UN ACERCAMIENTO AL ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE LAS COORDENADAS POLARES

Cantoral Ricardo, Dolores Crisólogo, Vicario Maribel

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

mvicario_maribel@hotmail.com

Resumen. *El acercamiento al análisis epistemológico de las coordenadas polares, se desarrolla principalmente desde el punto de vista de los historiadores, con el cual buscamos contribuir a clarificar tanto el origen como la forma de construcción del saber coordenadas polares. En el proceso de investigación hemos identificado tres momentos por los cuales transitó dicho saber para llegar a establecerse en la matemática como tal, cada momento atienden a resolver diferentes problemáticas que se suscitaron en la época que corresponde cada uno, mismos que hemos denominado Surgimiento, Desarrollo y Formalización , respectivamente.*

Palabras Clave: Análisis epistemológico, saber sabio, coordenadas polares

Introducción

Numerosas investigaciones en la disciplina se han enfocado al estudio de las funciones. En Dolores *et al* (2000, 2002, 2003, 2004) se muestran investigaciones cognitivas referentes al comportamiento variacional de las funciones; Lezama (2003) estudia la función exponencial; Ferrari (2001) estudia la función logaritmo; Buendía (2004) se centra en el estudio del aspecto periódico de las funciones; Maldonado (2005) y Montiel (2005) inciden en las funciones trigonométricas. En dichas investigaciones, las funciones fueron estudiadas y analizadas en el sistema coordenado rectangular, esto se debe, a que principalmente es en este sistema en donde comúnmente se presentan y por consecuencia el más utilizado y conocido en el sistema escolar.

Sobre la base del trabajo de Youschkevitech (1976), Ruiz (1998) señala:

> Que el desarrollo de la teoría de funciones se basó fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal, y la expresión del concepto de número … Por otra parte a principios del siglo XVII, comienza a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto indicará notablemente la evolución de la noción de función. El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat y Descartes el descubrimiento del mundo de la representación analítica. Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresiones de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas.

De aquí concluye que:

> La importancia del método utilizado por Descartes y Fermat proviene del hecho de permitir traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. … el hecho de que las rectas, los círculos y las cónicas de un plano se pudieran definir por ecuaciones de la forma $P(x,y)=0$, donde P es un polinomio con coeficientes reales, de primer o segundo grado, condujo de modo natural a los matemáticos hacia el estudio de curvas con ecuaciones de este tipo, pero sin ninguna restricción en el grado. Así nació una nueva rama de las matemáticas, la geometría analítica.

Lo anterior enfatiza el establecimiento del sistema coordenado rectangular, el cual se logra por un nuevo punto de vista de la matemática por parte de Fermat y Descartes, en el que se realiza la combinación de álgebra con la geometría, y con ello se logra el estudio de las curvas que los griegos ya habían estudiado pero ahora con estas nuevas herramientas en las que el uso del sistema coordenado jugó un papel primordial.

Sin embargo, existen otros sistemas de coordenadas los cuales se incluyen en la curriclum matemático de la educación superior pero poco se sabe de su origen y desarrollo. Tal es el caso de las coordenadas polares. Ya desde la década de los sesenta Coolidge (1963) señalaba la escasez del uso de las coordenadas polares excepto para el estudio de las espirales, decía que estaba obligado a agregar que encontró un pequeño uso para las coordenadas polares en la geometría coordenada, excepto, para cuando las espirales son involucradas. Sin embargo a diferencia del sistema de coordenadas rectangulares, el de coordenadas polares es poco utilizado, y respecto de este sistema hemos encontrado algunas caracterizaciones:

- En el sistema de coordenadas polares la posición de un punto en el plano queda determinada por dos números que indican la **dirección** en que se encuentra el punto y la **distancia** hasta el mismo. Este procedimiento de indicación de un lugar es muy simple y se emplea frecuentemente. Por ejemplo para explicar el camino a una persona extraviada en el bosquejo se le dice: “desde el pino quemado (el polo) doble hacia el este (la dirección), recorra unos dos kilómetros (la distancia) y encontrará una caseta (el punto)”

  Quien se ocupe de asuntos turísticos fácilmente comprenderá que la marcha por el azimut está basada en el mismo principio de las coordenadas polares. Gelfand, *et al.* (1981), pág. 43.
- Las coordenadas polares ofrecen una manera **alternativa** de localizar puntos en un plano. Ellas son muy útiles, porque para ciertas regiones y curvas proporcionan descripciones y ecuaciones muy simples, Steward (1999), pág.
- Para ciertas curvas y tipos de lugares geométricos el uso de coordenadas polares presenta algunas ventajas sobre las coordenadas rectangulares, Lehmann (1999), pág. 327.
- Los **artilleros** a veces localizan un blanco, sabiendo a qué **distancia** está y en qué **dirección** con respecto a una dirección arbitrariamente fijada mediante un punto de referencia. Esto es lo que se llama sistema de coordenadas polares en el plano. Begle, *et al* (1976), pág. 2.
- Las coordenadas polares son usadas a menudo en la **navegación**, como el **destino o dirección** del viaje puede ser determinado como un ángulo y una **distancia** del objeto considerado. Por ejemplo, el avión usa la versión un poco modificada de las coordenadas polares de la navegación. En este sistema, el único generalmente usado para cualquier tipo de navegación, el rayo de $0°$ es generalmente llamado encabezamiento 360, y los ángulos continúan la dirección en el sentido de las agujas del reloj, por supuesto que en el sentido opuesto a las agujas del reloj, como en el sistema matemático. El encabezamiento 360 corresponde a norte magnético, mientras que el encabezamiento 90, 180, y 270 corresponde al este, sur y oeste, respectivamente. Por lo tanto, un avión viajando a 5 millas náuticas exactamente al este estaría viajando a 5 unidades en el encabezamiento de 90 (lee nueve-cero por la torre de control). Wikipedia (2007), pág. 293.

Estas caracterizaciones enfatizan, algunas su uso en la navegación, en la artillería y en la ubicación de personas, de partículas o cosas. Todas ellas las consideran como determinadas por dos de sus componentes principales: una dirección en donde se involucra el ángulo y una distancia; esto en términos matemáticos se traduce como, un punto en coordenadas polares queda determinado por una distancia y un ángulo. Esto es lo que se dice de la naturaleza de las coordenadas polares, sin embargo hemos constatado que en el contexto escolar, en particular en los textos y en el currículum, no se señala a quién o quiénes se le debe la representación de este sistema coordenado, las problemáticas que viene a resolver, ni mucho menos las condiciones de su surgimiento. Las coordenadas polares se ponen en los textos diciendo que son otra forma de representar puntos, que facilita el trazado de curvas que en el sistema de coordenadas rectangular se dificultan. Pero omiten su génesis y desarrollo, se ponen como un recurso que surge como de manera espontánea. Estas son las principales carencias que encontramos respecto de este saber y constituyen nuestro principal problema de investigación.

Metodología

La metodología que se respetó para el desarrollo del trabajo de investigación, fue la que nos permitiría realizar el análisis epistemológico de las coordenadas polares. Teniendo en cuenta que el análisis epistemológico permite al investigador tomar distancia y controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza en tanto que:

- Provee de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales tanto en tiempo como en espacio. Éstos se conciben, con su mediación, como susceptibles de evolución perdiendo esa categoría de verdades en sí mismos.
- Provee de historicidad a las nociones metamatemáticas y protomatemáticas, tales como el rigor, y con ello contribuye a mostrar que la concepción de un rigor eterno y perfecto de las matemáticas es sólo una ficción.
- Posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado y con ello contribuye a desterrar otra de las ficciones de la escuela, a saber, la concepción de que los

objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles de los objetos de ciencia (Farfán, 2007)

Además de permitir comprender qué es lo que gobierna la evolución del saber científico a su vez da la posibilidad a la didáctica desprenderse de la ilusión de transparencia de los objetos que manipula en el nivel del saber y en consecuencia y tomar conciencia de la distancia que separa, por lo que la investigación epistemológica destaca la necesidad de indagar los mecanismos que permiten, y a veces impiden, que el conocimiento matemático llegue a ser enseñado en el aula.

Sobre la base de estas premisas el análisis epistemológico, en este trabajo se orienta fundamentalmente hacia la búsqueda de elementos que expliquen y fundamenten cómo es que las coordenadas polares surgieron, cómo se desarrollaron y cómo se formalizaron en el campo de la matemática. Por tanto nos enfocamos a la realización de las siguientes acciones:

- Revisión y análisis de los libros tanto de historia de las matemáticas como los de historia de la geometría analítica, enfocando la atención en la identificación del **objeto de saber** coordenadas polares.
- Revisión y análisis de los artículos que se refieren al **objeto de saber** coordenadas polares.
- Revisión y análisis de las obras originales en la que se encuentra el **objeto de saber** como **saber sabio** coordenadas polares.

Resultados

Para el análisis epistemológico, como se marcó en la metodología, nos apoyamos en los trabajos de corte histórico de Boyer (1949), (1956), (1999); Coolidge (1952), (1963); Cajori(1952); Eves (1953); Kline (1972); Collette (2002), (2003), Struik(1998) y otros, referidos al saber coordenadas polares, en los cuales identificamos quien o quiénes pudieron haber participado en la concepción, construcción y uso de las coordenadas polares, esto asociado con las problemáticas de la época.

Es así como el desarrollo epistemológico de las coordenadas polares, se centrar en mostrar el proceso de construcción del saber, auxiliados del punto de vista de los historiadores. Con lo cual hemos identificado tres diferentes momentos por los cuales transitó el objeto de saber coordenadas polares hasta su establecimiento como un objeto a enseñar en el sistema escolar.

El *surgimiento* en la Época Griega, el *desarrollo: la algebrización* entorno al siglo XVII y la *formalización* en el siglo XVIII. Aunque opinión de Boyer (1949, 1956), sugiere que el origen de las coordenadas polares pudiera considerarse desde la geometría pre-Helenica, básicamente con el estudio del círculo, el cual conduce a la ecuación $r = k$ en coordenadas polares, sin embargo afirma que tal aseveración sólo podría logarse si se ahondara más en el estudio de la misma.

Surgimiento

El momento del *surgimiento* sucede en la época griega, en la que los griegos tenían el máximo esplendor en el desarrollo de la geometría, a tal punto de lograr la clasificación de las curvas en tres grupos: el primero al cual denominaron **Plano loci** (curvas llamadas perfectas, entre las que figuraban la línea y el círculo) el segundo como **Sólido loci (**curvas llamadas cónicas con Menaechmian) y por último el **Lineal loci (**curvas algebraicas o trascendentales).

En este último grupo las curvas de mayor importancia fueron la cuadratriz de Hippias y la espiral de Arquímedes caracterizadas como trascendentales (Boyer 1956), ambas contribuían a resolver el problema de la cuadratura del círculo y trisección del ángulo, sin embargo como lo señala Struik (1998) para todas las construcciones geométricas los problemas de la época debían resolverse utilizando sólo regla y compás, establecimiento que la espiral de Arquímedes rompía.

Esto debido a que la espiral de Arquímedes estaba definida como una curva compuesta por dos movimientos uniformes y simultáneos, uno lineal y el otro angular. Con ello Boyer (1956) señala que Arquímedes es el griego que contribuyó anticipadamente con la geometría analítica, primero con su trabajo de *cónicas* con el que se acercó a la aplicación moderna de las coordenadas rectangulares, y un segundo, *sobre espirales* en donde introdujo la espiral de Arquímedes y con ella hizo uso de las coordenadas polares, por tanto Arquímedes es el principal personaje de la época griega que contribuye con la concepción de las coordenadas polares.

Boyer (1956) señala que a pesar de que la matemática griega solía verse caracterizada esencialmente por la estática y la escasa o nula atención a la idea de variabilidad, con la espiral, Arquímedes parece haber determinado ***la tangente a la curva*** por medio de consideraciones cinemáticas, y consideró el punto genérico de la espiral como sometido a dos movimientos simultáneos, un movimiento radial uniforme de alejamiento del origen de las coordenadas y un movimiento circular de centro el origen, en el planteamiento parece haber hallado la dirección instantánea del movimiento, y por lo tanto la ***dirección de la tangente a la curva***, observando el movimiento resultante de los dos componentes por medio del paralelogramo de las velocidades, con este procedimiento parece ser la primera vez que determinó la tangente a una curva que no fuera una circunferencia (Boyer 1999).

Para Edwars (1973), la espiral de Arquímedes expresada en términos de las coordenadas polares, se define como:

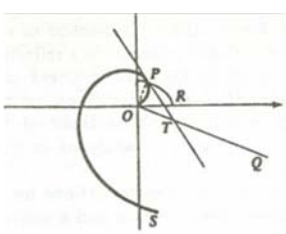

Figura 1

Sea ω (en radianes) una constante angular con una velocidad de rotación de la línea, y v la velocidad constante con la cual el punto se mueve a lo largo de la línea, empezando en el origen. Entonces las coordenadas polares del punto en movimiento en el tiempo t son $r = vt$ y $\theta = \omega t$, así la ecuación en coordenadas polares de la espiral es $r = a\theta$, donde $a = v/\omega$.

Aunque ninguna consideración dinámica aparece en el tratado *Sobre espirales*, se ha conjeturado que el descubrimiento de Arquímedes de la ***línea tangente a la espiral*** se realiza por medio de un paralelogramo de velocidades determinadas por dos movimientos componentes que generan la espiral.

Planteada la solución del problema de la cuadratura del círculo, en términos de la espiral de Arquímedes, Boyer la plantea en los siguientes términos.

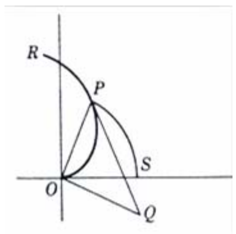

Figura 2

Trácese por un punto P de la espiral OPR la tangente PQ, y sea Q el punto de intersección de esta tangente con la recta OQ perpendicular al radio vector OP por el origen O. Arquímedes demuestra que el segmento OQ (conocido como la subtangente polar del punto P) es igual a la **longitud de arco PS** *de la circunferencia de centro O y radio OP interceptado por la semirecta inicial (eje polar) y la semirecta OP del radio vector.*

Si se toma al punto P como el punto de intersección de la espiral con la recta perpendicular al eje polar, entonces la subtangente polar OQ será precisamente igual a la cuarta parte de la circunferencia de radio OP, y por lo tanto se construye fácilmente la circunferencia completa como cuatro veces el segmento OQ, es así que por el teorema de Arquímedes se obtiene el triángulo de área igual a la del círculo y con una transformación geométrica se construye un cuadrado equivalente al área del triángulo, y con este procedimiento se logra construir la cuadratura del círculo.

Otro problema presente en la época, al que da solución Arquímedes a través de la espiral, es la trisección del ángulo, con el Boyer (1999) señala el siguiente procedimiento:

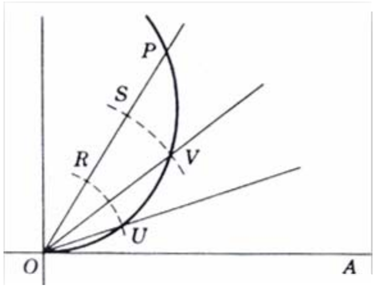

Figura 3

Situemos el ángulo de tal forma que el vértice y el lado inicial coincidan con el origen O de la espiral y la posición inicial OA de la semirecta que gira. Sea P el punto de intersección del segundo lado del ángulo con la espiral, y dividamos el segmento OP en tres partes iguales por medio de los puntos R y S (figura 3) Sean RU y SV las circunferencias de centro O y radios OR y OS respectivamente. Si estas circunferencias cortan a la espiral en los puntos U y V, entonces las semirectas OU y OV trisecan al ángulo AOP

En este planteamiento de la solución de la trisección del ángulo, a pesar de que Boyer no señale la relación con las coordenadas polares, identificamos como en este procedimiento, se encuentra relacionado la idea del sistema coordenado polar, es decir por los puntos P, S y R se trazan circunferencias con centro en O, sí esto lo llevamos al actual sistema coordenado polar, pudiera estar relacionado con las circunferencias concéntricas de las que está formado el sistema.

Desarrollo: la algebrización

Identificamos el segundo momento entorno al siglo XVII, antes, durante y después de él.

De acuerdo con la opinión de los historiadores en esta época se retoman tanto las ideas cómo los trabajos de los matemáticos griegos. Begle et al (1967) al respecto señala qué, hasta el siglo XVII la geometría se estudiaba mediante el método sintético, debido a que los postulados trataban con nociones geométricas tales como puntos, rectas y ángulos y además que se hacía muy poco o ningún uso de los números, ejemplifica señalando que en la matemática euclidiana los segmentos rectilíneos no tenían longitudes.

Desde el punto de vista de Boyer (1949, 1956 y 1999), Coolidge (1952 y 1963), Cajori (1952 y 1963), Collete (2002 y 2003), los trabajos o problemas que fueron presentados alrededor del siglo XVII que, de alguna manera estuvieron relacionados con la concepción, desarrollo y evolución de las coordenadas polares fueron: la comparación de curvas, rectificación de curvas, trazado de tangentes, radio de curvatura, los cuales fueron desarrollados y estudiados por diversos matemáticos de la época.

En la concepción de las coordenadas polares, identificamos las diversas opiniones respecto a quien atribuirle el meritó de ser el inventor o creador de las coordenadas polares, entre los principales personajes encontramos a Isaac Newton, Jacob Bernoulli, Jean Bernoulli, Gregorio Fontana, Pierre de Varignon.

Para Boyer (1956) *Leone Battista Alberti (1404 – 1472)* en sus trabajos de teoría perspectiva presenta una idea anticipada de las coordenadas con el uso círculos concéntricos y radiación de líneas en problemas referentes a deformaciones.

Coolidge (1952) cita que al parecer Newton es el primer escritor que **visualizó las coordenadas polares como un medio de localización de cualquier punto en el plano**, pero al parecer no llegó lejos en su desarrollo, Boyer (1949) señala que al parecer es él, el originador de las coordenadas polares en el sentido que representó a x y y como las **distancias de un punto variable de dos puntos** (o polos) fijos, escribiendo la relación para los óvalos de Descartes como $a + ex/d - y = 0$, encontrando el **radio de las fluxiones**, y de ahí la línea tangente, posteriormente indicó que $a - ex/d - y = 0$, un sentido contrario es indicado en la construcción, en el que noto que si $d = e$, la curva empieza una sección cónica, concluye que sería fácil dar mas ejemplos, con la generalización de las idea coordenadas Newton se titula como el más grade de la historia de la geometría analítica.

En segundo lugar citamos a ***Jacob Bernoulli (1654-1705)***, quien para Boyer (1949), Cajori (1952), Eves (1953), Coolidge (1963) y Struik (1998), es al que se le debe señalar como el principal descubridor de las coordenadas polares al hacer uso de ellas, con su primera publicación que aparece en 1691 en el *Acta Eruditorum* y la segunda en 1694 en la misma.

En la primera publicación, Boyer (1949) identifica que Jacob Bernoulli plantea **medir las abscisas por el arco de círculo fijo y las ordenadas radialmente por las normales**, posteriormente en Boyer (1956) se amplia la explicación y se señala que Bernoulli se refirió a la ecuación de la parábola $yy = lx$, cuestionándose que tipo de curva podía generar **si las abscisas se midieran a lo largo de la circunferencia de un círculo fijo y las ordenadas se tomaran a lo largo de la correspondencia normal del círculo**, lo que generó como resultando de dicho movimiento, fue la curva obtenida doblando la abscisa de la parábola alrededor del círculo, misma que llamó espiral parabólica o parábola helicoidal, qué en notación moderna de las coordenadas polares se escribe $(a-r)^2 = la\theta$, donde a es el radio del círculo. Para Boyer (1949 y 1956), en la publicación de 1694, Bernoulli presenta un sistema con características idénticas en concepción y notación al trabajo de Newton, en el cual utilizó las coordenadas y y x, designando a y **como la longitud del radio vector**[6] del punto, y, x **como el arco interrumpido por los lados del ángulo vectorial sobre un círculo de radio** a tomando al polo como centro, en notación moderna simplemente se reemplaza el símbolo y por r y x por $a\theta$, representando un punto en coordenadas es $(r, a\theta)$, diferente a su notación anterior donde había utilizado un sistema equivalente a $(a-r, a\theta)$ (Boyer 1949, 1956).

Con la misma idea y características diferentes se suma la opinión de Coolidge (1952, 1963) mencionando que, es Jacob Bernoulli, quien **<u>hace pasar</u> a las coordenadas polares como un medio de localización de cualquier punto en el plano**.

Coolidge (1952) refiere a la publicación de 1961, donde Bernoulli se interesó en mostrar la aplicación del cálculo de diferencias de Leibniz para curvas como la parábola, excepto que las ordenadas saltan de un círculo y no de una línea recta, hizo uso de x y y para sus nuevas

[6] Referían al radio vector en el sentido de una coordenada, anticipando el uso de coordenada polar (Boyer 1956)

coordenadas, las cuales se escriben $y = a - r$, $x = a\phi$, $y^2 = lx$ es así como Coolidge concluye que el radio vector no hace saltos de un punto fijo sino de un círculo fijo,

Posteriormente Coolidge (1953) identifica que a Jacob, se le ocurrió la idea de preguntarse, qué tipo de curva obtendría al arreglar la curva de la parábola alrededor del eje de la circunferencia de un círculo. La curva generada la llamó parábola helicoidal, la cual tiene por ecuación $(a - r)^2 = 2ma\theta$. En dicho planteamiento hizo uso de las letras x y y, donde la primera indicaba la ***distancia a lo largo de la circunferencia*** del círculo, y la segunda ***una distancia perpendicular***, por tanto su ecuación toma la forma familiar $y^2 = 2mx$.

Por su parte Eves (1953) menciona que la idea de coordenadas polares al parecer fue introducida en 1691 por Jacob Bernoulli, mismo que define como un sistema de coordenadas útil para el estudio de las espirales, teniendo como **imagen de referencia un rayo infinito** y un **punto que es localizado por un par de números reales**, que representan el **primero una distancia** y el **otro un ángulo**, agrega que el sistema sólo fue investigado cuando los geómetras llegaron a desprenderse del sistema cartesiano, en situaciones donde la necesidad peculiar de un problema indicaba algún otro aparato algebraico más apropiado, y además que las coordenadas fueron hechas para la geometría y no la geometría para las coordenadas.

En opinión de (Cajori 1952) las coordenadas polares, fueron introducidas de una manera general por Jacques Bernoulli y Pierre de Varignon, pero el primero es quien usualmente reconocido como su descubridor, quien **ve en ellas un medio de localizar cualquier punto en el plano**.

Struik (1998) señala que Jacob Bernoulli realizó el uso de las coordenadas polares en el estudio de la catenaria, la lemniscata (1694) y la espiral logarítmica, esta última tiene la característica de reproducirse ella misma bajo transformaciones, es decir su evoluta es una espiral logarítmica.

Para Sánchez y Valdés (2001), Jacob introdujo la espiral parabólica, y para su estudio presento de forma embrionaria la idea de lo que hoy se conoce como coordenadas polares, al respecto citan una interpretación en términos actuales.

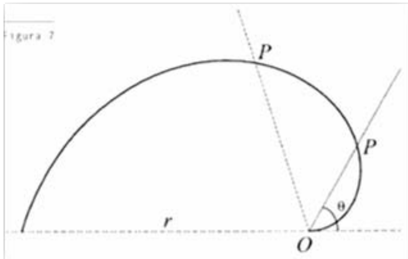

Figura 4

Para situar un punto P en el plano de mediante coordenadas polares, se dan su distancia OP a un punto fijo O, denominado polo, y el ángulo que la recta OP forma con una recta fija r, denominada directriz.

Jacob define a las espirales parabólicas mediante la relación cuadrática. En notación actual $(\rho - a)^2 = 2ap\theta$, donde a y p son constantes.

La medida en que varia la relación entre las constantes donde a y p.

Otro de los personajes, quien para Boyer (1949) le es atribuido la invención de las coordenadas polares, es ***Gregorio Fontana (1735-1803)*** 1978, mientras que para Kline (1972) señala que la idea de coordenadas polares al parecer se le debe a Gregorio Fontana, nombre que fue usado por varios escritores Italianos en el siglo XVIII, a esta misma opinión se le suma una encontrada en Wikipedia-online-

En último lugar se menciona a ***Pierre de Varignon (1954-1722***), como aquel personaje que introdujo las coordenadas polares, en una publicación denominada.

Cajori (1952) menciona que las coordenadas polares fueron introducidas por ***Pierre***, quien interpreta la ordenada como el radio vector y la abscisa como el arco orientado correspondiente al ángulo polar, llegando a designar a $x = \rho$ y $y = l\omega$.

Mientras que Boyer (1949 y 1956) le atribuye a su memoria como la tercera publicación referida a coordenadas polares.

A pesar de que a *Jean Bernoulli (1667-1748)* no se le atribuya el mérito de ser inventor de las coordenadas polares, hizo uso de ellas y sugirió un esquema en el plano de coordenadas usando ***el radio vector*** y la ***ordenada***, logrando un interesante arreglo entre el sistema rectangular y polar, en 1692 hizo uso de la palabra "*cartesiano*" para referirse a la geometría basada en un sistema de coordenadas, interpreto esto como la determinación de la ecuación de cualquier curva dada por una propiedad asignada, a pesar de ello tales ideas fueron desarrolladas hasta en el siguiente siglo (Boyer 1956).

Formalización

La formalización de las coordenadas polares, desde el punto de vista de los historiadores sucede en el siglo XVIII en el que para Boyer (1956) la cinemática y el enfoque analítico eran rivales con el descubrimiento de nuevas curvas, una por el método nuevo y el otro por el antiguo, de transformación geométrica. Es en este siglo, que el exponente principal de las coordenadas polares es *Leonard Euler (1707 – 1783)*, en 1748 parece haber sido el primero en combinar los puntos de vista de Newton y Hermann, en su trabajo *Introductio in analysin infinitorum* dedicó aproximadamente dos capítulos a coordenadas polares, uno relacionando con curvas algebraicas y el otro con las espirales.

En su obra aparecen por primera vez las ecuaciones de la transformación de coordenadas cartesianas rectangulares a polares, exactamente en su forma trigonométrica moderna, además que hacia uso del ángulo vectorial de manera general, es decir tanto para los valores positivos como negativos del radio vector, de manera que la espiral de Arquímedes, por ejemplo aparecía en su forma dual, simétrica con respecto a la recta perpendicular al eje polar por el polo (Boyer 1956).

Para caso de curvas algebraicas, proporcionó las ecuaciones de transformación $x = z\cos\phi$, $y = z\,sen\,\phi$ introduciendo el simbolismo trigonométrico moderno dentro de las coordenadas polares, además de las consideraciones generales para z como una función de $sen\,\phi$ y $\cos\phi$, y el estudio a detalle de las limaçons $z = b\cos\phi \pm c$ y las concoides $z = b/\cos\phi \pm c$ en el tratamiento de curvas trascendentales Boyer (1949).

La notación es diferente para la variable dependiente en coordenadas polares, en el estudio curvas de la forma $z = f(s)$, donde el argumento s es el arco de una unidad del círculo el cual está medido el ángulo ϕ pareciendo, aparentemente, que las coordenadas deben de denotar la necesidad de longitud.

En relación con las curvas de espiral las cuales dibujó, Euler usó los ángulos en general, asignando a s el incremento indefinido positivo y negativo, sin embargo las coordenadas polares fueron de mayor importancia hasta 1857, cuando apareció un volumen entero dedicado a la geometría analítica de su sistema en el plano y en el espacio "*Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare koordinaten*" por Grunert, y en 1874 el sistema fue generalizado para incluir coordenadas polares elípticas y coordenadas polares hiperbólicas (Boyer 1949), Boyer se asombra de que ni Hermann ni Euler se refirieron a curvas $r = a\, sen\, n\phi$ y $r = a \cos n\phi$ las cuales ya habían sido descritas por Grandi en 1713 y que actualmente son tan importantes en el uso elemental de las coordenadas polares.

Otro matemático importante de la época al que no sólo se le debe la idea de coordenadas polares, sino que además en 1784 *Gregorio Fontana (1735-1803),* quizá fue quien proporciono el nombre de "ecuación polar" a una curva, y pudo haber sido el primero en estudiar analíticamente las curvas de la forma $r = f(\theta, sen\, \theta, \cos\theta)$, esto como consecuencia de una impresión definitiva de sus ideas y el tratamiento inspirado por Euler (Boyer 1949).

Conclusiones

A manera de conclusión podemos decir que las coordenadas polares habían estado implícitas en trabajos como el de la espiral de Arquímedes, la comparación de curvas espirales y parábolas, realizados principalmente por Cavaliere, Torriceli, Gregory de San Vicente, Fermat, Roberval, Pascal y Sluze, pero es con Jacques y Jean Bernoulli, Newton, Jacob Herman, Pierre de Varigón donde se logra visualizar más claramente el uso de un radio vector y un ángulo en las curvas, para Boyer es Newton quien probablemente originó las coordenadas polares, pero definitivamente fue el trabajo de Euler el factor decisivo en la producción del sistema, un parte tradicional de la geometría analítica, ya que es en su obra la *Introduction* donde aparecen por primera vez las ecuaciones de la transformación de coordenadas cartesianas rectangulares a polares, exactamente en su forma trigonométrica moderna, además utilizaba el ángulo vectorial como general tanto para los valores positivos como negativos del radio vector, de manera que la espiral de Arquímedes, por ejemplo aparecía en su forma dual, simétrica con respecto a la recta perpendicular al eje polar por el polo. Finalmente podemos decir que en el siglo XVIII, fue una etapa de elaboración, perfección y concreción de aspectos heredados de periodos anteriores.

Este trabajo forma parte del proyecto Fomix-GUE-2001-C01-7626

Bibliografía

Begle, E., Fehr, H., García, M., y Kramer, M. (1967). *Geometría analítica*. México.

Boyer, C. (1949). *Newton as an originator of polar coordinates*. *The American Mathematical Monthly*, *56*(2), 73-78.

Boyer, C. (1956). *History of Analytic Geometry*. New York: Yeshiva University Press y Scripta Matematica.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio espistemológico)*. Tesis Doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Cajori, F. (1952). *A History of Mathematical Notation*, 2. 1a. edición. La Salle, Ill : The Open Court Pub. Co.

Collette J. (2003). *Historia de las matemáticas I*. México, D.F, México: Siglo Veintiuno Editores.

Collette P. (2002). *Historia de las matemáticas II*. México, D.F, México: Siglo Veintiuno Editores.

Coolidge J. (1952). The Origin of Polar Coordinates. *The American Mathematical Monthly*, *59*(2), 78-85.

Coolidge, J. (1963). *A history of Geometrical methods*. New York: Dover publications, Inc.

Dolores, C. (2003). El análisis de funciones y las concepciones alternativas que ese proceso se generan. En Delgado, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Vol. 16*, 40-45. México: Clame.

Dolores, C. y Catalán A. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal. Una experiencia didáctica. En Farfán, R., Matías, C., Sánchez, D. y Tavarez, A. (Eds.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *Vol. 13*, 36-41. México: Iberoamérica

Dolores, C. y Guerrero, L. (2004). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. En Díaz, L. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *Vol. 17*, 101-107. México: Clame.

Dolores, C. y Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. En Díaz, L. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Vol. 17,* 355-361. México: Clame.

Dolores, C., Guerrero, L. A., Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En Crespo, C. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Vol. 15,* 74-79. México: Clame

Edwards, Ch. (1937). *The historical development of calculus*. New York: Springer-Verlag.

Eves, H. (1953). *An introduction to the history of mathematics*. New York: University of Maine.

Farfán, R. (2007). Un estudio didáctico relativo a la noción de convergencia. En Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R., Carrillo, C., López, I., y Navarro, C. (Eds). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula* (pp. 91-121) Chilpancingo, Guerrero. México: Díaz de Santos.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Gelfand, I., Glagolieva, E., y Kirillov, A. (1981). *El método de coordenadas*. URSS: Mir. Pp.42

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Prees. Pp. 317-321.

Lehmann, Ch. (1999). *Geometría Analítica*. Mexico: Limusa.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: el caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Un estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado, CICATA-IPN, México, D.F, México.

Ruiz, L (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. España: Universidad de Jaén.

Sánchez, C., y Valdés, C. (2001). *Los Bernoulli. Geométras y viajeros*. España: Nivola

Stewart, J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos*. México: Thomson Editores.

Struik, D. (1998). *Historia concisa de las matemáticas*. México: IPN. (Versión original en Ingles publicada en 1948).

Wikipedia (2006). Biografía de Gregorio Fontana. Obtenido en noviembre 24, 2006, de http://en.wikipedia.org/wiki/Gregorio_Fontana

Wikipedia (2007). Polar Coordinate System. Obtenido Febrero 17, 2007, de http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinates