Integral definida y función integral. Exploración, formalismo e intuición en los futuros profesores de matemática

Liliana Nitti (*) ***y Mario Álvarez*** (**)
liliananitti@santafe-conicet.gov.ar
malvarez@frcon.utn.edu.ar
(*) *Facultad de Humanidades y Ciencias – Universidad Nacional del Litoral.* (**) *Instituto Profesorado Concordia D – 54 – Dpto. Matemática*

Resumen

Se presenta una propuesta de enseñanza para la integral definida y la función integral orientada para alumnos de profesorados de matemática. La misma está motivada principalmente en que muchos autores formulan integrales a partir del concepto de función primitiva mientras que otros lo hacen independientemente de ella. El trabajo se desarrolla dando prioridad a la línea histórica, es decir, concebir una propuesta de enseñanza en la cual en una primera etapa el concepto de integral se estudie independientemente del concepto de derivada.

Es de interés destacar que una motivación interesante para los estudiantes de profesorados es recorrer en su formación un camino análogo al que luego trabajarán en sus clases (en las bases de una enseñanza para la comprensión, con sólidos fundamentos matemáticos en íntima relación con la creación y el descubrimiento).

Se realiza una revisión de bibliografía e investigaciones vinculadas a estos posibles enfoques sobre el estudio del tema integrales. La propuesta se encuadra según la teoría de «Juego de marcos» de Regine Douady (1986) que, con relación al cálculo integral, se plasma en el análisis de los marcos que se pueden considerar y en la incidencia de la relación dialéctica de la matemática como «instrumento de conocimiento» y como «objeto de conocimiento». Se propone una secuencia temática con consideraciones particulares acerca de los problemas sugeridos para la fase de exploración de la función integral y de posibles construcciones dinámicas con el software GeoGebra.

Palabras clave: educación, cálculo, integrales, primitiva, GeoGebra.

Abstract

A teaching proposal is presented for Definite Integral and Integral Function, aimed to courses preparing mathematics teachers. This work is mainly motivated in the facts that many the authors develop the integral concept based on the primitive function, while others do independently of this. The work is developed, giving priority to the history of mathematics, designing a proposal for teaching in which a first stage the integral concept is studied independently of the concept of derivative.

Is interesting to note that an important motivation for the future teachers of mathematics is to recognize in their formation a travel in a way similar that will work then in their classes (on the basis of teaching for understanding, with solid mathematical foundations closely related to the creation and discovery).

A review of literature and research related to these possible approaches to the study of the subject integrals. The proposal is based under the theory of «Game Frame» by Regine Douady (1986), in relation to integral calculus is reflected in the analysis of frames that can be considered and the incidence of the dialectical relationship of mathematics as «instrument of knowledge» and «object of knowledge.» It is also proposed a thematic sequence with particular considerations of the problems suggested for the exploration phase of the integral and dynamic constructions possible with software GeoGebra.

Keywords: *education, calculus, integration, GeoGebra.*

1. Introducción

Esta propuesta de enseñanza tiene como base el trabajo de la tesina presentada en la Universidad de Concepción del Uruguay (Sede Regional Río Paraná) para la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática(1) (Álvarez, 2009).

El tema de estudio se motiva en las siguientes preguntas de investigación: ¿en qué se justifican los autores que desarrollan el cálculo de integrales a partir del concepto de «primitiva» respecto de quienes desarrollan integrales independientemente del cálculo de derivadas (incluso antes que derivadas)? ¿Cómo se sucedieron históricamente estos conceptos? ¿Qué elementos se pueden considerar en el diseño de una propuesta de enseñanza para la integral definida y la función integral que contemple el desarrollo histórico, el aprendizaje significativo del alumno y el uso de las nuevas tecnologías, pensando en estudiantes que serán docentes de matemática?

2. Contexto de la presente propuesta de enseñanza

El cálculo infinitesimal ha sido fundamental no sólo para la historia de la matemática, sino que también ha motivado nuevos campos de estudio y se lo ha podido aplicar en la solución de diversos problemas tanto en el campo de la matemática como en las más diversas disciplinas.

Sus dos ejes principales, el cálculo integral y el cálculo diferencial, se motivan por problemas concretos de fácil comprensión: la determinación de áreas de regiones acotadas y el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto. En cuanto al primer problema, matemáticos griegos como Arquímedes y Eudoxo (siglo III a. C.) dejaron su precedente; respecto del segundo, las primeras formalizaciones se dieron a partir del siglo XVII d. C. (Rey Pastor y Babini, 1997).

Estos dos campos, que originalmente se estudiaron y desarrollaron de manera independiente, fueron relacionados formalmente por Newton y Leibniz durante el siglo XVII, al demostrar que la integración y la derivación son, en cierto sentido, operaciones inversas.

Este formidable resultado se conoce como el «Teorema Fundamental del Cálculo», en su primera y segunda forma (Spivak, 1996).A partir de esto, se simplifica considerablemente el cálculo de integrales (para ciertas funciones) y se potencian aplicaciones a diferentes campos de la ciencia. O sea que la integración y la derivación son esencialmente diferentes, pero convergen en un mismo resultado, potenciándose a sí mismas.

Esto induce a preguntarse si debe enseñarse primero derivadas, para formular el concepto de primitiva y a partir de ello integrales indefinidas ó comenzar con integrales definidas sin recurrir a las funciones primitivas (es decir, estudiar integrales independientemente del concepto de derivada). También se genera la inquietud de analizar si existen diferencias significativas entre estos posibles enfoques. Pero ¿es incorrecta alguna de estas formas de estudio? En un principio, son posturas diferentes (sólo eso) y las dos están plenamente justificadas. Ahora, ¿en qué nos basaríamos para la elección de uno u otro enfoque? Aquellos estudiantes que incorporen primero derivadas con todo su peso formal y práctico, y luego desarrollen integrales mediante el concepto de primitiva, inmediatamente podrán estudiar métodos de integración y en corto plazo resolver problemas de aplicación como rectificación de curvas, volúmenes de cuerpos, aplicaciones físicas, económicas, etc. Pues, a partir de la primitiva de una función y la utilización del Teorema Fundamental, serán capaces de integrar una función cuya gráfica sea, por ejemplo, un arco de parábola, sin analizar demasiado el proceso que le ha costado a la matemática como ciencia obtener dicho resultado.

Este enfoque está más orientado a la aplicación inmediata de modelos matemáticos. Cuestión que en el caso de las ingenierías u otras carreras afines es pertinente para sus modelos y/o simulaciones.

Las derivadas y las integrales son herramientas operativas (más aún trabajando con las computadoras y software específicos de hoy día).

Por otro lado, quienes estudien integrales independientemente del concepto de derivadas, deben trabajar de forma más «artesanal». Se requiere comprender la propiedad de completitud de los números reales, el concepto de continuidad, sucesiones, sumatorias, inducción completa, entre otros, para poder reconocer la integrabilidad de algunas funciones. Exige una mayor claridad conceptual y relacional, pues los conceptos y teoremas *se construyen fuertemente* desde el abanico de sus *conocimientos previos*, y más aún desde el concepto mismo de área que trae el estudiante desde su inicio escolar. Conocer el concepto de integrabilidad de una función, y luego vincular éste al concepto de derivada, hará que estén preparados para encontrarse con el Teorema Fundamental, pero visto con más relevancia que en el enfoque anterior. El estudiante ya sabe integrar algunas funciones elementales y tiene claridad en su significado, ahora percibe que puede optimizar el cálculo para muchas otras integrales con el estudio de las funciones primitivas.

Bajo esta mirada, la integración como operación inversa de la derivación cobra otro sentido; el mismo está conectado a preguntas como por ejemplo: ¿cualquier función es la función derivada de otra? Este tipo de preguntas, no siempre fácil de responder en una primera etapa, prepara el terreno para el estudio de temáticas más avanzadas en el cálculo.

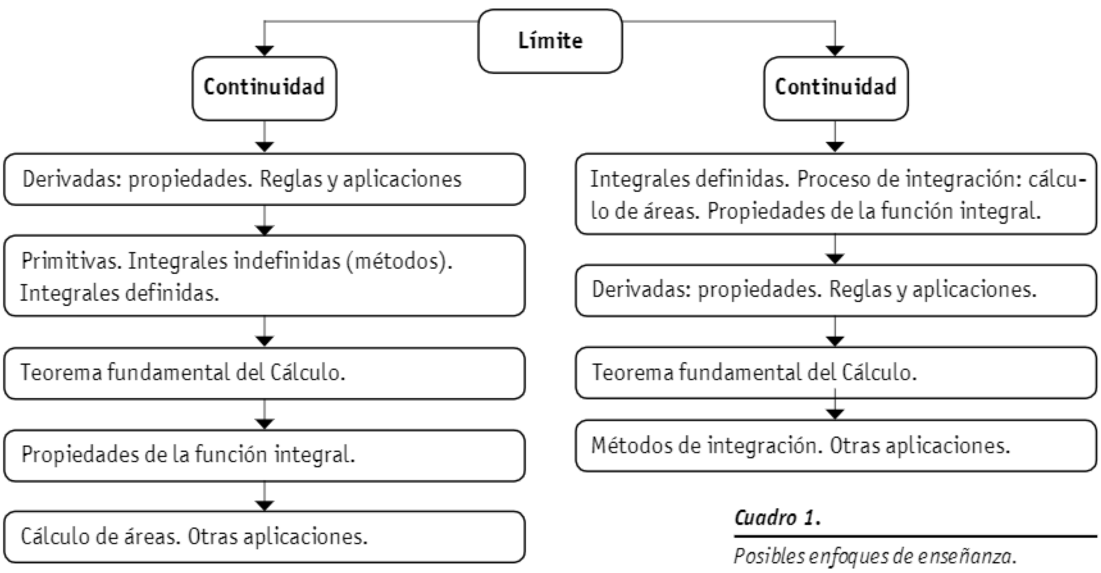
Por otra parte, como pudo ser comprobado en los resultados de Fuster y Gómez (1997), en las investigaciones de Orton (1980, citado en Azcárate *et al.*, 1996) y en el trabajo de campo que sustenta a esta propuesta, este camino permite que los alumnos tengan menos oportunidades de cometer el error de creer que la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se define como g(b) – g(a) siendo g una función primitiva de f. Cuestión claramente errónea ya que una función puede ser integrable en un intervalo cerrado y no poseer primitiva . Más aún, una función que posee función primitiva no necesariamente es Riemann – Integrable (ver ejemplos en Burrill–Knudsen, 1969).

Por todo lo expresado, el enfoque asociado a esta propuesta debería ser de interés en las carreras donde se forman docentes de matemática, pues se supone que logra un estudio más bien formativo en las competencias matemáticas y acorde al desarrollo histórico de los conceptos de integral y derivada.

En el Cuadro 1 se esquematizan (en rasgos generales) estos dos posibles enfoques de estudio:



Cuadro 1.

Posibles enfoques de enseñanza.

3. Antecedentes

3.1. Antecedentes bibliográficos en la enseñanza del cálculo integral

En cuanto a la bibliografía de estudio, la primera referencia que se hace es para M. Spivak en su obra *Cálculo Infinitesimal* (1996). Este autor comienza con la revisión formal del concepto de área. A partir de allí, desarrolla las integrales de Riemann con sus propiedades y restricciones sin acudir en ningún momento al concepto de derivada (más allá de que la presentó en capítulos anteriores). Cabe destacar que éste ha sido el libro considerado como base para el desarrollo teórico de integrales y el Teorema Fundamental del Cálculo de esta propuesta de enseñanza.

La segunda referencia es para Richard Courant y Fritz John en su obra *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático* (1999). En la misma, los autores presentan primero integrales y luego derivadas. Motivan la presentación de las integrales a partir del concepto de área de una región encerrada por la gráfica de una función acotada. Le brindan importancia explícita a la necesidad de trabajar los contenidos del cálculo a partir de la intuición y de los problemas que le dieron origen. Luego del capítulo del Teorema Fundamental del Cálculo, se presentan las técnicas de derivación e integración.

Por último, se hace referencia a Miguel de Guzmán y José Cólera (1998) en *Matemáticas para la COU*, aclarando que este libro, a diferencia de los anteriores, no está pensado para estudios superiores. Se formalizan las integrales a partir de las primitivas. En interés a este trabajo, se destaca una importante referencia al desarrollo histórico del Cálculo Integral y se presentan posibles aplicaciones (trabajo físico que realiza una fuerza, el espacio que recorre un móvil, el gasto de energía, el caudal de agua de un río, etc.) que permiten resignificar el concepto de integral y el cálculo de área. De esta forma, desarrollan la integral como modelo matemático para describir, analizar, comprender y estimar fenómenos concretos y cotidianos de absoluta importancia para otras ciencias.

3.2. Antecedentes de investigaciones en la enseñanza del cálculo integral

Numerosos investigadores han realizado trabajos vinculados a estos posibles enfoques. Se puede citar a Fuster y Gómez (1997), de la Universidad Politécnica de Valencia en España, quienes luego de realizar un estudio vinculado a la significación conceptual y procedimental del cálculo de integrales en estudiantes de escuelas medias de España (donde se desarrolla el estudio de integrales a partir del concepto de primitivas) proponen alterar el orden habitual de exposición. Sugieren explicitar las imágenes de los conceptos como primer acercamiento de estudio. Concluyen los autores que la construcción de las sumas por defecto y por exceso sería el primer aspecto a tratar, utilizando de ser posible algún software para diseñar una construcción dinámica (interactiva) o una simulación.

Por otro lado, Azcárate, Casadevall, Casellas y Bosch (1996) citan las investigaciones realizadas por Orton (1980) acerca de las concepciones del concepto de integral. En ellas se observa un nivel relativamente bueno en la manipulación de los algoritmos algebraicos que aparecen en los cálculos de primitivas de funciones, pero con dificultades importantes en todo lo que es conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de integral. Y tomando las palabras de Orton (1980) sobre que «muchos estudiantes demuestran saber lo que tienen que hacer, pero cuando se les pregunta acerca de su método no saben realmente por qué lo hacen de esta manera» (Orton, 1980 citado en Azcárate *et al*. 1996:15), proponen considerar que el aprendizaje del concepto de integral definida sea independiente de los conceptos relacionados con las derivadas y que pueda, incluso, darse antes. Esgrimen como razón de peso evitar que los alumnos consideren en primer lugar a la integración como la «operación inversa» a la derivación. Y para que, de esta forma, se pueda estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo como una relación inesperada y útil entre las operaciones de derivación e integración (aparentemente independientes).

4. Encuadre teórico de la propuesta

Douady (1986) distingue en el conocimiento matemático dos aspectos en particular: uno vinculado directamente a la resolución de problemas y otro asociado al conocimiento en sí. O sea que atribuye a los conceptos matemáticos un carácter no unitario, identificando dos polos o dimensiones principales en los mismos: el aspecto *objeto* (cultural, impersonal e intemporal), plasmado en definiciones y propiedades; y el aspecto *instrumento*, que permite la aplicación en una determinada tarea.

El aspecto objeto aparece en juego en las fases de institucionalización, normalmente hechas por el docente, pero también es el resultado de los procesos de fundamentación y validación de los conocimientos entendidos como entidades culturales. Por su parte, el aspecto instrumento se pone en juego en las fases de exploración y consolidación en la resolución de problemas y está del lado del estudiante (o del investigador matemático que resuelve un problema).

Douady afirma que la dialéctica instrumento–objeto no puede ser explicada totalmente sin hacer referencia a la noción de *marco*. El uso de un marco u otro afecta a los procedimientos de solución, su eficacia relativa e incluso al planteamiento de nuevos problemas. En el aprendizaje de una noción matemática o en la resolución de un problema, el hecho de cambiar de marco permite desbloquear los procesos de comprensión y, en muchos casos, generalizar una noción, un procedimiento o un significado matemático. La palabra «marco» se toma en el sentido usual, al hablar de «marco algebraico», «marco geométrico», etc., pero también aparece utilizada como «marco cualitativo» o «marco algorítmico».

Con este encuadre teórico, la presente propuesta de enseñanza para integrales busca promover una dinámica e interacción permanente entre los marcos gráfico, algebraico, analítico y numérico, tanto en problemas de exploración o aplicación, como también en aspectos deductivos e inductivos.

5. Secuencia temática para la enseñanza de la integral definida y la función integral

La propuesta de enseñanza se orienta hacia el estudio de integrales independientemente (en una primera etapa) del estudio de derivadas. Se pretende una secuencia temática en donde prevalezca la claridad conceptual y relacional tanto como la intuición y la visualización, desde la utilización de conceptos, propiedades y procedimientos ya conocidos.

A continuación, se explicitan los tópicos a partir de los cuales se construye la secuencia:

- El desarrollo histórico del cálculo: este tópico tiene el fin de intentar plasmar la correlación del desarrollo matemático histórico con el enfoque de estudio elegido, aportar una mirada «humana» a la Matemática, estimular una actitud crítica en el alumno y promover la valoración del conocimiento y del pensamiento matemático.
- El aprendizaje significativo en los futuros profesores de Matemática: el objetivo es fomentar la capacidad de aplicar los contenidos en otras ciencias y en la resolución de diversos problemas, cuestión que redundará en las estrategias que utilizará a la hora de enseñar matemática.
- La revalorización del Teorema Fundamental del Cálculo, en su primera y segunda forma (Spivak, 1996) y en su carácter unificador de los conceptos del Cálculo diferencial e integral.
- El uso del software libre GeoGebra como material didáctico: este software por su versatilidad permite explotar significativamente la interacción de los distintos marcos: geométrico, numérico y analítico, siguiendo la teoría de Douady (1986).

Estos tópicos son relevantes para una formación que ayude a los futuros profesores en sus estrategias de estudio y razonamiento, en la manipulación de distintas representaciones y al discernimiento en el diseño de sus futuras clases.

5.1. Secuencia temática

1) Referencia histórica a los trabajos de Arquímedes (siglo III a. C.), ya que se lo considera como uno de los primeros referentes del concepto de integral (Rey Pastor y Babini, 1997).

2) Problemas de exploración vinculados al cálculo de integrales definidas. Significación del cálculo de áreas en distintos contextos (aspecto «instrumento» de la integral definida). Aproximación por sumas por exceso y por defecto (marcos geométrico, numérico y algebraico).

3) Primera construcción con GeoGebra. Aproximación del área de una región mediante las sumas superiores e inferiores (uso de los marcos geométrico y numérico). Visualización de la convergencia de las mismas para funciones continuas o discontinuas en un conjunto numerable de puntos.

4) Formalización del concepto de integral según Riemann a partir del problema del cálculo de área de una región bajo la gráfica de una función acotada utilizando los ínfimos y supremos en la partición de un [a,b] de su dominio (aspecto «objeto» de la integral definida).

5) Segunda construcción con GeoGebra. Reconocimiento del significado de la integral definida cuando la función tiene intervalos de positividad y negatividad distintos de vacío (uso de marcos geométrico y numérico).

6) Integración de algunas funciones (como $f(x)=k$ siendo $k\in\Re$, con alguna discontinuidad finita de primera especie definida en un intervalo cerrado). Estudio del carácter no integrable según Riemann de la función de Dirichlet.

7) Referencia histórica a los trabajos de matemáticos precursores a Newton y Leibniz. Como por ejemplo Kepler (1571), Cavalieri (1598), Fermat (1601), Barrow (1630), entre otros. Estos trabajos han sido importantes avances para el desarrollo del Cálculo Integral. Por mencionar alguno, Isaac Barrow, geométricamente, conocía la relación entre el problema del cálculo del área y el problema de la recta tangente (Rey Pastor y Babini, 1997).

8) Criterio para determinar las funciones Riemann – Integrables. Integral definida de las funciones $f(x)=x$ y $f(x)=x^2$ en un intervalo [0,b] siendo b un número real mayor a cero (marco algebraico). Estudio de propiedades algebraicas de la integral definida (aspecto «objeto»).

Notemos que en esta instancia, ya puede el alumno intuir cómo calcular integrales de funciones polinómicas.

9) Tercera construcción con GeoGebra. Reconocimiento de funciones Riemann – Integrables: dado un valor positivo ε, se encuentra una partición adecuada tal que la diferencia entre la suma superior y la suma inferior es menor al número ε (uso de marcos geométrico, numérico y gráfico).

10) Actividad de exploración geométrica–analítica del proceso inverso de la integración: digresión al concepto de derivada. Estudio del límite del cociente incremental de la función integral cuando el incremento de la variable tiende a cero.

Se observa que esta actividad es de carácter crucial en la propuesta de enseñanza. Induce una diferencia sustancial respecto a las secuencias de estudio en la bibliografía de uso corriente y en particular a los posibles enfoques de estudio antes discutidos para la enseñanza de integrales.

11) Cuarta construcción con GeoGebra: verificación de la reciprocidad explorada para la función identidad (uso de marcos geométrico y numérico).

12) Referencia histórica a los trabajos de Newton y Leibniz. Por ser quienes, casi al mismo tiempo pero en diferentes formas de estudio, han sentado las bases formales del Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral que se conoce hoy día, al punto que es común llamarlos los «fundadores» del Cálculo.

13) Formalización del concepto de derivada de una función en un punto (aspecto objeto de la derivada). Interpretación geométrica. Ecuación de la recta tangente. Función derivada. Derivación de algunas funciones elementales. Función primitiva.

14) Formalización del Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow–Newton (uso y limitaciones). Cálculo de integrales definidas.

15) Métodos de derivación e integración (o pro-

fundización en el estudio si se ha trabajado antes la función derivada). Aplicaciones de la integral definida. Problemas que relacionan los conceptos de integración y derivación.
Se destaca que el desarrollo y análisis de esta secuencia se encuentra en la tesina que sustenta este trabajo (Álvarez, 2009). Para este artículo se ha considerado presentar propuestas de actividades para algunos de los ítems, en particular vinculados con la fase de exploración del concepto de integral definida, el uso del GeoGebra como material didáctico y la exploración del proceso inverso a la integración. La razón de esta selección se fundamenta en que en ellos se puede reconocer naturalmente la interacción de los diferentes marcos de estudio propuestos por Douday (1986).

5.2. Algunos posibles problemas de exploración

En el planteo y resolución de los problemas de exploración del cálculo de integrales mencionados en el apartado número 2 de la secuencia temática, se busca destacar principalmente dos cuestiones: establecer la idea de que el área bajo una curva se puede aproximar con una suma de áreas de rectángulos, e interpretar el significado del área en relación al problema planteado. Esto comenzaría a inducir en el estudiante la conjetura de que el cálculo integral estudia los resultados acumulados de efectos de cambio.
A continuación se presentan modelos de problemas que se pueden considerar con algunas consignas sugeridas para cada uno de ellos (cabe destacar que los tres primeros son reformulaciones de los problemas presentados por Wenzelburger, 1993).

5.2.1. Problema 1

La siguiente figura muestra la velocidad media de un automóvil en cada hora. Se quiere calcular la distancia total recorrida en 4 horas.

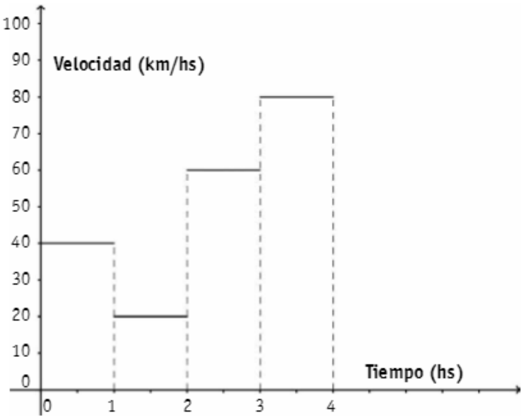


Figura 1.
Velocidad media de un automóvil en km por hora.

a) Describir el procedimiento para calcular la distancia recorrida al final de las cuatro horas, vinculando las variables del gráfico.
b) Representar gráficamente la función que describe la distancia recorrida según el transcurso del tiempo. ¿Es factible utilizar trozos de rectas para representar gráficamente tal función? Justificar.
c) Determinar los intervalos, si existen, de crecimiento y/o decrecimiento de la gráfica.
d) ¿Existe alguna relación entre el área bajo la gráfica de la función dada y la distancia final recorrida?
Se observa que una posible solución surge de interpretar la distancia recorrida como suma de áreas de rectángulos, es decir, se puede promover este cálculo desde un marco de naturaleza geométrico.
En el siguiente problema, las razones de cambio promedio no son constantes sino lineales.

5.2.2. Problema 2

En la figura 2 se muestra el número promedio de ventas de un determinado artículo por año. Se desea conocer la venta total en 4 años.

a) Calcular el área encerrada bajo la gráfica de la función dada y el eje x.
b) Comparando con la resolución del problema an-

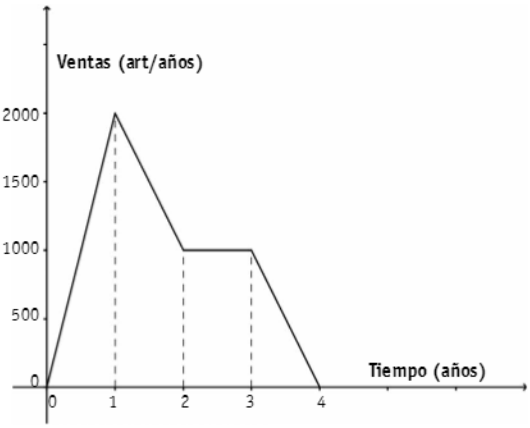


Figura 2.
Número promedio de ventas de artículos por año.

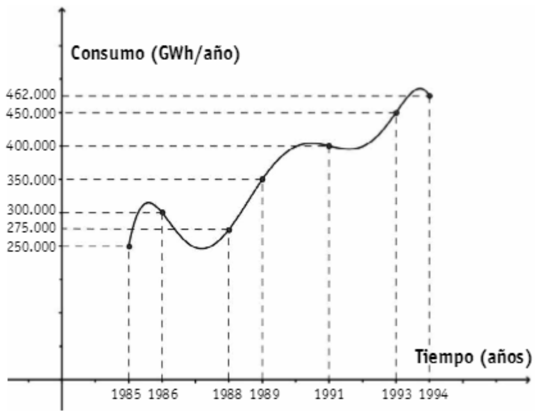


Figura 3.
Tasas de consumo de energía eléctrica en Gwh por año.

terior: ¿Qué representa el área calculada en (a)? Como en el problema anterior, prevalece la existencia de un marco geométrico, pero con la diferencia de que ahora se complejiza el cálculo de las áreas requeridas ya que deben calcularse otras distintas a las de rectángulos.
En el próximo problema, la tasa de variación media es una curva no poligonal.

5.2.3. Problema 3

Consideremos las tasas estimadas de incremento del consumo de energía eléctrica en un país desde 1985 a 1995. Se desea calcular el consumo total en estos diez años.

a) ¿Cómo se podría calcular el área de la región encerrada bajo la curva dada, el eje x, y las abscisas de 1985 y 1994?
b) Si se aproxima el área utilizando rectángulos cuyas bases tengan por longitud la correspondiente a un año, ¿qué altura se podría considerar?
c) Asumiendo que la función dada es continua, aproximar el área mediante la suma de áreas de rectángulos considerando como altura el máximo alcanzado en cada intervalo. Repetir el proceso utilizando el mínimo de la función en cada intervalo. ¿Qué puede conjeturar sobre el valor real del área respecto a los dos valores calculados anteriormente?
d) ¿Cómo se podría mejorar la aproximación antes calculada?
Se puede observar que en total interacción se tienen los conceptos de áreas y de cotas, la acción de aproximar números reales, esto nos lleva a la consideración de los marcos geométrico, numérico y analítico.
En el siguiente y último problema, se pide encontrar una función cuyo resultado exprese el valor aproximado del área de una región bajo la gráfica de una función entre la abscisa 0 y una abscisa variable t.

5.2.4. Problema 4

Se ha fabricado una bomba de agua para un sistema de riego, y se ha registrado el caudal de agua vertido en un tanque en litros/hs durante un día completo. Dicho comportamiento se describe aproximadamente mediante la función $L(t) = 5 \cdot sen(t) + 7$. En interés de la regularidad de su funcionamiento, se necesita conocer el volumen de agua acumulado en el transcurso de las horas. En una primera etapa, interesa el volumen de agua al transcurrir 6 hs. Pero, para un control posterior, puede necesitarse en cualquier momento. Se pide encontrar una expresión que permita aproximar el volumen de agua acumulado al transcurrir una cantidad t de horas. Luego calcular el valor aproximado para t = 6 hs.

En esta situación problemática se pueden reconocer los marcos analítico y algebraico, ya que se requiere la construcción de una función que aproxime el valor del volumen acumulado. El procedimiento utilizado puede constituirse en una base para formalizar en instancias posteriores el concepto de función integral.

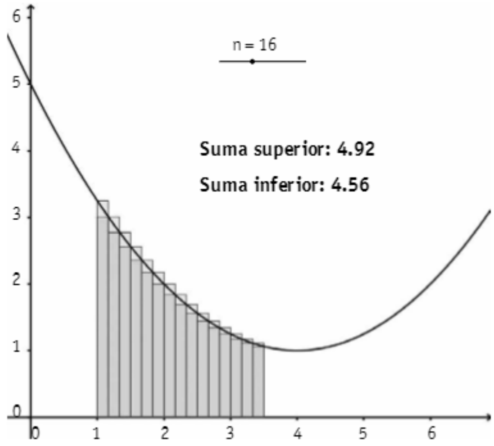


Figura 4.

Aproximación del área mediante sumas superiores e inferiores.

6. Consideraciones de las construcciones con GeoGebra

Respecto de las construcciones con el software libre GeoGebra mencionadas en los apartados 3, 5, 9 y 11 de la secuencia, se pretende la interacción del alumno hacia la exploración del significado de la integral definida y la función integral.

En la primera construcción (apartado 3 de la secuencia) se utilizan los comandos «SumaSuperior [Función, Número a, Número b, Número n]», «Suma Inferior [Función, Número a, Número b, Número n]» y la herramienta «Deslizador». Se propone graficar una función polinómica, por ejemplo una parábola, y visualizar numéricamente cómo se mejora la aproximación del cálculo del área de la región encerrada por la gráfica de la función, el eje de las abscisas y las rectas x=a y x=b a medida que aumenta la cantidad n de rectángulos de la partición del intervalo de integración con subintervalos de igual longitud.

La interacción se produce al utilizar un Deslizador para la cantidad n de subintervalos del intervalo considerado. En la siguiente figura, se observa el cálculo de una suma superior y una suma inferior para una partición que consta de 15 subintervalos del intervalo [1,3.5] para la función:

$f(x) = 0.25x^2 - 2x+5$. (Figura 4)

Además, las potencialidades del programa permiten trabajar el mismo problema con una extensa galería de funciones que el profesor podrá seleccionar adecuadamente.

En la segunda construcción (apartado 5 de la secuencia), se utiliza el comando «Integral [Función f, Número a, Número b]». Donde se puede considerar la función seno, el valor x=0 como extremo inferior de integración y un extremo superior de integración variable, controlado con un Deslizador con valor mínimo 0 y valor máximo 2π. Estas variables didácticas son propicias porque la gráfica entre estos valores antes indicados es simétrica respecto al punto de coordenadas $(\pi; 0)$, por lo tanto la integral de 0 a 2π vale cero. De esta manera, se quiere mostrar que la integral definida es un número y que la misma, no siempre representa el área de una región. Claramente son muchas y variadas las opciones con las que se puede trabajar al respecto. (Figura 5)

La tercera construcción (apartado 9 de la secuencia) es similar a la primera, pero ahora se tiene un fundamento teórico de apoyo. El criterio de integrabilidad de Riemann asegura que una función es integrable si y solo si, dado un valor ε mayor que cero, es posible encontrar una partición del intervalo de integración para la cual la diferencia entre la suma superior y la suma inferior es menor que el valor dado ε (Spivak, 1996). Consecuentemente se propone, para una función integrable, el cálculo de la diferencia entre las sumas superior e inferior para distintos valores de n (siendo n un número positivo que indica la cantidad de subintervalos, de igual longitud, que representa a una partición) y se comparan sus diferencias con un valor ε positivo dado. Se destaca que en esta actividad prevalecen los marcos de exploración de carácter geométrico y numérico, desde los cuales es el propio alumno que verifica la existencia de la partición a la que hace referencia el criterio de integrabilidad de Riemann. (Figura 6)

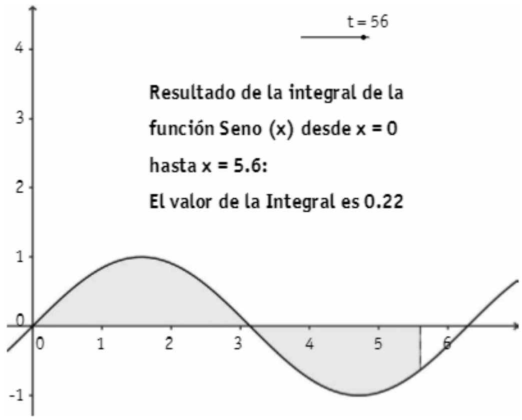
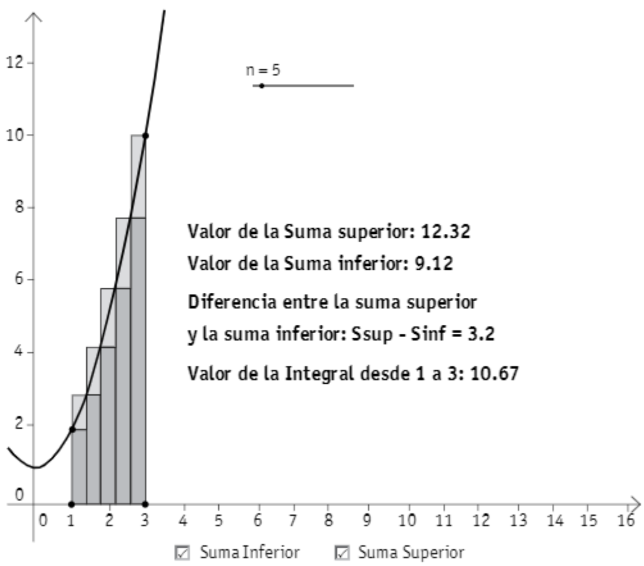


Figura 5.
Reconocimiento del significado de la función integral.



	A	B
1	Valor ε dado	Valor n suficiente
2	0.25	64
3	0.2	80
4	0.15	108
5	0.1	160
6	0.05	320
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Figura 6.
Reconocimiento de funciones Riemann – integrables.

La cuarta construcción (apartado 11) se inicia con la representación de la función integral para la identidad

$$F(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2},$$

proceso ya conocido, según el octavo apartado de la secuencia. A continuación, se propone que el alumno construya la recta tangente (usando el comando «Tangentes») e indague qué sucede si se considera la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos.

Se puede formular la siguiente guía de trabajo:

a) Representar la función f(x)=x. Luego, con el uso de un Deslizador «a», visualizar la región limitada por la gráfica de la función, el eje de las abscisas y la recta x=a. Ingresar en texto el valor del área de esta región.

b) Crear un punto P que tenga por abscisa el valor x=a y por ordenada el valor del área antes descrito. Al utilizar el comando «Activa Rastro»: ¿qué función se está representando? ¿Cuál es la fórmula correspondiente a esta función?

c) Ingresar la fórmula de la función obtenida, utilizar el comando «Tangentes» aplicado al punto P e indicar el valor del ángulo que esta recta forma con el sentido positivo del eje x.

d) Visualizar el cálculo de la tangente trigonométrica de dicho ángulo. ¿Qué representa este valor obtenido respecto a la función integral? Al mover el deslizador ¿qué relación se observa entre este número y el valor asignado según la función dada f(x)=x?

Es importante el rol que cumple el uso de un software como facilitador para la visualización numérica del resultado de este teorema: el alumno puede observar desde su propia interacción (al mover el deslizador) que, en el ejemplo particular estudiado, numéricamente se verifica que la derivada, (analizada desde un punto de vista geométrico) de la función integral en cada punto de su dominio da por resultado el mismo valor de la función dada f(x)=x.

Esta actividad puede generar un momento propicio para inducir algunos interrogantes en el estudiante, destacando el significado de que la derivada de la función integral de una función f(x) es la misma función f(x) y a la verificación del mismo con otras funciones.

En este punto el interrogante obligado será: ¿la propiedad observada se cumplirá para cualquier función o para una clase especial de funciones?

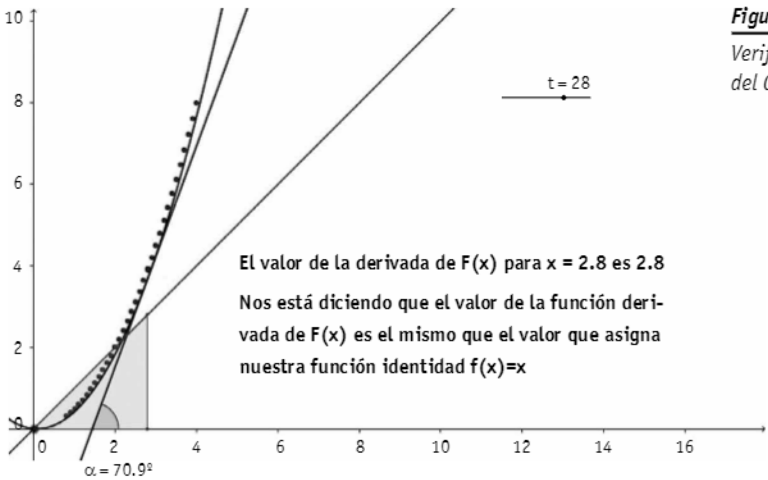


Figura 7.

Verificación del Teorema Fundamental del Cálculo para la función identidad.

7. Exploración del proceso inverso de la integración

En el décimo apartado de la secuencia se busca que el alumno explore el Teorema Fundamental del Cálculo planteando el límite del cociente incremental de la función integral de una función continua. Se busca relacionar desde esta perspectiva la reciprocidad del problema del cálculo de área y el problema de la pendiente de la recta tangente a una curva.

Una aclaración pertinente en el problema planteado, es que la función con la cual se propone trabajar tiene determinadas características que permiten la simplificación de los cálculos y de las formulaciones posibles, pero siempre debe ser entendido que corresponde a un caso particular y que luego de comprender el alumno esta

situación, se hará la demostración formal de la relación entre la derivada de la función integral y la función cuando ésta es continua (primera forma del Teorema Fundamental, Spivak, 1996).
De esta manera, se puede formular esta consigna:

Representar por medio del software una función g(x) continua, no negativa y creciente en [a,b]. Sean los puntos x y (x+h) pertenecientes a dicho intervalo, para h>0. Utilizar el teorema de intercalación para calcular el valor de

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h)-G(x)}{h},$$

donde $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ es la función integral de g(x).

Comenzando con una observación visual, el desarrollo podría ser de la siguiente forma:

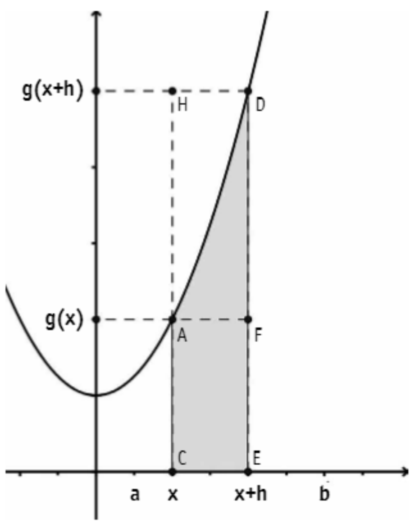


Figura 8.
Función g(x), como ejemplo, para las condiciones dadas en el problema.

La idea es inducir a que el alumno note que el valor del área que representa la región limitada por la gráfica de la función y el eje x entre las abscisas x y (x+h), verifica la siguiente desigualdad para h positivo:
$g(x) \cdot h \leq G(x+h) - G(x) \leq g(x+h) \cdot$ h

Donde g(x).h y g(x+h).h representan las áreas de los rectángulos de vértices CEFA y CEDH, respectivamente.

Para plantear el límite del cociente incremental se induce a dividir ambos miembros por h y dado que h es positivo, al calcular el límite para $h \to 0^+$, se obtiene

$$\lim_{h \to 0^+} g(x) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} g(x+h) \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = g(x)$$

Dado que la función G es continua, se obtiene que el límite del cociente incremental de la función integral es el valor de la ordenada de la función dada g. Es decir, a partir de una función g —estudiada como caso particular bajo los supuestos considerados— se obtiene la función integral G, al calcular este límite a dicha función se vuelve a obtener g. Se vislumbran así, desde un estudio geométrico–algebraico, las primeras conjeturas acerca de considerar la derivación y la integración como procesos inversos, para las funciones continuas.
Cabe destacar que de igual forma se debe explorar el procedimiento para $h \to 0^-$.

8. Reflexiones finales

En esta instancia no sólo es propicio reflexionar acerca de los fundamentos e intenciones de esta propuesta de enseñanza sobre la función integral, sino también sobre el rol que puede cumplir el docente desde la enseñanza del cálculo como formador de futuros profesores u otros profesionales.
Respecto de la propuesta de enseñanza... desde una concepción constructivista se busca, mediante la indagación y la formulación de conjeturas, provocar un desequilibrio cognitivo en el alumno, entre sus conocimientos previos y la necesidad de obtener soluciones a nuevas situaciones, que servirán de plataforma para construir otras

conceptualizaciones y relaciones. Lo expresado se plasma, por ejemplo, en el grado de dificultad creciente en las cuestiones a explorar, en el análisis del problema del área como disparador para el estudio formal de integrales, en el tratamiento analítico del Teorema Fundamental del Cálculo y en las actividades sugeridas para el uso de software, entre otras instancias. Asimismo, se pretende que todas estas acciones estén interrelacionadas y conectadas a distintos marcos. Se presenta, por lo tanto, una secuencia temática que está centrada en el alumno, que será el futuro profesor: con convicción sobre su capacidad, sobre cómo puede pensar y lo que puede hacer e investigar.

En otro aspecto complementario, en el trayecto formativo de futuros docentes se trata de seguir el desarrollo histórico del cálculo integral, lo que permite revalorizar los logros obtenidos en los trabajos de matemáticos como Arquímedes, Newton y Leibniz, entre otros. En definitiva, se busca orientar a los futuros educadores en una formación hacia la valoración de los procesos propios de avances y paradigmas de la ciencia, teniendo presente los contextos espacio–temporales en los cuales grandes pensadores fueron consolidando formalmente ideas, conceptos y procedimientos que en la génesis fueron muchas veces intuitivos.

Respecto al docente... se manifiesta la necesidad de tratar un problema tan elemental como el cálculo de un área, o de introducir las situaciones problemáticas en contextos de familiaridad para el estudiante, con el fin de evitar reducir la enseñanza del cálculo integral a una lógica fría y deshumanizada; ya que en las preguntas que dieron origen a esta rama del análisis matemático hay un llamado al mundo de lo empírico: un objetivo de estricto interés es mostrar la matemática como producto del intelecto humano, pero bajo nuestros objetivos debe estar entrelazada con la cotidianidad.

Por todo esto, el docente de los primeros cursos de cálculo debe estimular permanentemente la intuición y la visualización, es decir, debe apostar al redescubrimiento conceptual del estudiante, completamente alejado del mecanicismo algebraico (coincidiendo con las investigaciones mencionadas vinculadas a la enseñanza del concepto de integral definida).

Por último... resta llevar a la práctica áulica esta propuesta de enseñanza. Para poder registrar el trabajo de los estudiantes, estar muy dispuestos a sus aportes e incluso improntas que permitan mejorar el diseño de las actividades y/o considerar otros aspectos que no hayan sido tratados o reformularlos en su defecto.