacta de la matemática o educador matemático, según se trate de la Escuela de Pensamiento (clasificada de acuerdo a su ubicación geográfica y conceptual): Matemática Educativa en

explicaciones que han enriquecido nuestro entendimiento acerca del papel de la matemática en el aula.

El objetivo del Seminario de Introducción a la Matemática Educativa es presentar el quehacer de un matemático educativo y para ello proponemos la siguiente estrategia:

1. Identificación de problemáticas del área,
2. Revisión de algunos resultados de investigación con relación a la problemática,
3. Resultados de la investigación socioepistemológica.

Esta estrategia se seguirá alrededor de la noción de derivada ya que la investigación en Matemática Educativa ha abordado este tópico desde muy diferentes marcos teóricos proporcionando un amplio espectro en cuanto a resultados de investigación. Como un material de apoyo, en este artículo profundizaremos en el tercer punto de la estrategia sugerida.

Problemáticas y Matemática Educativa

La importancia de la derivada en el currículo ha sido mostrada por varios autores. Por ejemplo, Dolores (2007) presenta una revisión del estatus de la derivada en los textos y programas mexicanos actuales la cual nos muestra además del privilegio de la secuencia límite-función-derivada en el currículo tradicional, que este tema no está exento de sufrir apariciones y desapariciones curriculares según las políticas educativas vigentes. El papel de esta noción en el Cálculo la ha hecho, sin duda, objeto de estudio desde diferentes aproximaciones teóricas en Matemática Educativa. Ante ello, deberá siempre considerarse que al analizar un problema didáctico es necesario hacer explícita la concepción del

---

Latinoamérica, Mathematics Education en el mundo anglosajón o Didáctica de las Matemáticas en Europa Continental.

conocimiento que subyace a la explicación de los procesos de construcción (Cordero, 2006). Ello nos permitirá entender y reconocer la riqueza e importancia de los diferentes resultados en la Matemática Educativa.

Así, desde las construcciones mentales, que tratan con la dialéctica proceso-objeto, hasta la ausencia de marcos que permitan resignificar la derivada más allá de un proceso de interacción, la Matemática Educativa ha señalado varios aspectos sobre su naturaleza. Los procesos cognitivos que un individuo tiene que realizar ante un problema matemático o el papel de las interacciones para realizar tales procesos también nos han permitido entender los resultados de investigación que la comunidad ha producido.

La derivada en la Sociopistemología

Con respecto a este mismo objeto de estudio, la propuesta socioepistemológica se fundamenta en considerar una epistemología distinta para dotar de significado a la derivada. Estamos frente a una concepción que se pregunta por la constitución de la construcción del conocimiento, de ahí que en lugar de apuntar hacia los procesos cognitivos de los conceptos, por ejemplo, a punta hacia las prácticas sociales que generan dicho conocimiento (Cordero, 2006). De ahí, entonces, que se proponen epistemologías de prácticas en las que se relaciona el saber matemático con prácticas como la variación, la predicción o lo graficación.

Así, se presentan resultados como el de Rosado (2004). La autora menciona que la linealidad del polinomio[24] adquiere importancia cuando es resignificada como la recta que se le suma al término de mayor potencia del polinomio para afectar su comportamiento. La variación de parámetros de la recta ayuda a identificar un patrón de comportamiento de la curva del polinomio, el cual consiste en que la curva tiende a comportarse como la recta en

[24] Propiedad que consiste en identificar que la parte lineal de cualquier polinomio es la recta tangente a la curva del polinomio, en el punto *(0, P(0))*

la vecindad del cero, y fuera de ésta las "ramas" de la curva recuperan su comportamiento de acuerdo a la potencia mayor del polinomio.

En la línea de investigación sobre "Pensamiento y lenguaje variacional" (González, 1999; Dolores et al, 2002) se ha señalado que es factible construir una relación significativa entre una función y sus derivadas cuando se favorece un tránsito entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultáneo entre la función y sus derivadas, de tal manera que se pueda reconocer en todas ellas la forma de estudiar los cambios sucesivos. Es necesario romper pues la idea de iteración.

Con el mismo objetivo de dar significados a la relación entre una función y sus derivadas, la investigación se ha valido del uso de gráficas en el cual éstas representan una forma de argumentación que favorece la construcción del conocimiento matemático. Una situación de transformación (Cordero, 2001, 2006) da cuenta de que la función $y = f$ en la relación entre la derivada y la primitiva puede ser concebida como una instrucción que organiza comportamientos entre ellas. Ya que la función no se percibe como un proceso previo a la gráfica, la gráfica de f permite organizar los comportamientos de la gráfica de f' y viceversa. Para ello se tiene que transitar significativamente por los registros gráfico, algebraico, e incluso el tabular.

Presentamos a continuación los resultados de dos investigaciones puntuales que, en el marco de la socioepistemología, abordan la noción de derivada.

A) Aspectos de uso de las gráficas de la derivada

El objetivo de estudiar la graficación está determinado por intereses de las líneas de investigación sobre el Cálculo y el Análisis. En estas líneas se ha identificado a la graficación como un aspecto fundamental en la construcción de conocimiento matemático, aunque en la mayoría de los estudios por la graficación el interés está en la articulación de representación algebraica y la representación gráfica.

Torres (2004) realiza un estudio del uso de las gráficas a partir de la revisión de algunos textos de bachillerato (Phillips, 1999 y Zill, 1985) y de trabajos de investigación en Matemática Educativa (Cordero y Solís, 2001; Cantoral y Montiel, 2001; Suárez et al, 2004) e identifica los usos de las gráficas que se generan con el uso de la tecnología.

Los elementos que sirven de base para la caracterización de usos de las gráficas en bachillerato, reportados en Torres (2004), son considerados no sólo en su relación con el concepto de función sino con los significados, procedimientos y argumentos que intervienen en las acciones que desarrolla un estudiante ante una actividad de graficación. Este estudio se realizó desde la perspectiva socioepistemológica, en la que se considera que la construcción de conocimientos debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática. Esta correspondencia es el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana (Cordero, 2001, 2006).

Uno de los usos que presenta Torres se refiere a la graficación por medio de la simulación de un fenómeno físico empleando tecnología. El estudiante realiza distintos movimientos ante un sensor y obtiene gráficas que están relacionadas con los movimientos que realiza, de la relación que el estudiante entre el movimiento y las gráficas se generarán los significados en este uso de las gráficas.

Los estudiantes modelan el movimiento al hacer una descripción gráfica de la posición y de la velocidad, al discutir sobre la inclinación de las rectas, aun antes de realizar la simulación y obtener las gráficas con la tecnología. Ellos pueden relacionar los aspectos de la situación de movimiento con las gráficas obtenidas a partir de múltiples realizaciones del movimiento frente al sensor, identificar los intervalos de cambios de velocidad. Respecto a la pendiente podemos afirmar que identificaron en la gráfica que una recta con menor inclinación representaba que su velocidad era más lenta que aquella que tuviera mayor inclinación, transitaron entre las diferentes representaciones que estaban en juego como son la verbal, la gráfica y por supuesto la de la simulación.

La tecnología permite a los estudiantes tener una visión global y local, tanto cualitativa como cuantitativa de la gráfica, en la que los estudiantes pueden explorar y dar explicaciones de lo que sucede con la situación, por lo que será necesario plantear problemas de situaciones reales en las que los estudiantes puedan transitar con facilidad entre las diferentes representaciones: simulación, verbal, tabular, gráfica y algebraica antes y después de usar la tecnología. Las actividades propuestas deben estar encaminadas a generar conocimientos matemáticos integradores.

Los ciclos de exploraciones, discusiones y reflexiones de situación-simulación-situación permiten incorporar los significados generados por los estudiantes para la construcción de una apreciación cualitativa y cuantitativa de la velocidad durante el recorrido a partir de la gráfica de la posición con respecto al tiempo. En la ilustración 1 se puede apreciar la diversidad de asociaciones entre una situación de movimiento y la representación gráfica de la posición con respecto al tiempo: puntos donde la velocidad es nula, intervalos donde la velocidad es positiva o negativa y comparaciones entre instantes donde se tiene menor o mayor velocidad o rapidez (valor absoluto de la velocidad). En este sentido la actividad de aprendizaje planteada permite la construcción de conocimiento a partir de la modelación y la simulación del movimiento.

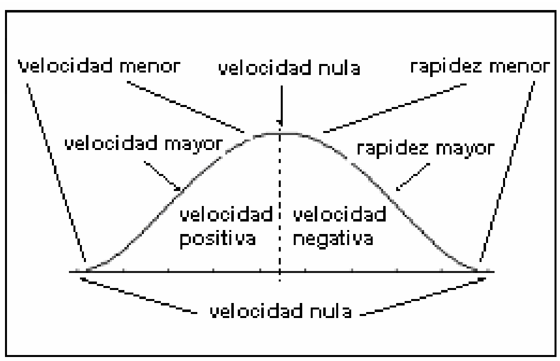

Ilustración 1. Descripción cualitativa de la velocidad

En la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha tenido particularmente importancia la actividad de la simulación, esto se debe a la complejidad de las construcciones. En nuestro proyecto se adopta la perspectiva de que la simulación está estrechamente relacionada a la actividad de modelar con tecnología y se elije la representación gráfica que proporcionan calculadoras con poder de graficación[25], así como los sensores[26] (transductores de datos).

En el planteamiento de las experiencias de aprendizaje está considerado que los estudiantes realicen en varias ocasiones el movimiento (simulación) para poder observar patrones gráficos que lo caractericen. En la situación de una persona que se aleja para después regresar a un punto de partida se toman decisiones sobre la distancia a recorrer, sobre el instante en el que se emprende el regreso, sobre la trayectoria que se debe seguir frente al sensor. Cada una de estas decisiones tiene consecuencias sobre la gráfica resultante como se puede observar la siguiente ilustración.

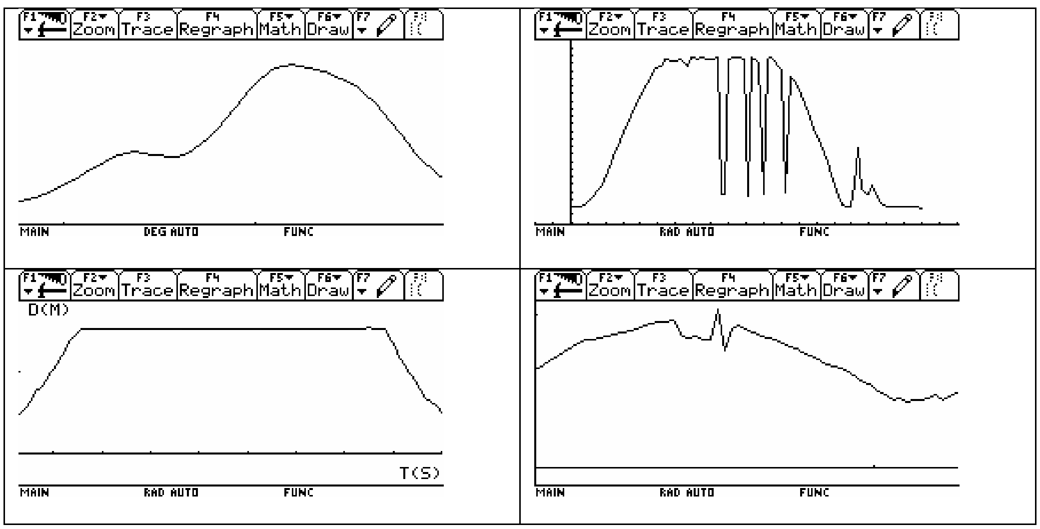

Ilustración 2. Múltiples realización de una simulación del movimiento de una persona

De la diversidad de gráficas obtenidas se pueden extraer comportamientos que persisten no importando las variables incluidas en el movimiento realizado. Dos de ellas se refieren al

[25] Calculadoras Voyage, TI-92 y ClassPad.

[26] Se han utilizado los transductores, analizadores de datos y sensores asociados a las calculadoras mencionadas en la nota anterior.

tipo de gráfica que se genera en todo el trayecto en una dirección, por ejemplo, el trayecto de ida (ilustración 3a) o bien en el patrón de gráfica alrededor del instante en que se emprende el regreso (ilustración 3b).

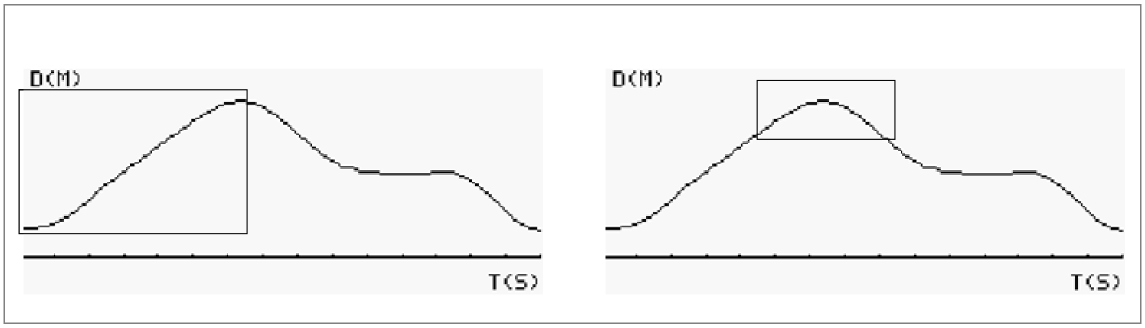

Ilustración 3. Patrones gráficos identificados en el movimiento de una persona.

Estos patrones gráficos adquieren sentido y significado en la situación a partir de las relaciones que se pueden establecer entre las gráficas y la situación de movimiento que viven los estudiantes.

Con los significados construidos que relacionan los modelos gráficos con la situación de movimiento, los estudiantes pueden resignificar las gráficas a partir de los ajustes que requieren hacer para obtener nuevas gráficas relacionadas con la primera.

De esta manera, el potencial de la graficación es mayor si se le considera en sí misma una modelación. Las características que debería cumplir son: 1) las gráficas se obtienen a partir de una simulación que lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en el movimiento para producir un resultado deseable en la gráfica, 2) tiene un carácter dinámico que permite crear modelos gráficos que se convierten en argumentos para nuevas descripciones de movimientos, 3) propicia la búsqueda de explicaciones y enfatiza los comportamientos invariantes en las situaciones. Uno de los propósitos de esta investigación es aportar las evidencias de que la práctica de la graficación soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación.

B) La relación entre una función y sus derivadas en un escenario periódico

En el discurso matemático la relación entre una función y sus derivadas resulta ser poco significativa por el privilegio de los aspectos analíticos que usualmente se presenta. Diversas investigaciones (Aguilar, 1999; Hernández, 2004) han dado evidencia de que las propiedades que presenta f parecen heredarse directamente a f'. Por ejemplo, si a una función se le suma una constante, esta constante permanece en su derivada y, entonces, si una gráfica tiene un desplazamiento vertical sobre el eje y, la gráfica de su derivada también se desplaza también verticalmente.

Esta “herencia” de características ocurre también en la propiedad periódica de una función. En el marco de la investigación que llevamos a cabo sobre la socioepistemología de lo periódico (Buendía, 2004; Buendía, 2007). Hemos preguntado a profesores de nivel medio y medio superior sobre la validez de la proposición *f es periódica* $\Leftrightarrow$ *f' es periódica* (Ordoñez, 2007) (Ilustración 5). La respuesta común es afirmativa ya que se hace referencia a la función seno o coseno cuyas derivadas, efectivamente, son periódicas. Consideramos que el marco de referencia que se tiene al abordar esta pregunta es limitado tanto en el aspecto periódico de la función como en el de la propia derivada.

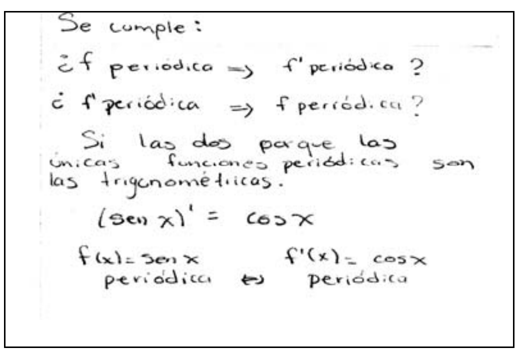

Ilustración 5. f es periódica $\Leftrightarrow$ f' es periódica

Por parte de lo periódico, una respuesta afirmativa induce a pensar que la periodicidad no está siendo usada como una propiedad que califica a un cierto comportamiento, sino que se limita a calificar a una determinada función: la función trigonométrica (seno, especialmente). Y, por parte de la derivada, nos encontramos con el privilegio de argumentos analíticos ("la derivada del seno es el coseno") sin que la relación $f - f'$ pueda analizarse cualitativamente, de tal manera que una informe acerca de la otra aunque no necesariamente mantenga sus mismas cualidades (en este caso, la periodicidad).

Al inicio de este escrito, mencionamos algunos planteamiento sobre la derivada que hemos tomado para la problemática descrita y, por otro lado, la investigación sobre lo periódico ha dado cuenta de que existe una irreflexiva asociación entre función trigonométrica y periodicidad (Buendía, 2004). Por ejemplo, es común que una gráfica como la siguiente (Ilustración 6a) sea calificada como periódica. Una razón que se ha encontrado para ello es que cualquier función cuya forma sea senoidal adquiere como por herencia la propiedad periódica de la función analítica $f(x)$ = sen x.

Otros argumentos que se han presentado para calificarla como periódica hacen uso de la gráfica: *sí es periódica porque es factible encontrar un patrón de repetición en el eje x* (Ilustración 6b)

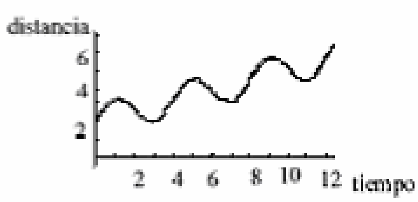

Ilustración 6a

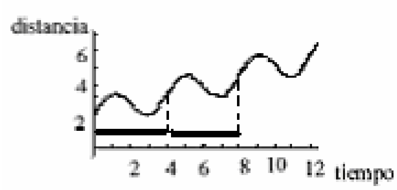

Ilustración 6b

De acuerdo a la estructura matemática, esto podría ser un cuasiperiodo[27]. Pero esto puede resultar una razón suficiente, entre algunos alumnos y profesores de matemáticas, para que sea periódica ya que al seguir ese patrón la gráfica “sube siempre igual”.

Es factible, a partir de la gráfica 6a hacer un bosquejo de su derivada. Cada uno de los máximos o mínimos locales representarán ceros en f'. Ya que la gráfica de f mantiene la misma forma en cada intervalo del eje x, entonces el comportamiento de las tangentes en realidad es el mismo en cada intervalo. Así, la gráfica de la derivada sí resulta periódica.

Este análisis cualitativo de las gráficas de $f - f'$ en el que el comportamiento de cada gráfica informa, finalmente, de la relación que guardan entre ellas, parece indicar que, para el caso de estas gráficas, si f fue calificada como periódica, el argumento que se usa tiene se refiere a cómo está variando: cada intervalo en el eje x presenta el mismo comportamiento en el eje *y.*

Veamos ahora el aspecto analítico de una función con un comportamiento similar analizando, de manera simultánea, la gráfica de la función $f(x)= x + sen\ (x)$ y de su derivada:

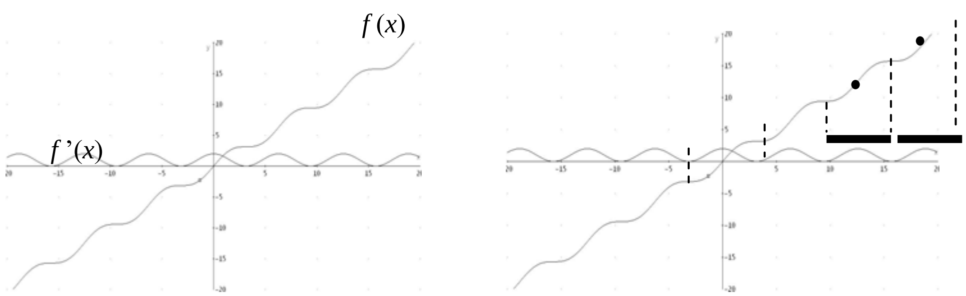

Ilustración 7. Análisis cualitativo de las gráficas de $f - f'$.

Podemos construir diversos argumentos a partir de las gráficas de estas dos funciones. Por ejemplo, el punto de inflexión de $f(x)$ (en línea punteada) señala los ceros de la función derivada y éstos siguen un patrón repetitivo en el eje x lo cual es una parte de la propiedad

[27] Aun cuando el movimiento no es verdaderamente periódico, podemos definir un cuasiperiodo $T_d = 2\pi\ /\ \mu$ como el tiempo entre los máximos sucesivos del desplazamiento (Boyce, DiPrima, 1987)

periódica. Dentro de esos intervalos, existe otro punto de inflexión ( ) que corresponde a un máximo de la derivada (o, digamos, en este punto la curva presenta una inclinación tal que la pendiente de la tangente es máxima). Ese valor de la pendiente de la tangente es el mismo en cada uno de los intervalos, independientemente del valor ascendente que va tomando la abscisa. Pareciera, nuevamente, que si $f(x)$ es señalada como periódica, en realidad se está haciendo referencia a su derivada.

Estamos, pues, tratando con ciertas funciones que no son periódicas pero que sus derivadas sí lo son. Si esta situación es analizada en contextos de movimiento, por ejemplo, señalan la existencia de movimientos que no son periódicos pero cuya velocidad –y aceleración- sí lo son. En el curso de la investigación (Buendía, 2004) hemos preguntado a estudiantes y profesores de matemáticas cómo tendría que moverse un objeto a fin de obtener la gráfica tiempo distancia indicada en la ilustración. Algunas descripciones son las siguientes:

> *"El cuerpo avanza y retrocede un poco menos de lo que avanza, este movimiento lo va repitiendo* ***en forma constante****"*
>
> *"Es un cuerpo que se encuentra en un punto A, de aquí recorre una distancia pasando por B hasta llegar al punto C, regresa al punto B, desde B se dirige pasando por C hasta llegar a un punto D, regresa al punto C,… etc. Esto* ***con una velocidad casi constante****"*
>
> *"El cuerpo avanza y retrocede un poco menos de lo que avanza, este movimiento* ***lo va repitiendo en forma constante****"*

Consideramos que los argumentos anteriores están siempre haciendo referencia a la velocidad (derivada) del movimiento o bien a la variación periódica (de ahí que le llaman "constante") del movimiento.

La conclusión que podemos extraer hasta aquí es que una relación significativa entre $f - f'$ surge en un contexto de variación en el que se rompe la idea analítica de iteración algebraica. Cuando se trata de funciones periódicas, esta relación parece estar de manera implícita al tratar con *f*. Esto es, no hay una clara distinción entre "el se repite" y "el cómo se repite".

En la sociopistemología de lo periódico (Buendía, 2004; Buendía, 2007; Buendía y Cordero, 2005) da cuenta de que el reconocimiento significativo de esta propiedad vive al seno de la práctica de predicción. Esto es, al predecir es posible distinguir significativamente entre el "se repite" y el "cómo se repite" lo cual es necesario para el reconocimiento de la naturaleza misma de la propiedad y no del objeto al cual se aplica.

A fin de analizar la relación entre una función y sus derivadas al tratar con funciones periódicas, se realizó una investigación sobre el uso de lo periódico en diferentes situaciones (Ordoñez, 2007). Presentamos un ejemplo en el que subyacen prácticas sociales que favorecen la generación de conocimiento.

<u>Situación 1</u>. Al estudiar el problema de los tres cuerpos[28], Poincaré (citado en Aluja, 2005) establece que:

> "*…en un determinado momento, un sistema se halla en un estado concreto y en un momento posterior vuelve, de nuevo, al mismo estado. Todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes. Así, debe repetirse, una y otra vez, el movimiento que le ha conducido desde un estado de nuevo a sí mismo: el movimiento es periódico.*"

Esto es, Poincaré, al describir un movimiento periódico, no sólo hace referencia a que es un movimiento que "se repite" sino que pone énfasis en "el dónde pasa, y el cómo pasa". Lo anterior le permite encontrar soluciones periódicas para las ecuaciones diferenciales que describen el problema. Consideramos que una práctica de predicción está favoreciendo el desarrollo de saber matemático en esta situación ya que, dada una cierta información, Poincaré se ocupa de describir (matemáticamente) lo que pasará después. En resumen, y

[28] Determinar en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a su atracción mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas

con base en lo anteriormente expuesto, consideramos que una relación significativa entre la función y sus derivadas al tratar con funciones periódicas, se da en un marco de prácticas como la graficación, la predicción y la modelación. Ello favorece una distinción entre la repetición que presenta la función y la forma de dicha repetición.

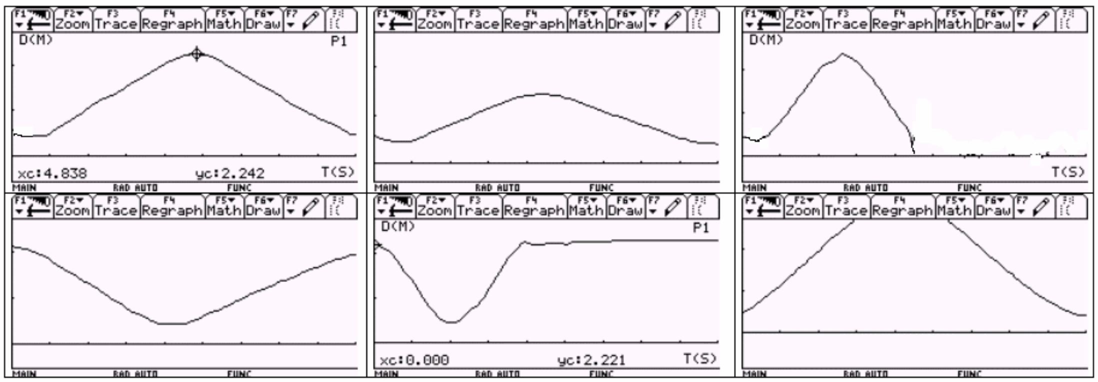

Ilustración 4. Patrones gráficos identificados en el movimiento de una persona.

Actualmente se cuenta con un marco de referencia que permite explicar cómo este uso de las gráficas se relaciona con contenidos de los cursos de Cálculo. La Modelación – Graficación (Suárez y Cordero, 2007). Tenemos evidencia de la existencia de un “uso de las gráficas” que está determinado por una problematización que promueve el interés por el estudio del cambio. Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración donde podrían intervenir conceptos como la razón de cambio, la relación de una función con su derivada, manejo simultáneo de dos o más órdenes de variación, máximos o mínimos o la acumulación de una función. Pero también, y más importante para las hipótesis de trabajo de nuestra investigación, las gráficas de las funciones son el conocimiento mismo que se desarrolla y que hoy aportan datos epistemológicos que propician nuevas hipótesis para trabajar la variación en la matemática escolar. Por un lado, tenemos explicaciones sobre cómo la graficación conforma elementos importantes de construcción para las ideas de la variación y que se desarrollan de manera independiente, en este caso anterior al desarrollo analítico del concepto de función. También tenemos explicaciones sobre un uso argumentativo ya que la gráfica pasa a ser un elemento central en explicaciones como el de la caracterización de los puntos extremos o en el establecimiento de la veracidad de relaciones físicas o numéricas conocidas.

Discusión

En los dos apartados anteriores hemos discutido sobre la derivada con una perspectiva teórica específica, la socioepistemología. Reconocemos, al igual que Godino, que "La complejidad de los fenómenos puede precisar la coexistencia de distintos programas de investigación, cada uno sustentado por paradigmas diferentes, con frecuencia mezcla de los considerados como idóneos para otras disciplinas."(Godino, 2003). En particular lo que nos ofrece la socioepistemología es una mirada que se fundamenta en el estudio epistemológico que identifica las características que permiten la constitución social de tales conceptos, "en aquello' que hace que el conocimiento sea así y no de otra manera. El "aquello" es de naturaleza social que reconoce al grupo humano con su organización, su historia, su cultura y su institución que lo lleva a proceder de una manera y no de otra, es su *práctica social* generatriz de su conocimiento" (Flores, 2005). En nuestro caso, la linealidad del polinomio, el uso de las gráficas y lo periódico permiten resignificar a la derivada en el sentido de entenderla al seno de prácticas sociales.

Referencias

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en lagunas de las construcciones de los estudiantes.* Tesis de Maestría no publicada. Dirección de estudios de postgrado. Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Aluja, J. (2005). La matemática borrosa en economía y gestión de empresas I. *Matematicalia revista digital de divulgación matemática.* 1(3). Obtenido en abril 30, 2007 de http://www.matematicalia.net/

Boyce, W. y DiPrima,R. (1987). Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. México: Limusa.

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. (2007) Lo periódico una revisión en el marco de la socioepistemología. En Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R., Carrillo,C., López, I., Navarro, C., (eds) *Matemática Educativa: algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Díaz de Santos. pp 77-90 ISBN: 84-7978-786-4

Buendía, G., y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 299-333.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático. Prentice Hall y Pearson Education.

Cordero, F. (2001) La distinción entre construcción del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 4, (2), 103-128.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una vision socioepistemológica. En Cantoral, R., Covían, O., Farfán, R.M., Lezama, J., Romo, A. (Ed.) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. Reverté-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. 265-286.

Cordero, F. y Solís M.(2001). Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 5 (3), 225-250.

Flores, R. (2005). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Godino, J. (2003). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Gonzáles, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Hernández D. (2004). Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones x, x^2 y x^3. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Miranda, J. (2003). Diseño de levas. En Mecanismos (pp. 98-142). Obtenido en Abril 20, 2007 de

http://www.ufrrj.br/institutos/it/deng/kalil/IT_140_Proj_Maq/Parte2_Mecanismos/mecanismo.pdf

Ordoñez, A. (2007) *Un estudio de lo periódico en la relación de una función y sus derivadas*. Tesis de Maestría no publicada. México: Universidad Autónoma de Chiapas

Phillips, E., Butts, T. y Shaughnessy, M. (1999). Álgebra con Aplicaciones. Editorial Oxford.

Rosado, P. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica..Tesis de Maestría no publicada. México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

Suárez, L. y Cordero, F. (2007) Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista* Electrónica *de Investigación en Educación en Ciencias.* En evaluación.

Suárez, L.; Flores, C.; Gómez, A. y Licona, R. (2004). Uso de las Gráficas a través de Actividades de Modelación Matemática con Calculadoras y Dispositivos Transductores". Resumen del taller presentado en el Quinto encuentro de televisión y nuevas tecnologías educativas. DTE-IPN

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN.

Zill, D. (1985). Cálculo con geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.