¿FUNCIÓN O FUNCIONALIDAD DE LA FUNCIÓN? UN ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Ricardo Cantoral Uriza, Estelita García

Cinvestav-IPN

rcantor@cinvestav.mx, egarcia@cinvestav.mx

Resumen. *Se reporta un trabajo de investigación en curso que pretende explicar, bajo el marco teórico de la aproximación Socioepistemológica, la construcción social del conocimiento matemático que los individuos realizan cuando la noción de función es puesta en juego de manera explícita o implícita en una situación específica. Para lograr tal objetivo se considera como escenario de estudio el aula de un grupo de estudiantes de postgrado. Un aspecto que se considera importante es dar luz sobre los conocimientos y usos que los alumnos construyen cuando el discurso al interior del aula no está centrado específicamente en los conceptos matemáticos.*

Palabras Clave: construcción del conocimiento, uso de la noción de función, socioepistemología.

Introducción

La aproximación socioepistemológica problematiza la construcción del conocimiento matemático a través de las prácticas sociales, las cuales articulan y norman ciertas prácticas asociadas que le dan significación a los conceptos matemáticos. Esta aproximación enfatiza la importancia de los significados que el individuo es capaz de construir y atribuir a nociones matemáticas en un contexto y momento dados. Por tanto, "se plantea la hipótesis básica de que una epistemología basada en las prácticas sociales favorece un estudio de la construcción social de la matemática, a través de la reconstrucción de significados asociados al saber matemático, destacando el *carácter funcional* del mismo" (García-Zatti, 2007, p. 31).

Investigaciones realizadas en el seno de la Matemática Educativa, a través de estudios socioepistemológicos, han dado evidencias de cómo el discurso escolar suele favorecer solo algunos aspectos relacionados con los conceptos matemáticos, dejando de lado elementos presentes en la construcción social del mismo, tales como los argumentos y las herramientas relacionadas (Cordero, 2003, citado en García-Zatti, 2007). La centración en los conceptos matemáticos presente en el discurso escolar ha conducido a que se soslaye la importancia de los significados que el individuo construye y los usos que atribuye a ciertas nociones relacionadas con estos conceptos matemáticos.

En este tenor y tomando a la aproximación socioepistemológica como marco teórico realizamos una investigación en curso que *pretende explicar la construcción del conocimiento matemático que los estudiantes realizan, cuando la noción de función es puesta en juego de manera explícita o implícita.* La investigación no pretende centrarse en el concepto matemático función como tal, sino mirar las construcciones y usos que los individuos realizan con respecto a éste. Para lograr tal objetivo se ha tomado como población de estudio un grupo de estudiantes de postgrado, que cursan un seminario denominado Desarrollo del Pensamiento Matemático, en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN, México, D.F.

Aspectos metodológicos

El discurso matemático escolar suele privilegiar a los conceptos matemáticos como lo más importante del conocimiento matemático, propiciando el desarrollo de habilidades cognitivas para mejorar el entendimiento de dichos conceptos (Cordero y Flores, 2007). Asimismo, se supone el conocimiento matemático como un producto abstracto y acabado al cual debe acceder el individuo. Lo anterior, no permite destacar el carácter funcional de la matemática y su estatus como producto sociocultural, además no se da importancia a los diversos significados y usos que el individuo es capaz de construir respecto a las nociones matemáticas en una situación específica.

La investigación pretende explicar la construcción social de conocimiento matemático que los individuos realizan cuando la noción de función es puesta en juego de manera explícita o implícita, considerando una población específica. Por tanto, se establece que un escenario propicio para tal objetivo es el aula, bajo la premisa de que en este escenario se establece un proceso dinámico de interacción entre el individuo y su ambiente, conformándose una *'cultura matemática'*, es decir, un sistema que provee al individuo de conocimientos, normas sociales, negociación de significados y pautas de comportamiento (Aparicio y García, 2007).

La importancia de los significados y el discurso que se construyen al interior del aula cuando el individuo se encuentra en un ambiente cotidiano, dirige nuestra atención al empleo de enfoques cualitativos e interpretativos. En particular, se realiza trabajo de campo al interior del aula a través de la observación no participante.

Población de estudio

La población de estudio consta de seis alumnas y seis alumnos que cursan la Maestría en Ciencias, especialidad Matemática Educativa en el Cinvestav-IPN, México, D.F. El estudio se realiza durante un seminario denominado Desarrollo del Pensamiento Matemático I. Los(as) alumnos(as) poseen diferente formación académica, entre ellas: licenciatura en Matemáticas, licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas, licenciatura en Física, licenciatura en Física-Matemáticas, licenciatura en Física-Matemáticas con la especialidad en Matemática Educativa. Asimismo, cabe mencionar que cuatro alumnas y cinco alumnos son recién egresados de su licenciatura respectiva, mientras que la otra parte de la población ha ejercido por varios años su profesión y posee experiencia docente en determinas instituciones educativas. Los integrantes de la población de estudio provienen de distintas partes del país, (Distrito Federal, Edo. de México, Guerrero, Hidalgo, Nayarit y Yucatán), y un alumno es originario de Valparaíso, Chile.

Fuentes de información

Las observaciones no participantes realizadas al interior del aula: las clases han sido registradas en grabaciones de audio, apoyadas con notas de campo. Las grabaciones han sido transcritas.

Producciones de los alumnos en el aula: cuando los alumnos se enfrentan a la resolución de un problema se registra en grabaciones de audio sus producciones e interacciones con sus compañeros.

Producciones de los alumnos fuera del aula: para fines de la investigación se ha tenido acceso a las producciones de los alumnos que son solicitadas por el docente que imparte el seminario, como complemento de las actividades en el aula.

A partir de los datos que se obtienen de las fuentes anteriores se elaboraran registros de información, cuyo análisis tiene la finalidad de definir ciertos ejes que den luz sobre posibles categorías, que permitan explicar la construcción de conocimiento matemático de los alumnos al estar en juego la noción de función.

En una etapa posterior de la investigación también se pretende realizar entrevistas no estructuradas a los integrantes de la población de estudio.

Algunos aspectos sobre el concepto de función

Los alumnos y alumnas que conforman la población de estudio son individuos que, dada su formación académica, han experimentado un desarrollo teórico del concepto de función, por tanto poseen experiencias previas a través de las cuales han construido ciertos significados asociados a esta noción matemática. En una exploración inicial se pide a los alumnos y alumnas proporcionar su definición de función matemática, para mirar las nociones o términos asociados a este concepto, obteniéndose: relación, correspondencia, conjunto, imagen, rango, variable.

El seminario de Desarrollo del pensamiento Matemático se ha llevado a cabo de tal forma que plantea ciertos problemas, generando una dinámica que parte de un trabajo individual, seguido de una discusión en pequeños grupos para finalizar con una discusión grupal en la que se exponen los argumentos construidos.

Figura 1: Población de estudio en el aula observada

El seminario constituye una situación escolar donde los conceptos matemáticos que se involucran, (entre ellos el de función matemática), no se explicitan, es decir, no se presenta un discurso que formalice y defina matemáticamente dichos conceptos, por tanto los alumnos y alumnas deben poner en juego diversos conocimientos y construir argumentos que los lleven a una posible solución de los problemas, sin tener marcos de referencia explícitos. También cabe mencionar que ante un problema propuesto, el objetivo final no es que los(as) alumnos(as) logren realizar la demostración matemática, sino lo importante es propiciar la construcción de conocimiento matemático.

La investigación se encuentra en la etapa del trabajo de campo, por tanto no es posible proporcionar resultados concretos ni definitivos dentro del marco teórico considerado. No obstante, las observaciones realizadas han dado luz a una posible clasificación inicial con respecto a tres ejes que se desean analizar en las producciones de los alumnos:

Eje 1: uso de la noción de función.

Eje 2: estrategias desarrolladas.

Eje 3: elementos comunes en las estrategias desarrolladas por los alumnos.

A manera de ejemplo, se presenta uno de los problemas propuestos en el seminario y se describe algunos de las estrategias desarrolladas por los alumnos, tratando de considerar los ejes anteriores.

Problema: Sean $x, y \in \Re^+$, considerando la ecuación $x^y = y^x$, realice lo siguiente:

a) Prueba que la ecuación tiene solución.
b) Demuestra que existe una infinidad de parejas x, y que la resuelven.
c) Demuestra que de la infinidad de soluciones que la resuelven solo hay dos con la propiedad de que $x, y \in N$ y $x \neq y$.

Este problema es presentado en un registro algebraico y no se relaciona explícitamente con la noción de función. En un principio los incisos a) y b) no representaron dificultades para los alumnos, ya que encuentran a la pareja (1, 1) como solución del inciso a) y establecen que el conjunto solución del inciso b) es: $\{(x, y) | x = y, x, y \in \Re^+\}$. En el inciso c) a través de ensayo y error encuentran las parejas (2, 4) y (4, 2) como soluciones, sin embargo surge la necesidad de argumentos que permitan probar que son las únicas soluciones enteras. Enfrentar el inciso c) hace surgir cuestionamientos con respecto a la noción de solución.

Extracto 1, sesión 3 (discusión realizada entre tres alumnos), septiembre 13 de 2007.

Lu: ¿las soluciones son (2, 4) y (4, 2)?, es que para mí son las mismas.

R: No.

Lu: bueno si lo ves como pareja ordenada en un plano cartesiano.

R: no, si son distintas, no son el mismo punto.

Lu: si, pero, ¿por qué ponerlos como pares ordenados?

R: porque son dos números.

D: tú dices, ¿por qué ponerlos como pares ordenados?

Lu: Si, ya entendí lo del (2, 2), (3, 3), (se refiere a la infinidad de soluciones que cumplen con la condición de $x = y$), pero, ¿por qué ponerlo como pareja ordenada?

D: porque estamos, pensando en una función, ¿es función esa cosa?

Algunos de los alumnos miran en la ecuación una función de manera implícita, la cual está asociando dos variables y es un proceso del que se obtiene pares ordenados. Sin embargo, se observa que para el alumno Lu no es claro en ese momento el por qué ni el cómo asociar a la ecuación la expresión de una función.

Es posible que para el alumno el objeto ecuación y función sean de naturaleza distinta y no encuentre una relación explícita entre ellos, no obstante, como se mencionará más adelante, el alumno logra encontrar una expresión que le permite avanzar con respecto a una posible solución del problema planteado.

Al mismo tiempo que se realiza esta discusión en el aula, otro equipo se plantea como procedimiento para justificar el inciso c), fijar cada uno de los lados de la ecuación a un valor $a \in \Re^{+}$, es decir, $x^{y} = a$, $y^{x} = a$, de tal forma que al despejar a la variable y de cada una de las expresiones se obtenga la fórmula de una función. Las funciones obtenidas $y = a^{\frac{1}{x}}$, $y = \frac{\ln a}{\ln x}$ son graficadas, después de haber observado que al considerar las parejas (2, 4) y (4, 2), se obtiene a = 16. La graficación tiene la finalidad de comparar el comportamiento de las curvas, observar nuevamente los puntos de intersección y tratar de encontrar elementos que justifiquen el inciso c). Las gráficas de las funciones son realizadas en días posteriores a la sesión del seminario.

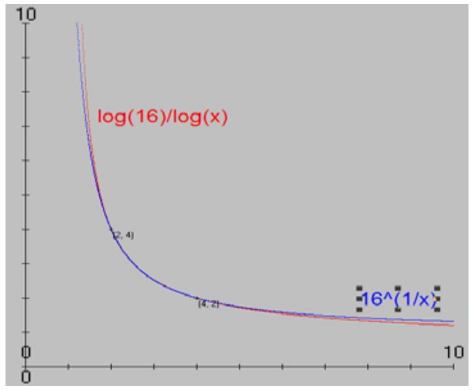

Figura 2: Gráfica de las funciones $y = a^{\frac{1}{x}}$, $y = \dfrac{\ln a}{\ln x}$

En este caso la noción de función es interpretada como una fórmula que relaciona variables, posteriormente surge la necesidad de cambiar al registro gráfico y se concibe la función como la gráfica de una curva.

Fuera del aula se continúa con la demostración del inciso c) y en sesiones posteriores se presenta la solución del problema en el Seminario. El alumno Lu, mencionado anteriormente, expone que al manipular algebraicamente el objeto ecuación intenta despejar una variable con respecto a la otra aplicando las propiedades del logaritmo natural, con lo cual obtiene la expresión $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$, al mirar esta estructura el alumno reinterpreta la expresión como la igualdad entre dos imágenes de la función $f(z) = \dfrac{\ln z}{z}$, por tanto el inciso c) es replanteado como el problema de probar que esta función genera pares de puntos en el plano que tienen la característica de tener la misma ordenada, y ver que entre dichos pares solo hay dos que cumplen tener coordenadas en los enteros positivos. En este punto se observa que si bien en un principio el alumno no es capaz de encontrar una relación entre el objeto ecuación y el objeto función, la profundización fuera del aula en la resolución del problema y posiblemente la interacción con sus compañeros, le permite hallar una expresión que signifique para él el paso de un objeto a otro.

De lo anterior, observamos que la *función es un concepto que puede surgir como un recurso que permita enfrentar y reinterpretar el problema* planteado, a pesar de que esta noción no se encuentre explícita en el contexto del problema.

También se observa que los(as) alumnos(as) tienen la necesidad de emplear más de un registro y establecer una coordinación entre éstos. En este problema primero se ubican en un registro numérico, el cual les permite encontrar las soluciones pedidas en cada inciso; ante la necesidad de proporcionar un argumento para demostrar el inciso c) pasan a un registro algebraico en el que construyen una expresión que se asocia a una función, en este punto se reinterpreta el problema involucrando esta noción. En ocasiones, para algunos alumnos(as) no vasta la expresión algebraica de la función determinada, sino que precisan de la gráfica para construir argumentos que justifiquen el inciso c), esto puede llevar nuevamente a la utilización de un registro gráfico.

En las diferentes estrategias desarrolladas por los(as) alumnos(as) se conservan ciertos elementos: la búsqueda de relaciones entre las variables de la ecuación, la necesidad reducir el número de variables, es decir, despejar una en términos de la otra, la realización de pruebas con pares específicos de números enteros positivos para verificar si son solución de la ecuación, uso de la noción de función como recurso para reinterpretar el problema.

Estamos conscientes de que la formación académica previa de los(as) alumnos(as), el sistema educativo y la dinámica del seminario son factores que influyen en las soluciones realizadas por los alumnos, no obstante nos interesa rescatar, sin intentar soslayar la importancia de otros conceptos matemáticos presentes en las soluciones del problema, que éste, sin ser propuesto para tal fin, han permitido observar para el concepto de función un status de uso, que facilita a los(as) alumnos(as) desarrollar medios para construir conocimientos que guíen a una posible solución.

Consideraciones finales

La función matemática es un objeto cultural que ha sobrevivido al desarrollo del ámbito social, económico y tecnológico de la sociedad, esto se refleja en su estatus y presencia en el currículum actual de diferentes niveles escolares. Esta noción es considerada central en el Cálculo y se toma como base en el desarrollo de otros objetos matemáticos como son: límites, derivas e integrales (García, García y Tuyub, 2007). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, nuestro interés no se centra en el objeto matemático función como tal, sino que se pretende explicar las producciones que los alumnos realizan ante una situación específica, a la luz de categorías teóricas construidas del análisis de las observaciones, considerando los conocimientos, significados y usos que los alumnos asocian a la noción de función matemática. Reconocer el valor de estos significados y usos se convierte en un elemento clave para la construcción social del conocimiento matemático.

En el aula observada la función no se problematiza como un concepto matemático, no existe una centración en éste, sin embargo los alumnos recurren a la noción de función ya sea inducidos por la forma en que se plantea el problema o porque surge en ellos la necesidad de considerarla de manera implícita como un recurso que permita encontrar la solución. Esto permite destacar el *carácter funcional de la noción de función matemática*, en el sentido de que su uso permite construir conocimiento matemático en situaciones específicas.

Bibliografía

Aparicio, E. y García, E. (2007). Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago de Cálculo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 20, 210-215.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 16, 73-78.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

García, E., García, E. y Tuyub, I. (2007). Un estudio socioepistemológico del concepto de función. *Documento interno*. Manuscrito no publicado, Cinvestav - IPN, México, D.F., México.

García-Zatti, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia de educación a distancia*. Tesis de maestría no publicada, Cicata-IPN, México, D.F., México.