***Betina Zolkower** (*), **Ana Bressan** (**) y*
***Fernanda Gallego** (***)*
Coordinadoras Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática
betinaZ@brooklyn.cuny.du; obressan@speedy.com.ar; fergallego@bariloche.com.ar

La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores

Resumen

Este artículo trata acerca del trabajo de un grupo de docentes convocados por su interés en la educación matemática realista (EMR), corriente que surge en Holanda en los años 60 en torno a las ideas de Hans Freudenthal. A través de una serie de experiencias de aula realizadas por integrantes de este grupo de docentes se presentan los principios centrales de esta corriente didáctica. Se concluye con una reflexión acerca de los aspectos de la EMR que los integrantes del grupo consideran más valiosos para la transformación de su práctica docente.

Abstract

This article focuses on the work of a study group of teachers interested in realistic mathematics education (RME), an approach under development in The Netherlands since the 1960s and based on the ideas of Hans Freudenthal. The main principles of RME are elaborated through a series of classroom experiences carried out by participants in this group. The article concludes with a reflection about the aspects of the realistic approach participants in the group find most valuable for the transformation of their classroom practice.

Palabras clave: capacitación, educación matemática, matematización, contextos, modelos, reinvención, experiencias de aula, didactización.

Keywords: *training, mathematics education, mathematization, contexts, models, reinvention, classroom experiences, didactization.*

Formación del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática

En el año 2000, una de las autoras ofreció en San Carlos de Bariloche (Río Negro) un curso de introducción a la educación matemática realista (EMR). Fundada por Hans Freudenthal (1905-1990) –matemático y educador alemán que realizó la mayor parte de su trabajo en Holanda– esta corriente didáctica nace en los años 60 como reacción tanto al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética como a la aplicación directa al aula de la matemática moderna o "conjuntista."

La EMR concibe a la matemática como una actividad humana que consiste en *matematizar*, o sea, organizar o estructurar la realidad, incluida la matemática misma (Freudenthal, 1991). Son características principales de esta corriente: a) los contextos y situaciones problemáticas realistas como generadores de la actividad matematizadora de los alumnos; b) el uso de modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones; c) la centralidad de las construcciones y producciones de los alumnos en el proceso de enseñanza/aprendizaje; d) el papel clave del docente como guía; e) la importancia de la interacción tanto grupal como de toda la clase y, f) la fuerte interrelación e integración de los ejes curriculares de la matemática.

Los cursos y charlas introductorias del 2000 interpelaron a una veintena de docentes, quienes vieron en la EMR un enfoque fructífero para abordar problemas de la enseñanza de la matemática que surgen en aulas, pasillos y cursos de capacitación. Se formó así el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM), coordinado por las autoras e integrado por docentes de los niveles inicial, primario, secundario y de adultos, que trabajan en escuelas públicas y privadas, con alumnos de nivel socioeconómico bajo, medio y alto. El objetivo inicial de este grupo fue estudiar, adaptar y poner a prueba en el aula propuestas paradigmáticas de la EMR y reflexionar acerca de estas experiencias.

Pronto surgió en el grupo el interés por profundizar en la teoría subyacente a estas propuestas, tarea difícil dada la escasez de materiales de la EMR en castellano y que pocos de los integrantes del GPDM manejan el idioma inglés. La traducción de textos clave de esta corriente y su circulación interna permitió al grupo estudiar los principios generales de la EMR y algunas de sus teorías locales (por ejemplo, la enseñanza de las fracciones, del cálculo mental, del álgebra, etc.). Desde su formación hasta la actualidad, el GPDM realiza las siguientes actividades:

- seminarios anuales internos en los que se abordan aspectos teórico-prácticos de la EMR, de los cuales resultan secuencias didácticas que luego se prueban en las aulas, se evalúan y se difunden entre otros docentes;
- cursos y talleres sobre el enfoque de la EMR para la enseñanza de la aritmética, la geometría, el álgebra, la estadística y las probabilidades. Inicialmente estos fueron dictados por los coordinadores del GPDM y en la actualidad están a cargo de los propios docentes del grupo. En estos eventos, los docentes comparten con sus pares experiencias de aula y discuten también los marcos teóricos que las encuadran. Al presente se dictaron más de 40 cursos y talleres dirigidos a docentes y directivos de EGB, en San Carlos de Bariloche y otras ciudades de Río Negro y Neuquén;
- reuniones periódicas de los docentes con los padres de sus alumnos, a los que ponen al tanto de cómo enseñan la matemática, y talleres en los que trabajan con ellos algunas de las propuestas que implementan en sus aulas;
- exposiciones en congresos y jornadas de educación en distintos puntos del país (Mendoza, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, provincia de Buenos Aires, Santa Fe y Neuquén);
- publicaciones en revistas argentinas y extranjeras, libros y material impreso para uso en

cursos de capacitación y trabajo en la clase de matemática;
- asesoramiento en la elaboración de documentos curriculares de nivel primario de la provincia de Neuquén.

La Educación Matemática Realista

Oponiéndose a la transmisión de la matemática como saber preconstituido –fenómeno que Freudenthal (1973) describe como *inversión antididáctica* en el sentido de que consiste en enseñar los resultados de la actividad matematizadora de otros– la EMR propone a los alumnos actividades de organización de situaciones problemáticas genuinas que dan lugar a procesos de matematización. Esta corriente se apoya en las siguientes ideas:
- el quehacer matemático es una actividad estructurante u organizadora de *matematización* que está al alcance de todos los seres humanos, de lo que se deduce la consigna de una *matemática para todos* (Freudenthal 1973, 1991);
- el aprendizaje es un proceso discontinuo de *matematización progresiva* que involucra distintos niveles y en el que los *contextos y modelos* poseen un papel central como puente para favorecer la suba de nivel (Freudenthal, 1991, van den Heuvel-Panhuizen, (1996, 2003);
- la enseñanza debe tomar la forma de *reinvención guiada* (Freudenthal, 1991), proceso en el que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente;
- la reinvención guiada requiere de la *fenomenología didáctica* para la búsqueda de contextos y situaciones problemáticas que den lugar de modo más o menos natural a la matematización (Freudenthal, 1983). La fenomenología didáctica se nutre de la historia de la matemática (Streefland, 1991b) y de las producciones y construcciones de los alumnos que van surgiendo durante el proceso de instrucción (Streefland, 1990).

La perspectiva realista sostiene que la matemática posee valor educativo en tanto su aprendizaje permite a los alumnos comprender, participar de y criticar los modos en que esta disciplina organiza diversas esferas del entorno social y natural. Como recalca Freudenthal (1991, p. 132), "La imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad." Abogando por una matemática para todos, la EMR plantea que el objetivo no es formar futuros matemáticos sino enseñar a todos los alumnos a abordar matemática y críticamente problemas que se presentan en situaciones cotidianas (de Lange, 1987, 1996; Freudenthal, 1968, 1973, 1991; Keitel, 1997). Se apuesta a que los alumnos accedan a estos conocimientos, destrezas y disposiciones a través del trabajo en torno a situaciones problemáticas que inviten a reinventar y utilizar herramientas matemáticas para su solución.
Aprender a matematizar requiere del paso por niveles crecientes de esquematización y formalización (Freudenthal, 1971; Gravemeijer, 1994, 1999). En el aula, la matematización progresiva se ancla en las construcciones que hacen los alumnos a partir de situaciones problemáticas realistas. En holandés, *zich realis-eren* significa imaginar; o sea, una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada (Freudenthal, 1991; van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Dentro de esta corriente, las interacciones verticales (docente-alumno) y horizontales (alumno-alumno) ocupan un lugar central, siendo clave el modo en que el docente maneja estos eventos con miras a maximizar oportunidades para la elaboración y el intercambio de ideas

(Dekker and Elshout-Mohr, 2004; Elbers, 2003; Zolkower y Shreyar, 2002, 2006).
La EMR concibe al currículo como un proceso que requiere del diseño de secuencias destinadas a promover cambios concretos en la enseñanza de la matemática en el aula. El motor de estos cambios es la *investigación para el desarrollo*, una metodología basada en experiencias de aula donde se ponen a prueba secuencias didácticas y se observan, registran y analizan hitos y saltos en el aprendizaje de los alumnos (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994). La reflexión de diseñadores curriculares y docentes acerca de estas experiencias conduce al mejoramiento de los materiales en desarrollo. La EMR es una teoría global de instrucción que se concretiza en teorías locales para la enseñanza de diversos tópicos: número (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer 1994; van den Heuvel-Panhuizen, 2001), álgebra (Streefland y van Ameron, 1996; van Ameron, 2003), geometría (Freudenthal, 1973, 1983, 1991; de Moor, 1991), estadística (Freudenthal 1983; Bakker 2004), análisis matemático (Gravemeijer y Doorman, 1999 b), etc. Vale recalcar que, lejos de ser un dogma acabado, la corriente realista está en constante proceso de transformación, gracias a investigaciones que permiten un ida y vuelta de la teoría a la práctica y viceversa.

Metodología de trabajo del GPDM

El GPDM comenzó su trabajo analizando los módulos de *Mathematics in context* (MIC), serie curricular para los grados 5 a 8 diseñada por el National Center for Research in Mathematical Science Education, Universidad de Wisconsin (EEUU) y el Instituto Freudenthal (Universidad de Utrecht, Holanda). Si bien el MIC no es traducción directa de materiales curriculares holandeses, se apoya sobre las ideas de la EMR, enfatizando el carácter activo de la matemática y ofreciendo oportunidades para que los alumnos comprendan los modos en que esta disciplina organiza esferas de la realidad, tanto cotidiana como científico-tecnológica.
Se trabajaron primero, del eje de número, los módulos de fracciones, decimales y porcentajes, luego los de geometría, posteriormente los de estadística y probabilidades y, al presente, los módulos de álgebra. El estudio de estos materiales se complementa con el análisis de libros de texto de la escuela inicial y primaria holandesa y documentos y fichas producidas por Instituto Freudenthal (*www.fi.uu.nl*). Cabe subrayar que la modalidad de trabajo del GPDM difiere de las formas habituales de capacitación y estudio en matemática, las que en general dan a conocer aspectos teóricos de las propuestas, dejando en manos de los docentes la incorporación a su práctica áulica de lo aprendido en los cursos.
A medida que los integrantes del grupo estudiaban secuencias didácticas realistas y los contenidos matemáticos subyacentes, las probaban en sus aulas y discutían estas experiencias, se plantearon los siguientes conjuntos de interrogantes:
1) ¿en qué consiste un contexto realista? ¿Cuál es la función de los contextos realistas en la enseñanza / aprendizaje de la matemática? ¿Cómo reconocer buenos contextos y como distinguirlos de pseudocontextos o contextos artificiales o "camuflados"?;
2) ¿qué se entiende por matematización progresiva? ¿Qué condiciones favorecen la matematización progresiva en el aula?;
3) ¿qué papel le toca al docente en lo que hace al manejo de la afluencia y variedad de producciones de los alumnos en aras de favorecer procesos de matematización progresiva? ¿Cómo pueden los docentes organizar el discurso en el aula para fomentar la elaboración y el intercambio de ideas matemáticas, la argumentación, la justificación y la prueba?

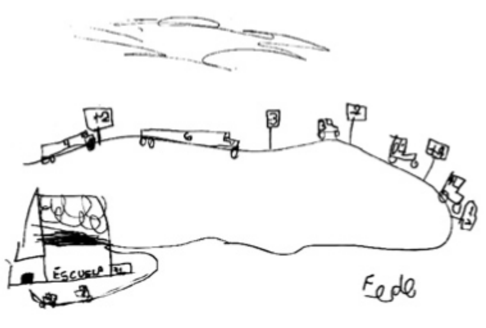
Algunas de estas preguntas aún siguen abiertas a la luz de nuevas lecturas teóricas y de la necesidad de

dar sentido y mejorar el acontecer en las aulas.
A continuación se esbozan experiencias realizadas por docentes del GPDM, bajo la supervisión de los coordinadores, con miras a llevar a la práctica la EMR. Si bien no tienen el carácter de investigaciones metodológicamente rigurosas, estas experiencias incluyen registros de observación, análisis de las producciones de los alumnos y narrativas de los docentes que las realizaron. La discusión de estos eventos dentro del ámbito del GPDM y más allá de éste, hizo posible su reproducción por parte de otros docentes en otras aulas.

1. Contextos

Según Freudenthal (1973, 1991), dado que en gran medida la matemática surge históricamente como herramienta para organizar o estructurar la realidad, su enseñanza debe basarse también en la organización de este tipo de situaciones. Lo que no significa restringirse a fenómenos del mundo real, dado que esto limitaría las oportunidades para que los alumnos aprendan a operar dentro de la matemática misma. Se trata de que estos, quienes al principio no poseen suficientes herramientas matemáticas, las reinventen a partir de abordar problemas en contextos y situaciones realistas. Tomar problemas de la vida diaria como punto de partida para matematizar permite a los alumnos imaginar las situaciones en cuestión y poner en juego su sentido común y sus propias estrategias de cálculo y de resolución.
Con miras a estudiar la función de los contextos en la enseñanza de la matemática, Mary dio en su clase de 1er grado una serie de lecciones basadas en un trabajo de van den Brink (1984) en el que la suma y la resta se abordan inicialmente en torno al autobús. Durante esta experiencia, los niños lograron conectarse con las situaciones –autobuses que van recogiendo y dejando pasajeros en las distintas paradas de su recorrido– y operar simultáneamente con la suma y la resta y utilizar el + y el –, respectivamente, para modelar en forma matemática las acciones de subir y bajar (Figura 1) (Collado y otros, 2003). Los niños reconocían fácilmente cambios en el número de pasajeros en cada parada, le daban un significado tangible al signo = (*llegaron m pasajeros al final*) y le otorgaban sentido al 0 como estado inicial, operador o resultado (*salió sin nadie, no bajó ni subió nadie, no llegó nadie*) (Figuras 1.A, 1.B y 1.C). Más aun, estos chicos lograron apropiarse sin mayor dificultad del lenguaje de flechas, como notación esquemática de cambios en el número de pasajeros ya reconocidos por ellos en trayectos de autobús imaginados, relatados y dibujados (Figura 1.D).

A) Fed. 1er grado.

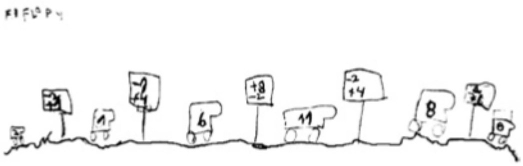


B) Registro clase. 1er grado (M: profesora)

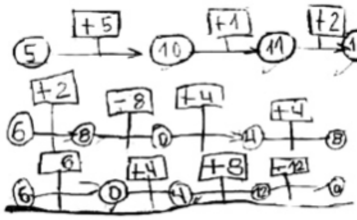
M: *¿Cómo hacemos para decir que subieron? ¿Cómo hacemos para decir que bajaron? ¿Cómo lo ponemos?*
Ca 1: *Poné otro colectivo.*
Jo 2: *Cambiále el número.*
Flo 3: *Borrále el número.*
Je: *Podemos usar un más.*
M: *¿Por qué?*
Je: *Porque cuando suben hay más personas.*
...
M: *¿Bajaron o subieron?*
Se: *Se bajó 1.*
M: *¿Cómo lo pongo?*
Se: *Menos, poné.*

(continúa en la página siguiente)

C) Flo. 1er grado.



D) Construir y resolver cadenas de sumas y restas: (Sí)



Registro clase. 1er año. 2001

Figura 1.

Producciones de alumnos acerca del colectivo

En esta misma clase de 1er grado se abordaron situaciones que involucraban operaciones inversas. *Si llegaron n pasajeros al final habiendo subido x en la parada, ¿cuántos pasajeros venían en el colectivo antes de la misma? Si llegaron n pasajeros y partieron m, ¿cuántos subieron o bajaron en la parada?* Es sabido que estas situaciones suelen ser difíciles para los niños de esa edad cuando se presentan en la forma estática de ecuaciones (por ejemplo: $4 + ? = 7$ ó $? - 2 = 6$).

La comprensión de las situaciones vinculadas al autobús por parte de estos alumnos, quienes solían regresar al contexto de partida como modelo para dar significado a las cuentas, les permitió transferir las estrategias de cálculo y modos de simbolización adquiridos a otras situaciones dinámicas, homólogas a la del autobús ("Es lo mismo en la confitería, lo único que se sale y se entra." "En el ascensor, en la última parada puede subir gente y no bajar y, en el colectivo, se bajan todos"). Después de trabajar dentro del contexto del autobús durante tres semanas, la mayoría de los niños logró operar flexiblemente con la suma y la resta del 0 al 100.

Para investigar los efectos de la contextualización, Adriana propuso a su clase de primer año de la escuela secundaria, una serie de cálculos de multiplicación y división con fracciones y decimales para resolver "como quieran o como puedan," o sea, sin brindarles ningún tipo de ayuda (Cuadro 1) (Rabino y otros, 2001).

a) $60 \div \frac{1}{2} =$	**b)** $36 \times 2\frac{1}{2} =$	**c)** $14 \times 3\frac{1}{2} =$
d) $0{,}02 \times 2500 =$	**e)** $8 \times 37\frac{1}{2} =$	**f)** $0{,}6 \times 0{,}06 =$
g) $10\frac{1}{2} \times 20 =$	**h)** $1{,}5 \div 0{,}3 =$	**i)** $6 \div \frac{1}{6} =$

Cuadro 1.

Cálculos presentados a un grupo de alumnos de 1er año

Una semana después Adriana presentó de nuevo los cálculos, pero esta vez en el marco de situaciones (Cuadro 2). La docente no dio ningún tipo de aclaración o ayuda a los alumnos en la resolución de estos problemas, salvo la lectura colectiva que es habitual en su clase en la presentación de los mismos.

1) *Don Juan Sandoval tiene una plantación de lúpulo en El Bolsón y hace cerveza casera. Envasa la misma en barriles de 60 litros. Este verano decidió vender cerveza en la feria artesanal de los sábados. El envase que le pareció más conveniente era el de medio litro. ¿Cuántas botellas puede envasar con cada barril?*
2) *La pista de patinaje del Puerto Bariloche tiene 36 metros de contorno. ¿Cuánto se recorre si se dan dos vueltas y media?*
3) *¿Crees que alcanzarán $14 para comprar 3 docenas de facturas si cada docena cuesta $4? ¿Y si compro 3 docenas y media y no me quieren dar vuelto, me estarán engañando?*
4) *Cada hoja para hacer fotocopias cuesta 2 centavos. Si cada resma tiene 500 hojas, ¿cuánto cuestan 5 resmas?*
5) *Me quieren vender dos terrenos rectangulares al mismo precio, uno mide 8 metros de frente y tiene 37 ½ metros de fondo, y el otro tiene 10 ½ metros de frente y 20 metros de fondo. ¿Cuál me conviene más?*

Cuadro 2.

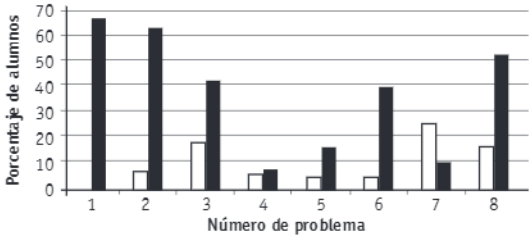
Situaciones problemáticas presentadas a un grupo de alumnos de 1^er^ año

A continuación (Figura 2) presentamos las respuestas de un alumno de esta clase.[1] En la primera columna figuran los cálculos, en la segunda su solución y en la tercera las resoluciones de los problemas correspondientes a dichos cálculos.

A) 60% ½ = 5 60 ⌊12 8 5	1) 	+60 60 120	Con el Barril de 60L. Se pueden Hacer 120 Botellas de medio litro de cerveza
B) 36×2½ = 6 36 ×2 = 72 72 ⌊12 8 6	2)	36 +36 = 72 72 +18 = 90	Recorre 90 metros porque sumando 36+36 que son 2 vuelta da 72 y la mitad de 36 es 18 que es la mitad entonces sumamdo 72 más 18 da 90 metros
C) 14×3½ = 3 14 ×3 = 42 42 ⌊12	3)	3 ×4 = 12 12 +2 = 14	si alcanza porque si cada docena sale 4$ si compro 3 docena Me da 12 $ y comprando 3 docenas y media = me da catorce porque suma 2$ y me da 14$ y no lo estan engañando porque no tienen que darle nada de vuelto
D) 0,02×2500 = 00,5000	4)	500 ×2 = 1000 500 ×2 = 1000 500 ×2 = 1000 500 ×2 = 1000 500 ×2 = 1000 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 5000 Igual a 50$	se multiplica 500×2 c. que cuesta cada Hoja cada cuenta da 1000 sumando las 5 da 5000 entonces las 5 Resmas cuesta 50$
E) y G) 8×37½ = 24 37 ×8 = 296 296 ⌊12 24 24 056 48 08 10½×20 = 440 12 +10 = 22 22 ×20 = 00, 44, 440	5)	18 +37 = 45% 20 +10 = 30½	Un tarreno Mide en total 45%. el otro 30%. Me conviene mas 45%

Figura 2.

Ejemplo de soluciones de un alumno de 1^er^ año



Cuentas
Respuestas correctas: 13,4 %
No contestan: 31 %
(abandonan la tarea sin resolver)

Problemas
Respuestas correctas: 51 %
No contestan: 7,2 %

Figura 3.

Porcentaje de alumnos que respondieron correctamente a los problemas y las cuentas

Los resultados de esta experiencia (Figura 3) –un porcentaje más alto de respuestas correctas en los problemas en contexto (51 %) que en los "sin contexto" o en un contexto puramente numérico (13,4 %)– subrayan la importancia de considerar el contexto como un aspecto intrínseco del problema a resolver. En el caso de esta experiencia, la contextualización realista ayudó a los alumnos a imaginar las situaciones planteadas, esquematizarlas mediante las cuentas y resolver cada problema. Vale subrayar que el efecto de los contextos no siempre es positivo a la hora de ayudar a los alumnos a resolver problemas (Cooper y Harris, 2002).

La contextualización realista difiere en gran medida de lo que ocurre frecuentemente en las aulas, donde suelen presentarse enunciados verbales fuertemente ligados al tipo de operación que se pretende ejercitar y los contextos resultan irrelevantes para su resolución (de Lange, 1996; Greer, 1993; Lave, 1997; Nesher, 1980). Esta cultura de la seudocontextualización lleva a los alumnos a ignorar las situaciones evocadas por los enunciados, proceder mecánico que explica en gran parte la gran incidencia de errores en la resolución de problemas no rutinarios (Verschaffel y de Corte, 1997; Verschaffel y otros, 1999).

Los niños suelen devolvernos su propia versión caricaturesca de los problemas de enunciado verbal, tal como lo ilustran los siguientes ejemplos propuestos por alumnos de diversos años de escolaridad.

- Un cargamento de camiones debe llevar 723,24 toneladas de harina y sólo puede llevar 125,2. ¿Cómo puede repartir la mercadería? (8^{vo})
- Un camionero tenía que entregar 723,24 latas de tomates a un supermercado y le afanaron 125,1. ¿Cuántas latas le quedaron para entregar? (8^{vo})
- Si un barril contenía 123,9 litros de leche ¿cuánto contendrán 4,6 barriles? ¿Y 9,8? (8^{vo})
- Si en la biblioteca hay 93.794.650 libros para ordenar en 87 estantes ¿cuántos libros se podrán poner en cada uno de esos estantes? (6^{to})
- Yo tengo 543 mandarinas y me comí 325 mandarinas y quedaron 218 mandarinas (6^{to})
- Adrián tiene 8647 pelos y se cortó 258. ¿Cuántos pelos le quedan? (6^{to})
- Juan salió a pasear con sus padres y su hermana. Decidieron saltar porque tenían frío: él saltó 20 veces, su mamá 30, su papá 25 y María 15 ¿cuántos saltos dieron entre todos? (4^{to})

Cuadro 3.

Problemas de enunciado verbal inventados por alumnos de distintos años

La experiencia de Adriana y otras similares despertaron el interés del grupo por continuar estudiando los efectos de la contextualización. Después de leer y discutir investigaciones sobre las dificultades de los alumnos para resolver problemas no rutinarios, María Luz y Nora, docentes de 5^{to} año, implementaron un modo de trabajo en el que los contextos se discutían como aspectos intrínsecos a los problemas por resolver (Martínez y otros, 2002). Periódicas conversaciones acerca de los contextos y su relevancia para la resolución de problemas, permitieron a los alumnos imaginar las situaciones planteadas, movilizar sus conocimientos y utilizar estrategias informales y modelos para resolverlas. En el informe final de su trabajo, estas docentes incluyeron la siguiente reflexión:

Nos resultó difícil seleccionar situaciones problemáticas realistas porque no teníamos suficientemente claro las propiedades de éstas ni tampoco qué contextos resultarían significativos para nuestros alumnos. (...) También notamos que al trabajar de este modo capacitamos a los alumnos para que en el futuro puedan analizar críticamente y con mayor profundidad las formas de pensamiento matemático que se usan en la vida diaria, en la ciencia y en la tecnología y que, por cierto, difieren en gran manera de nuestras prácticas escolares habituales.

La discusión de esta experiencia en el grupo expuso las dificultades de algunos docentes para hacer uso no banal de la noción de contexto realista y llevó a comprender, tanto el sentido amplio de esta noción –esto es, realista no significa de existencia real sino realizable o imaginable– como su carácter relativo: que un contexto sea o no realista depende de las experiencias de los alumnos y de su capacidad para imaginarlo. En otras palabras, los contextos y situaciones pueden decirse realistas sólo en la medida en que logran interpelar a los sujetos que aprenden.

Para explorar a fondo la problemática del uso de contextos en el aula de matemática, en el año 2004, Silvia trabajó en dos 5^{tos} grados una secuencia didáctica en torno al uso de imágenes (Pérez y otros, 2006). La presentación de estas imágenes en forma abierta, o sea, sin incluir la formulación de un problema a resolver, dio lugar a una multitud de preguntas por parte de los chicos. En particular, se destacaron las producciones generadas por una tarjeta postal representando a un diminuto picaflor posado en la punta de un lápiz (ver Figura 4).

Figura 4.

Imagen del picaflor posado en un lápiz

Esta imagen, intrigante en tanto a primera vista sugiere una desproporción, generó más de 50 preguntas en la clase de Silvia (ver Cuadro 4). La discusión de estas contribuciones llevó a distinguir entre: a) preguntas posibles de responder utilizando la información proporcionada por la imagen e, incluidas en éstas, preguntas de naturaleza matemática; b) preguntas posibles de responder con información adicional y, c) preguntas que no se pueden responder. Desmintiendo la típica impresión de que "los alumnos no preguntan, no se interesan", la experiencia en esta clase da cuenta de lo que se logra al interpelar la imaginación de los chicos a través de un artefacto de la realidad (Freudenthal, 1991; Bonotto, 2001).

- *¿Por qué tiene el nombre de picaflor abeja?*
- *¿Ve en la noche?*
- *¿En dónde se refugia cuando hay lluvia?*
- *¿En qué momento del día come más?*
- *¿Come algo más, además de néctar e insectos?*
- *¿Cuánto mide el picaflor con las alas extendidas?*
- *¿Qué es más pesado, el lápiz o el picaflor?*
- *¿Cuál es la época del año en la que se ve más el picaflor?*
- *¿El picaflor de qué país es?*
- *¿Hacen el vuelo estacionario?*
- *¿Será el más chiquito del mundo?*

Cuadro 4.

Algunas de las preguntas elaboradas por alumnos de 5to grado

Mientras los investigadores continúan estudiando los efectos deseados e indeseados de la contextualización en la instrucción matemática (Cooper y Harris, 2002; Bonotto, 2001, Verschaffel y otros, 2000; Abreu 2000, Reeuwijk, 1997), desde las trincheras de sus aulas, los docentes del GPDM verifican la importancia de los contextos a la hora de ayudar a los alumnos a construir significados y herramientas matemáticas, a la vez que reconocen hasta qué punto la experiencia personal de cada alumno y el contexto escolar imponen limitaciones a este tipo de actividad en las aulas.

2. La matematización progresiva

La discusión acerca de cómo guiar los procesos de *matematización progresiva* llevó al GPDM a estudiar a fondo esta noción. La EMR identifica dos modalidades de matematización: horizontal y vertical (Treffers, 1987). La primera se refiere a la organización de situaciones del mundo real por medio de herramientas matemáticas y se basa en la observación, la intuición, el sentido común, la aproximación empírica y la experimentación inductiva. La segunda toma a la matemática misma como objeto de estudio –se matematiza la matemática para hacerla más matemática– y conlleva procesos de abstracción, generalización, prueba, rigorización, simbolización y formalización (Freudenthal, 1991; Treffers, 1987). Para aclarar el carácter sutil de esta distinción citamos *in extenso* a Gravemeijer (2000):

Que cierto aspecto de la actividad matemática de una persona sea llamado 'vertical' u 'horizontal' depende si la actividad incluye alguna extensión de su realidad matemática. Una actividad de simbolización, por ejemplo, podría ser una actividad de rutina para un alumno. Esto sería un caso de matematización horizontal. Sin embargo, si la misma forma de simbolización involucrara para otro alumno una nueva invención, entonces esto implicaría matematización vertical. La matematización vertical es más claramente visible si un alumno explícitamente reemplaza su método de resolución por uno de nivel superior. Es decir que se trata de un cambio a un método de solución, o a una descripción más sofisticada, mejor organizada o, en pocas palabras, más matemática (p.6; traducción de los autores).

La matematización progresiva recorre una serie de niveles: situacional, referencial, de generalización y de formalización, en un trayecto que se ve facilitado por modelos emergentes, en el sentido de que no son productos matemáticos preexistentes y orientados a un fin determinado sino que surgen de las actividades organizativas de los alumnos en torno a situaciones realistas (van den Heuvel-Panhuizen 2003, Gravemeijer, 2000; Gravemeijer y otros, 2000a). Freudenthal dice: "El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal" (1991, p. 34, traducción nuestra). Los modelos permiten sortear la distancia entre las matematizaciones contextualizadas de los alumnos y las matematizaciones formales de la disciplina (Treffers, 1987, 1991; van de Heuvel-Panhuizen, 2001a).

Desde la EMR se plantea que, para servir de puente entre distintos niveles de matematización progresiva, los modelos deben: a) estar enraizados en contextos realistas, en el sentido de realizable o imaginables; b) poseer suficiente flexibilidad como para poder ser aplicados en un nivel más avanzado o general, c) apoyar la matematización vertical sin bloquear la vuelta al contexto que les dio sentido; d) ajustarse a las estrategias informales de los alumnos –como si ellos los pudieran haber inventado–; y e) ser fácilmente adaptables a situaciones homólogas a la inicial (van de Heuvel-Panhuizen, 2003).

Entre los modelos enfatizados por la corriente realista se destacan: materiales didácticos manipulables: contadores, el dinero, collares de bolitas bicolor estructurado de diez en diez (Treffers, 1991); situaciones paradigmáticas: el colectivo (van den Brink, 1984), el restaurante de los panqueques (Streefland, 1991a), la reunión de padres, la fábrica de caramelos en paquetes de 10 unidades (Gravemeijer, 1994); esquemas: el modelo circular, la barra doble o de porcentajes, la tabla de razones (Middleton y otros, 1995; Middleton y otros, 1998, van den Panhuizen-Panhuizen, 2003); diagramas: diagrama de árbol; modalidades de notación: el lenguaje de flechas, la notación de libreta y la tabla de combinaciones para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (Reeuwijk, 1995); y procedimientos volcados simbólicamente como los algoritmos en columnas (Treffers, 1987) (ver Figura 5).

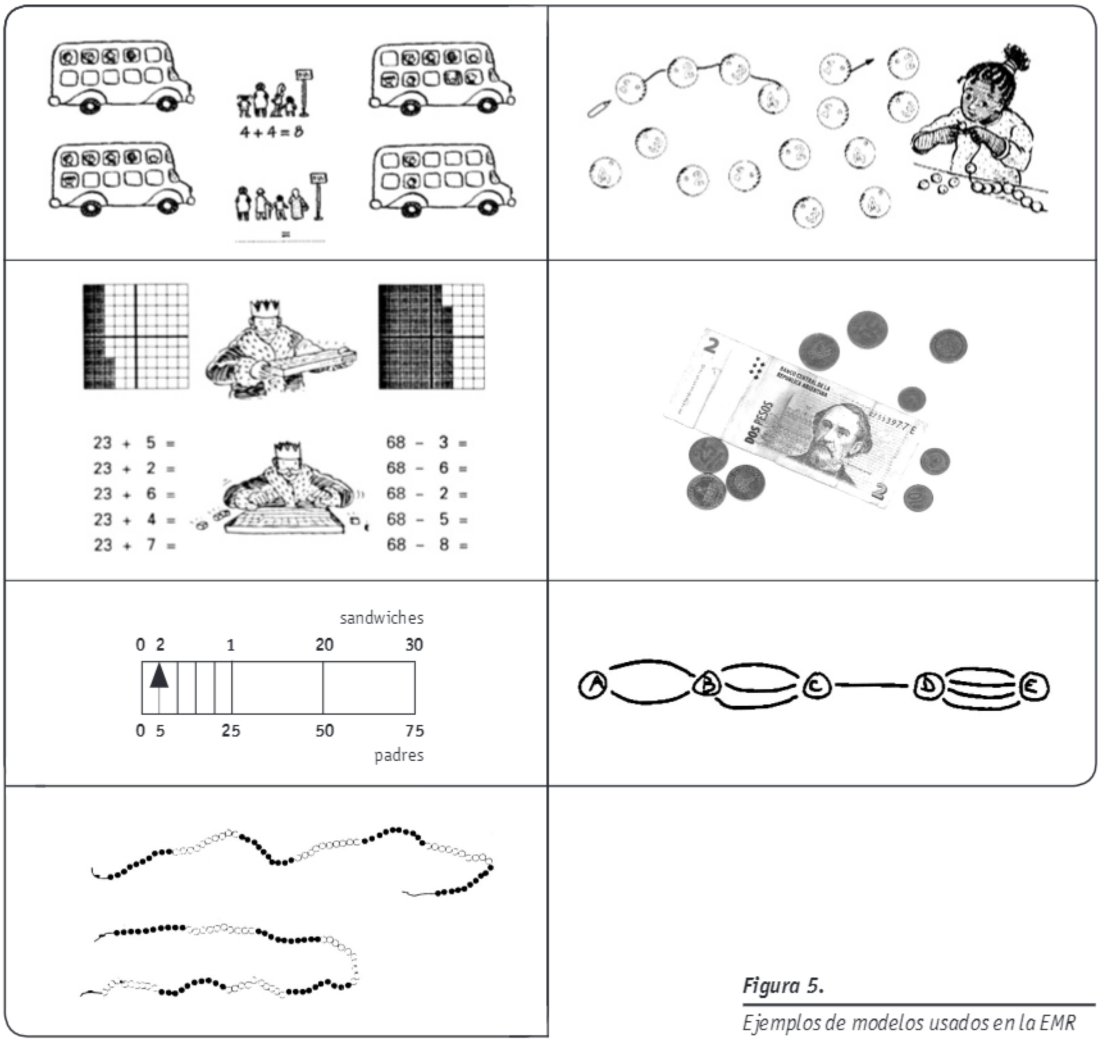


Figura 5.

Ejemplos de modelos usados en la EMR

El pasaje de un nivel de matematización al siguiente, cambio que lejos de ser continuo suele darse de modo súbito marcando saltos en el aprendizaje (Freudenthal, 1991), involucra la simbolización esquemática de una situación por medio de un *modelo de*. Poco a poco el modelo se va desprendiendo de la situación referencial hasta adquirir la forma de *modelo para*, o sea, transformándose en una herramienta para organizar situaciones homólogas a la inicial (Goffree, 2000; Gravemeijer y otros, 2000). Esta transición requiere de la atención por parte del docente a las construcciones y producciones de sus alumnos en tanto indicadoras de estos niveles.

Para aprender a identificar distintos niveles de matematización, los docentes del GPDM se dedicaron a anticipar respuestas de los alumnos a las actividades planificadas y a contrastar sus predicciones con lo ocurrido en las clases. Estos análisis didácticos *a priori* y *a posteriori* se centraron en la comparación y categorización de producciones, identificándose tanto modelos y estrategias, como formas de simbolización, esquematización y formalización. En particular, en la enseñanza de la aritmética, la matematización adquiere la forma de una esquematización y algoritmización progresivas. Estos procesos involucran trayectorias desde estrategias informales de cálculo inventadas, las cuales generalmente están ligadas a contextos específicos y poseen un grado limitado de generalidad, hasta los algoritmos convencionales (Anghileri, 2001; Dickson y otros, 1991).

Por ejemplo, el collar bicolor de 100 bolitas agrupadas de a cinco o de a diez, ayuda a los alumnos de primero y segundo grado a ubicar y establecer relaciones entre números. El collar los familiariza, tanto con la posición de los números en la sucesión numérica (aspecto ordinal) como con la cantidad que representan (aspecto cardinal). Este modelo adquiere un nivel mayor de abstracción al transformarse en la línea numérica abierta, la línea numérica doble y la barra de fracciones y porcentajes (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

A continuación se muestra cómo los alumnos de primer grado de primaria usaron el collar para calcular. Las tres primeras producciones (Figura 6.A) son soluciones del siguiente problema: *Al cumpleaños de Julieta fueron 20 nenas, 12 varones y 5 personas adultas. ¿Cuántos invitados asistieron?* Con el doble objetivo de facilitar la comprensión por parte del resto de la clase y favorecer la esquematización progresiva, cuando los chicos explicaban sus estrategias, la docente las representaba sobre un collar dibujado en el pizarrón. En lecciones posteriores, en lugar de dibujar el collar, la docente comenzó a usar la línea numérica abierta como soporte para ubicar los números y operar con ellos, indicando con el uso de arcos los saltos que los alumnos describían al realizar las sumas y restas (Gravemeijer 1994; Treffers, 1991). Las Figuras 6.B y 6.C ilustran cómo los alumnos adoptaron la línea numérica abierta para resolver problemas de suma y resta, dando significado a estas operaciones en base al uso de sentidos opuestos de desplazamiento sobre la misma, y facilitando la comprensión de estas operaciones como inversas. El trabajo de agrupamiento de 10 en 10 en el collar se refleja en el uso de saltos de 10 en la línea numérica. Además, el uso de estrategias tanto de descomposición como secuenciales muestra la versatilidad de abordajes de los alumnos.

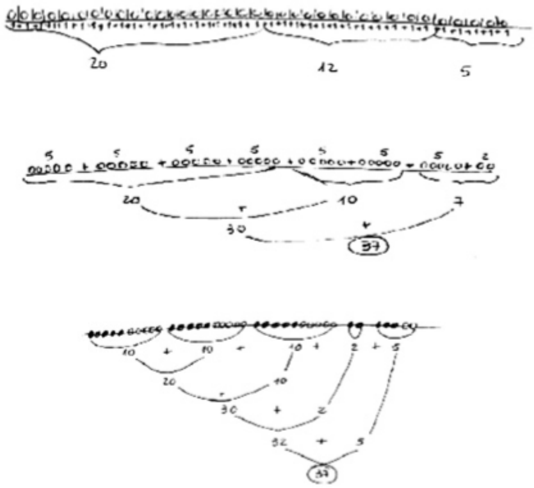
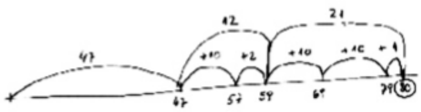
A) 20 + 12 + 5 	***Rosa:*** *Voy contando de 1 en 1 hasta formar 20, luego de 1 en 1 hasta formar 12 y después también de 1 en 1 pongo 5 perlas para representar las personas adultas. Para saber el total conté desde 1 a 37.* ***Katty:*** *Fui poniendo perlas de 5 en 5 hasta formar 20, luego puse dos grupos más de 5 para formar 10, pero como eran 12 guardé 2 para el final. Seguí con 5 y después agregué las dos guardadas y conté de 10 en 10 hasta 30, luego sumé 2 tenía 5 y entonces llegué a 37.* ***Matías:*** *Contó de 10 en 10 poniendo dos veces 10 para formar 20, 1 vez 10 y 2 perlas más para formar 12 y agregó 5 y luego dijo 10 y 10 son 20, 20 y 10 son 30 y 2 son 32 y 5 son 37.*
B) 47 + 12 + 21 	***Manuel:*** *47 + 12 + 21. Sin consultar su diario matemático, trabaja con el 47 sin necesidad de descomponerlo, pero si descompone el 12 y el 21.*
C) 58 - 13 	***Luis:*** *58 - 13. Resta con un criterio secuencial 58 - 13 sin descomponer el 58.*

Figura 6.

Pasaje del uso del collar a la línea numérica abierta (alumnos de 2do grado)

Por su parte, Silvia llevó a la práctica en su 5to. grado el enfoque propuesto por Streefland (1991a) para la enseñanza de las fracciones, el cual privilegia el tratamiento de la fracción como razón y como operador por sobre su interpretación exclusiva como parte/todo. La Figura 7 presenta un extracto de las producciones de los alumnos de Silvia, donde se aprecia el uso de diversas estrategias y modelos que dan cuenta de diferentes niveles de esquematización.

8 chicos deciden compartir 5 panqueques. ¿Cuánto come cada uno?

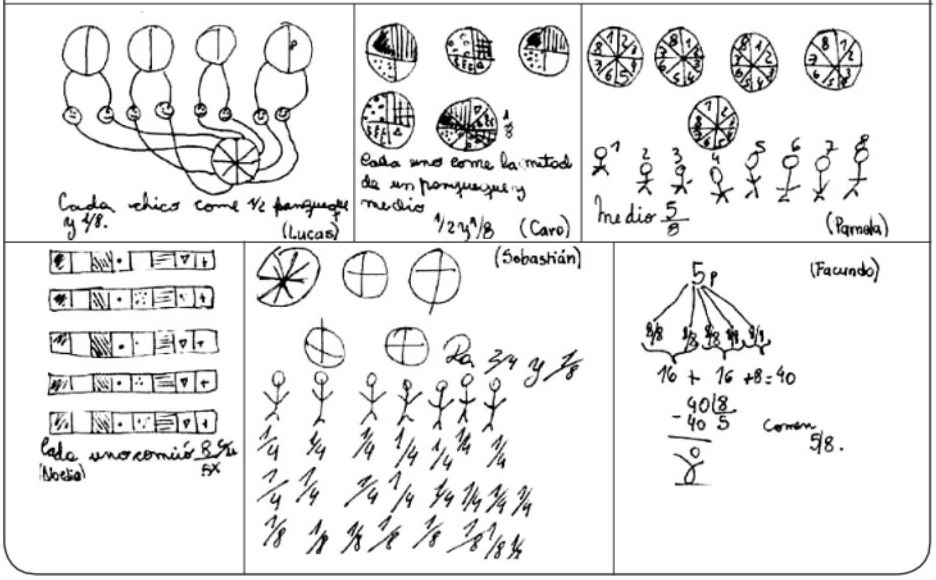


Figura 7.

Soluciones a un problema de reparto equitativo

Al año siguiente, Graciela, otra docente del GPDM, continuó trabajando con estos alumnos dentro del mismo enfoque. La Figura 8 presenta el registro realizado por esta docente de distintas respuestas frente a *7/12 es menos que 70% ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?* Las producciones de los alumnos ilustradas en las Figuras 7 y 8 revelan distintos niveles en el pasaje del uso de *modelos de* a *modelos para* cada vez más generales y esquemáticos, llegando a razonamientos crecientemente sofisticados y formales, utilizando la notación convencional bajo distintas formas (fraccionaria, decimal, porcentual) y el cálculo aproximado. La discusión de estas producciones en el aula permitió que los alumnos reflexionaran acerca de sus dificultades y sus logros.

- Verdadero, porque el 50 % es 6/12 y 6/12 + 1,5/12 es 7,5/12 = 62,5 %, entonces seguro que 7/12 es menos que 70 %.

- Sí, es un poco menos porque casi llega, pero le falta un poco (pasó al frente e hizo los siguientes esquemas para explicar a sus compañeros)

- Verdadero, porque 6/12 es 50 % y 1/12 no llega a ser 20 %, entonces 7/12 no llega a ser 70 %.

- No llega a 70 %. Serían 8/12 para igualarlo.

- 7/12 es menor que 7/10. Por lo tanto, es menor que 70 %.

- 7/12 es 3,5/6 y 1,75/3 es más que 50 %, pero menos que 70 %.

- Verdadero, porque hacés 100 : 12 y te da 8; hacés 8 x 7 y te da 56.

(continúa en la página siguiente)

- 35/60 = 7/12) (lo tacha y escribe en el pizarrón: **2/3 = 8/12 7/12 70 %**

“es más que” “es menos que”

- Sí, llega hasta el 60 % porque: **70 x 100 = 7000 | 12**

583 | 100

500 5,83

83

- 6/12 = 50 % 1/12 = 8 % 7/12 = 58 %, es menos que 70 %

Figura 8.

Respuestas a la pregunta: 7/12 es menos que 70 % ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

3. La interacción

La EMR subraya la necesidad de crear condiciones para que los alumnos reinventen objetos, modelos, operaciones y estrategias matemáticas en interacción con sus pares y el docente y bajo la guía de este último. La interacción, tanto de toda la clase como en grupos pequeños, da lugar a que los alumnos expliquen, comparen y contrasten, pongan a prueba, evalúen y eventualmente lleguen a apropiarse de ideas matemáticas. Para que esto ocurra, deben querer y ser capaces de participar en comunidades de aprendizaje donde la validez de las ideas no depende sólo de la autoridad del docente sino también, y sobre todo, de la fuerza retórica de la argumentación y la razón (Dekker y Elshout-Mohr, 2004; Elbers, 2003; Gamoran Serrín, 2002; Sadovsky y Sessa, 2005; Zack y Graves, 2001).

Del principio de matematización progresiva se deduce que las condiciones óptimas para la reinvención se dan en aulas heterogéneas, esto es, integradas por alumnos con distintos niveles de habilidades y destrezas matemáticas (Freudenthal, 1991). En este escenario, y a los ojos de un docente bien entrenado, el espectro de soluciones generadas por los alumnos durante una determinada lección y frente a un problema dado, funciona como un mapa de ruta indicando posibles trayectorias para las lecciones siguientes.

Para que esto sea posible, los problemas deben ser accesibles a todos y resolubles en varios niveles, y los docentes deben orquestar la interacción de modo tal que conduzca a la participación, el debate genuino y la reflexión. El docente debe ser capaz de analizar el trabajo oral y escrito de sus alumnos, atendiendo a aquellos momentos clave donde se aprecian discontinuidades en el aprendizaje. Basado en este análisis, al docente le toca la difícil tarea de organizar las discusiones de modo de facilitar el paso hacia niveles cada vez más avanzados de matematización. La Figura 9 muestra un extracto de registro de Silvia donde se aprecia cómo esta docente maneja un episodio de interacción colectiva (o “puesta en común”) en su clase de 4to grado en torno a la resolución del siguiente problema de combinaciones: En un parque de diversiones hay un puesto para comer con los siguientes productos y precios (que aparecen en un recuadro): pancho \$2; superpancho \$4; hamburguesa \$4; pebete jamón y queso \$3; gaseosa \$3; agua mineral \$2 y jugo \$2. Escribí todas las posibilidades de merendar en este puesto (primero una comida y luego una bebida).

Lo siguiente está escrito en la pizarra:

Guido

(Dibujo de una hamburguesa y una gaseosa)

Hamburguesa y gaseosa

Valeria

Pancho y gaseosa
Superpancho y gaseosa
Hamburguesa y gaseosa
Jamón y queso y gaseosa

Pancho y agua
Superpancho y agua
Hamburguesa y agua
Jamón y queso y agua

Betania

Pancho + gaseosa
Pancho + agua mineral
Pancho + jugo

Superpancho + gaseosa
Superpancho + agua mineral
Superpancho + jugo

Hamburguesa + ...

Nico

1 Pancho
2 Superpancho
3 Hamburguesa
4 Jamón y queso
5 Gaseosa
6 Agua
7 Jugo

7+1	7+2	7+3	7+4
6+1	6+2	6+3	6+4
5+1	5+2	5+3	5+4

Ala: *Bet lo hizo con letras y Nico con números... pero los dos están pensados igual. Dejan la comida fija.*
S: *¿Cuál les parece más económica, más fácil?*
Coro: *¡La de Nico!*
S: *Mirna ¿vos qué dijiste que querías hacer para no volver a escribir todo?*
Mir: *Escribir las iniciales.*
S: *¿Cómo sería para hacer las combinaciones desde este lugar?*
Tom va dictando combinaciones desordenadas
S: *¿Por qué le costará a Tom pensar cuál seguiría?*
A: *Porque le cuesta leerlas.*
A: *Yo sé. Porque hay 3 bebidas y 4 comidas.*
A: *Por ahí le conviene repetir una comida o una bebida.*
S: *Cómo sería cambiar la comida y repetir la bebida? ¿Con gaseosa habría otra posibilidad?*
Coro: *PG SPG H y G J y Q y G*
S: *¿Cómo podemos achicarlo un poco más? Miren, gaseosa se repite acá, se repite acá...*
Mag: *Hacer una columna con gaseosa.*
S: *(Escribe G y dibuja 4 flechas saliendo de ella) ¿Gaseosa con...? (Los alumnos completan y ella escribe)*

G
P
SP
H
J y Q

S: *En una columna pusimos gaseosa ¿Qué tendríamos que poner ahora?*
A: *Agua mineral*
S escribe:

AM
P
SP
H
J y Q

S: *¡Muy bien! ¿Qué faltaría? ¿Eric?*
Eri: *Gaseosa.*
S: *No, ya está.*
A: *Jugo.*
S: *¿Jugo con qué?*
Varios alumnos: *Con todo.*
S: *¿Qué es todo? ¿Cuántos son todo?*
Varios alumnos: *¡Cuatro!*
S: *¿Cuántas comidas posibles hay?*
Varios alumnos: *Cuatro.*
S: *Si la pregunta hubiese sido: ¿cuántas posibilidades hay en total de comer una comida y una bebida, con cuál de estas ideas es más fácil o más corto ver el total de posibilidades?*
Est: *Con la de Nico... porque puso números y tenemos que hacer una cuenta.*
La: *Nico dice que cuenta 1,2,3,4... y así. Ahí también podés contar (señalando los diagramas con flechas).*
S: *¿Nico, vos coincidís?*
Ni: *Sí.*
S: *¿Habría una forma de pensarlo o sacarlo más rápido?*
Ni: *Porque no tenés que decir las palabras.*
S: *¿Diego, te parece que la mejor manera es decir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...? (señalando cada posibilidad mientras va contando).*
Diego asiente con la cabeza.
S: *¿Habría alguna manera de sacarlo más rápido? Para decir el total de posibilidades ¿es lo más conveniente decir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12?*
Vi: *Cuatro por tres.*
S: *¿Por qué cuatro veces tres? (Escribe 4 x 3).*
A: *Porque 4 veces 3 son 12.*
Est: *Porque son 4 comidas y tres bebidas.*
A: *O porque son 4 columnas con 3 posibilidades.*
S: *Acá son 4 columnas con 3 posibilidades (señalando el trabajo de Nico). Pero acá serían 3 bebidas ¿y cuántas posibilidades de comidas? (señalando los diagramas de flechas.*
As: *Cuatro.*
S: *Entonces de acá quizás sería más fácil sacar tres por cuatro (escribe 3 x 4).*
Varios alumnos: *¡es lo mismo 4 x 3 que 3 x 4!*

Figura 9.

Fragmento de registro de observación en una clase de 4to grado

Lejos de tratarse de una mera “puesta en común” de estrategias y procedimientos después de haber terminado de resolver el problema en cuestión, este episodio de interacción da lugar a que los alumnos interactúen públicamente con las ideas de los otros *in statu nascendi* –o sea, mientras todavía están trabajando en busca de la solución final (Zolkower y Shreyar, 2006)–. Bajo la diestra batuta de Silvia, la reflexión colectiva acerca de las ventajas relativas de las listas menos o más ordenadas, el uso de iniciales o números para simbolizar los elementos a combinar y el diagrama de árbol y la multiplicación como herramientas para organizar la situación problemática y hallar todas las combinaciones posibles rápida y completamente, funciona como *umbral interpersonal* (Halliday, 1993) para la eventual apropiación, por parte de los alumnos, de aquellas ideas más efectivas y sofisticadas desde el punto de vista del nivel de matematización. Vale notar el modo fluido en que la conversación va y viene del contexto específico de la situación –diferentes combinaciones de comidas y bebidas– al nivel simbólico general de la operatoria multiplicativa, tal como aparece en las últimas diez intervenciones de este fragmento de registro.

Aportes de la corriente realista al trabajo del GPDM dentro y fuera de las aulas

La apropiación de la propuesta realista por parte del GPDM adquiere una forma cíclica, con idas y vueltas de la práctica a la teoría y viceversa, en un proceso de reinvención guiado por los capacitadores y enriquecido por la interacción reflexiva y crítica, tanto con sus pares en el grupo como con otros docentes. Esta reinvención no es tarea simple ya que enfrenta el obstáculo de concepciones acerca de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje que están fuertemente arraigadas. Sin embargo, el trabajo de estos cinco años ha ido dando sus frutos en la calidad de la práctica áulica de estos docentes y la creciente incidencia del grupo en la escena local, regional y nacional de la didáctica de la matemática. A continuación se expresan aspectos de la EMR que los integrantes del GPDM reconocen como los más valiosos para la transformación de su práctica.

- Se toma conciencia de la centralidad de los contextos realistas como generadores de actividad matematizadora y de la necesidad de prestar atención a la multiplicidad de manifestaciones de la matemática en la realidad:

...uno trata de analizar si un cierto contexto o situación es imaginable, razonable o no. Con el tiempo, el ejercicio y el estudio, uno se vuelve más exquisito. Capaz que le doy mil vueltas a las cosas hasta decidirme a usarlas con esos chicos. También me pasa que empiezo a hilar más fino y trato de reparar en todas las sutilezas (¿Cómo está hecha la pregunta? ¿Qué variante se puede generar?, etc.). Es bueno ejercitarse en “pescar” situaciones significativas de la vida cotidiana. Como ejemplo está el trabajo que hicimos a partir de la postal del picaflor, que resultó sumamente motivador y significativo para los chicos. O el ejemplo de la pregunta de Marco, uno de los chicos de 4[to] *el año pasado: ¡¿Y cuántas veces más va a saludar Laura hasta fin de año?! Un problema que hasta el día de hoy los chicos recuerdan* (Silvia, docente del nivel primario).

- Se adopta el punto de vista de que el objetivo no es enseñar los algoritmos procediendo algorítmicamente sino a partir de situaciones que inviten a los alumnos a algoritmizar:

[Yo le explico a los padres] que la idea es que los chicos re-construyan estos algoritmos no para que los reproduzcan mecánicamente, sino para que los entiendan... El proceso de analizar sus propias estrategias para ir acortándolas o modificándolas

hasta llegar a los algoritmos tradicionales lleva tiempo y paciencia. Por eso les pido un voto de confianza en este sentido. Los chicos van a terminar el grado usando el algoritmo tradicional de la multiplicación (o el de la división) pero entendiendo lo que hacen. De esta manera, tampoco dependen de la memoria para acordarse si pongo una rayita, un cero, me llevo o traigo. La mejor manera de acompañarlos es respetar sus estrategias, tratando de no imponerles ninguna y ayudándolos a reflexionar sobre lo que hicieron (Silvia).

El ser claros con los papás, el dar a conocer con contundencia el cómo se va a avanzar, hace que los padres, vuelvo a reiterar, bajen sus ansiedades por ver "la cuenta parada por ejemplo" y valoren el trabajo de construcción de los distintos algoritmos que realizan los alumnos. Logren apreciar que no aprenden mecanismos como lo hicieron ellos (así que no corren con la desventaja de que si se lo olvidan o equivocan no llegan a resolver). Los chicos son verdaderos constructores de sus estrategias (simples, más complejas, más o menos trabajosas, más conveniente) y por lo general siempre logran hallar el resultado correcto (Ana, docente del nivel primario).

Una gran ventaja es que en el colegio se trabaja con esta línea y se han dado charlas a padres sobre la forma de trabajo. Los padres están satisfechos, lo mencionaron en la última reunión y siento que el tema de los algoritmos es el termómetro para ellos. Es un punto que remarcaron ya que los chicos los manejan con soltura; además, pueden resolver las tareas sin apoyo de los padres (Liana, docente del nivel primario).

- Se reconoce la centralidad de la interacción para favorecer la reflexión y la suba en el nivel de matematización:

Después de algunos comentarios de Silvia sobre la interacción en su clase, comienzo a darme cuenta de que al dictar un problema o cuando lo leemos en voz alta, algunos alumnos ya comienzan a anticipar formas de resolución o resultados, empiezan a elaborar algunas conjeturas acerca de lo que puede suceder y algunos en la resolución toman estas ideas y luego se encargan de comprobarlas o refutarlas. Este aporte de una integrante del grupo, lo pude aplicar en mi aula. Antes no dejaba que ningún alumno hablara antes de que todos los aspectos del problema a resolver estuvieran entendidos (Elba, docente del nivel primario).

Lo que más destaco en cuanto a la interacción es: 1) incentivar la participación a través de presentar estrategias, plantear dudas, dificultades, etc.; 2) repensar el tipo de interrogantes a plantear: intento preguntar de manera que todos puedan responder, sin que nadie se sienta excluido y también considerando cuál es el alcance de la pregunta (¿qué busco?); 3) incorporar una pregunta que para mí resulta fantástica: ¿cómo lo pensaste? Descubrí que el ¿por qué? está pegado a lo intimidatorio: ¿por qué lo hiciste así? En el Instituto de Formación Docente, los adultos se sorprenden ante el "¿Cómo lo pensaste? Más de uno me ha dicho: "nunca antes nadie se había preocupado de preguntarme cómo pienso algo;" 4) estar atenta a las distintas producciones para levantar las más relevantes y las que evidencien los distintos niveles; 5) insistir en la presentación de estrategias y la argumentación, reconstruir los primeros esbozos o ideas y valorar los borradores como huellas de las producciones personales; 6) reconocer públicamente instancias de matematización vertical, por ejemplo, alumnos que después de tres o cuatro encuentros dicen "entendí de qué se trataba tal cosa..., yo lo pensaba de tal manera pero me di cuenta que..." (Mary, docente del profesorado de nivel inicial).

- Se subraya la necesidad de observar el trabajo de los alumnos; generar, anticipar y analizar sus construcciones y producciones y utilizar ese material como anclaje para la enseñanza:

Al decir que las producciones son libres o abiertas se tiene en cuenta y se permite todo tipo de estrategia, ya sea formal o informal. Se hacen socializaciones parciales en las que uno o dos representantes del grupo pasan al frente y vuelcan su producción en un papel o en el pizarrón. Se trata de que todas las producciones queden en paralelo. Volcar la producción significa que expliquen y justifiquen su trabajo y el del grupo al que pertenecen. Si hay errores matemáticos se corrigen. En un principio cada grupo trata de imponer su producción pero, a medida que se avanza se trata de lograr el respeto y valoración del trabajo de los compañeros. En ese momento se hacen acuerdos sobre cuál es la producción más conveniente y se acepta ésa como óptima para seguir avanzando (Adriana, docente del nivel secundario).

Si bien antes hacía pasar a los chicos al pizarrón pero era una sola resolución la que aparecía y ésta tenía que ver con las formas que yo había explicado. Ahora aparecen muchas más posibilidades. A veces ellos eligen caminos que ni se me habían ocurrido y es todo un desafío seguir el razonamiento de los chicos y ver si es lógico o no. Muchas veces uno se queda pensando y termina diciendo: "Nos lo llevamos para pensar en casa." Como esto sucede en las puestas en común estamos todos involucrados y eso también hace que vean que los docentes no siempre tenemos todas las respuestas ahí inmediatamente. A veces alguno dice: ¡pero usted es la profesora y tiene que saber! Mi respuesta es: yo sé resolverlo de una forma, pero aparecieron varias y entre ellas ésta que no estoy segura si es válida o no. Lo bueno es que aceptan que pueda ser así (Patricia, docente del nivel secundario).

- Se abrió el debate acerca de si "una matemática para todos" es o no lo mismo que "la misma matemática para todos," cuestión que sigue abierta y a la cual los docentes continúan aportando ideas y experiencias que surgen de su trabajo y el de sus colegas:

En cierto modo, si bien el nivel de la escuela está pensado para chicos no superdotados, siempre flotaba en el aire la idea de que algunos dotados podían manejarse con soltura dentro del área, mientras que los otros debían hacer grandes esfuerzos para aprobar, pero que [la matemática] era la materia "ogro." Hoy pienso que todos pueden hacer matemática, que es el área con la que más contacto tiene el alumno en su vida real y cotidiana, por lo que todo ese entrenamiento le sirve en la matemática escolar, que es amena y atractiva a la mayoría. Y de hecho, como consecuencia lógica, bajaron los índices de recuperación en las instancias de diciembre y febrero (Adriana).

He tenido algunos casos de resistencia y sobre todo de incredulidad por parte de los alumnos adultos respecto de la forma de trabajo; algunos (también adolescentes) "creen" que no se "estudia" nada.
En cuanto al sector social una de las grandes alegrías (¿por qué no?) es tener alumnas adultas de 1er año que dicen: "yo nunca voy a aprender matemática...", que cuando llegan al final de su carrera ya no piensan lo mismo (Maro, docente de Escuela de Adultos).

Recientemente la coordinación pidió a los docentes del GPDM que respondieran por escrito un cuestionario de evaluación. A continuación se presentan algunas de sus respuestas a la pregunta: *¿qué interrogantes te quedan todavía sin responder acerca de la didáctica realista y de su implementación en el aula?*

... *Otra de mis inquietudes es cómo trabajar derivada, polinomios, etc., ya que no logro imaginarme actividades de punto de partida para lograr procesos de algebrización en niveles más avanzados de la enseñanza* (Magali, docente del nivel secundario).

Ajustar métodos de evaluación y autoevaluación en donde se incluyan especificación de tareas de evaluación, ... (según este enfoque) (Maro).

Necesito poder distinguir con un poco más de sustento esta línea de otras tales como la didáctica francesa. Encuentro puntos de contacto, pero cuesta ver por dónde pasan las diferencias. Creo que en un punto estamos diciendo lo mismo, haciendo el mismo análisis, pero desde marcos distintos, con distintas herramientas de análisis (Silvia).

Otra inquietud es cómo la planificación anual se corresponde con la metodología de la EMR y no es una mera adaptación de la planificación anual tradicional (Azucena, docente del nivel secundario).

A modo de cierre

Freudenthal (1991) subraya que sería contradictorio que, por una parte se pida a los docentes que den a sus alumnos oportunidades para acceder a la matemática como una actividad de *matematización* y, desde la formación, la capacitación y los libros de texto, se les baje una línea didáctica preconstruida, privándolos de la oportunidad de participar en actividades de *didactización* –a nivel horizontal, esto es, pegadas a la realidad de su aula, y a nivel vertical, generalizando a través de diversos contextos y situaciones didácticas– que los lleven a elaborar y formalizar su propia versión de la didáctica de la matemática. Gracias a experiencias de aula y discusiones, los participantes del GPDM han tomado conciencia de la necesidad de saldar la enorme brecha entre especialistas y docentes y buscan modos fructíferos de abordar la creciente desarticulación entre la investigación didáctica y la práctica en el aula.

Esperamos que este artículo se lea, no sólo como una presentación ilustrada de la corriente realista o un racconto anecdótico de las actividades de un grupo de estudio e investigación, sino también y sobre todo como un testimonio del poder de reflexión y de transformación que resulta de la conversación de un grupo de docentes con una teoría, desde la perspectiva local de sus saberes y experiencias.

Notas

(*) Assistant Professor, Middle Childhood Mathematics Education Program, School of Education Brooklyn College, City University of New York.

(**) Especialista de las Direcciones de Currículo y de Nivel Superior del Consejo de Educación de la Provincia de Neuquén.

(***) Directora de la Escuela Secundaria Emilio Frey de la Fundación Educativa Woodville, San Carlos de Bariloche.

(1) Nótese la confusión entre perímetro y área en el problema 5. La gran mayoría de los alumnos cometieron errores similares considerando que a mayor perímetro (o semiperímetro), mayor área.