Patricia Sadovsky (*), *Carmen Sessa* (**)
y el grupo de docentes del postítulo[1]
(*) SEGCBA. patsadov@mail.retina.ar
(**) Facultad de Cs. Exactas y Naturales, UBA
CEPA, SEGCBA. pirata@dm.uba.ar

La conformación de una comunidad matemática en un proceso de formación de maestros: un ejemplo privilegiado para conocer complejidades acerca de la clase de matemática[2]

Resumen

En este artículo nos proponemos precisar aspectos del funcionamiento de un trayecto de formación en la que la actividad matemática en tanto actividad de producción se concibe como asunto central. Nuestro estudio se basa en el análisis del desarrollo de un postítulo de especialización en enseñanza de la matemática para el nivel primario, dirigido a maestros de la Ciudad de Buenos Aires. Estudiamos algunos episodios que intentan dar cuenta de la complejidad que supone construir una cultura matemática al tiempo que se participa en ella. Para lograr comunicar estas ideas hemos necesitado describir en primer lugar las opciones centrales que realizamos al diseñar el postítulo.

Abstract

In this article we propose to specify functional aspects of a formation' course in which the mathematical activity while activity of production is conceived as a central matter. Our study is based on the analysis of the development of a post grade of specialization on teaching of the mathematics for the primary level directed to teachers of the city of Buenos Aires. We study some episodes that try to show the complexity that supposes constructing a mathematical culture at the time that one takes part in it. To communicate these ideas, we meet needed of describing first the central options that we adopt to design the post grade.

Empecemos por el final

Una sensación gratificante nos recorría a todos –alumnos y docentes– el día que finalizamos las clases de la primera cohorte del postítulo Especialización en Enseñanza de la Matemática para el Nivel Primario[3]. Teníamos la convicción de haber participado en un proceso rico y complejo de producción de conocimientos sobre la matemática y su enseñanza. Poco a poco e invirtiendo mucho costo de aprendizaje nuestros alumnos "se le fueron animando" a la matemática.

Desde esta condición privilegiada, la de alumnos involucrados y entusiasmados con el aprendizaje que transitaban, la de un equipo docente con espacios de trabajo colectivo para discutir y pensar las clases, es posible contornear mejor la complejidad de los procesos inherentes a la construcción de conocimiento matemático en una clase.

Puntos de partida para pensar un trayecto de formación[4]

Quienes pensamos el postítulo tenemos un recorrido de trabajo en el campo de la didáctica de la matemática tanto a través de tareas de investigación como de capacitación docente y desarrollo curricular. Referencias teóricas y conocimientos producidos a través de nuestras prácticas profesionales configuran un marco desde el cual concebimos esta carrera de especialización. Necesitamos explicitar aspectos esenciales de este marco como parte del análisis que queremos comunicar –compartir– a través de este artículo.

- Constituye para nosotros una referencia central la Teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986) que propone un modelo teórico del proceso de producción de conocimientos matemáticos en una clase. Se trata de una construcción teórica que problematiza la actividad matemática que se despliega en un aula a partir de la interacción con una problemática (matemática) que abordan desde sus respectivas posiciones sociales alumnos y docente. De dicha construcción se deriva una concepción según la cual la actividad matemática misma es constitutiva de los objetos que se estudian en la clase y por lo tanto pierde sentido la distinción –tradicional– entre qué se enseña y cómo se enseña.
- Consideramos también la perspectiva de Bauersfeld y Cobb (1995) según la cual a partir de las interacciones entre los alumnos y con el docente se constituye una cultura matemática en la clase. Esta cultura se nutre del trabajo de cada estudiante y del trabajo colectivo y a la vez las prácticas matemáticas de la clase hacen posible y también condicionan la actividad matemática de cada estudiante.
- Numerosos trabajos de investigación que comparten estos principios más generales se han ocupado de estudiar procesos de producción de conocimientos matemáticos específicos en el marco de una clase o han analizado la complejidad que supone la adquisición de ciertos conceptos matemáticos. Otros trabajos han establecido relaciones entre grupos de conceptos y han problematizado de diferentes maneras la actividad matemática. Hemos considerado los resultados de estas investigaciones al delinear la trayectoria de formación en el postítulo.
- Un soporte importante –y de ninguna manera independiente de las referencias que ya se han mencionado– está constituido por nuestra concepción de la matemática en tanto producto social y cultural y nuestra experiencia de trabajo en esta disciplina[5].
- Nuestra concepción de matemática y nuestros conocimientos didácticos nos llevan a configurar una cierta imagen de lo que desearíamos que fuera una clase de matemática en la escuela (imagen que se ha corporizado en numerosas experiencias que hemos orientado). Es a esa clase de matemática y al estudio en el que es posible embarcar a un alumno a partir de ella, que le otor-

gamos un valor formativo fundamental en el trayecto escolar de los estudiantes.

- Nuestra práctica cotidiana en diferentes instancias del sistema educativo nos ha permitido acumular conocimiento acerca de la distancia entre las prácticas que nos proponemos y la escena real de muchas de las aulas de la escuela primaria. Entre las múltiples razones que permitirían explicar esta distancia hemos considerado especialmente para este trayecto de formación, la concepción de matemática que se sostiene usualmente en muchas instituciones y, consecuentemente, el sentido que se le atribuye a la enseñanza de esta disciplina.
- El diseño curricular para la Educación Primaria –en cuya elaboración muchos de nosotros hemos participado– y el conocimiento acerca de las dificultades que muchos docentes plantean para abordar este material, han sido asuntos que formaron parte de nuestro horizonte inicial para pensar el postítulo.

Aspectos esenciales del diseño e implementación del postítulo

La matemática y la didáctica como asuntos de enseñanza en el postítulo

Desde un inicio y, apoyados en nuestra concepción de la matemática y la didáctica, pensamos en una formación en la que estas dos dimensiones aparecían entramadas.

Nuestra idea fue –y sigue siendo– ofrecer un trayecto de trabajo a lo largo de un año y medio donde la matemática, su enseñanza y su aprendizaje fueran objeto de reflexión cruzado. Y decimos cruzado porque vemos allí un flujo a doble vía:

- por un lado, en la medida en que sostenemos una concepción de la didáctica que problematiza los objetos matemáticos, la reflexión didáctica constituye una fuente de profundización en el conocimiento matemático;
- por otro, dado que pensábamos desplegar con nuestros alumnos un trabajo de producción matemática, el mismo se podría constituir en una referencia relevante para la reflexión didáctica: tanto sobre la naturaleza de la actividad matemática[6] como sobre los modos de aprender.

En este artículo nos detendremos a analizar ciertos aspectos del trabajo matemático llevado a cabo que permiten avanzar en la caracterización de la referencia cruzada señalada.

En cuanto al trabajo más específicamente didáctico podemos decir brevemente que abarcó tanto un estudio de los contenidos matemáticos que se enseñan en la escuela primaria como la reflexión sobre teoría didáctica. El primer aspecto se desplegó a partir del análisis de:

- secuencias de enseñanza (algunas propuestas por nosotros y otras pensadas o aportadas por los alumnos);
- libros de texto y
- diseño curricular.

Rasgos esenciales de la interacción entre alumnos y docentes

Los alumnos se distribuyeron en cinco comisiones que se sostuvieron durante todo el transcurso del postítulo. La modalidad de taller con intercambios entre los alumnos y devoluciones de los docentes fue la dinámica principal de trabajo en las clases. De una clase para otra, los alumnos debían realizar tareas de lectura o de escritura (en general de síntesis de lo trabajado) análisis de propuestas didácticas o resolución de problemas matemáticos. Algunas de estas tareas eran retomadas colectivamente y otras fueron analizadas por los docentes y devueltas a cada "autor". En cada seminario hubo algunas instancias plenarias que adquirieron la modalidad de clase magistral, que cumplieron una función de síntesis y devolución de cuestiones que fueron emergiendo en los distintos grupos de trabajo.

Al contar con tres docentes por comisión fue po-

sible conocer de cerca las producciones y generar con cada alumno un intercambio a propósito de las mismas. En estos intercambios los docentes comentaban cuestiones que estaban pendientes, aspectos acerca de los cuales se constataban evoluciones, puntos más fuertes de cada producción...
Para la preparación de las clases se procedió de la siguiente manera: sobre la base de una planificación global de cada seminario elaborada por la coordinación (problemas a tratar, lecturas a discutir, tareas, modalidades, etc.), en las reuniones quincenales del equipo docente se discutía y precisaba cada jornada de clase; a partir de estas elaboraciones cada terna de docentes planificaba más concretamente el trabajo de su comisión. Lo sucedido en las clases también fue objeto de trabajo en las reuniones de equipo docente que tuvieron lugar quincenalmente. El postítulo fue reajustándose a partir de las elaboraciones realizadas en estas reuniones. Esa dinámica permitió ir caracterizando la posición de nuestros alumnos y de alguna manera revisar los supuestos bajo los cuales íbamos planteando las diferentes actividades. Nos ocuparemos de estas cuestiones a raíz de la formación tanto didáctica como matemática que propusimos.

Primer ejemplo: la necesidad de modificar las concepciones de evaluación

Fue "novedoso" para los maestros que se les solicitara la reescritura de trabajos –sobre todo en el caso de trabajos matemáticos– que en principio "estaban bien". Ellos tenían asociado "reescritura" con "trabajo insuficiente" y no entendían ni aceptaban fácilmente que se pudiera profundizar sobre algo "aprobado". Interpretamos que esta sensación de malestar frente a la tarea de reescribir "lo ya aprobado" se explica desde una concepción de evaluación centrada en la acreditación, según la cual se retrabaja solamente sobre "lo insuficiente". (*Si me piden que reescriba, aunque me hayan aprobado es porque no está del todo bien lo que hice; ¿qué querrá que escriba si el problema está bien?*).
Detengámonos en el caso de una alumna que planteó que cuando ella entregaba un trabajo lo hacía de la mejor manera posible y que le resultaba muy exigente y en alguna medida desmoralizador tener que profundizar sobre aquello acerca de lo que había pensado al máximo de sus posibilidades.
La explicitación de esta alumna nos hizo tomar conciencia de que las devoluciones de los docentes eran interpretadas en términos de "correcciones", que medirían la distancia entre la producción del alumno y una cierta producción óptima que estaría "en posesión del docente". Lejos de esta idea, nuestras devoluciones eran producto de habernos "internado" en el trabajo personal propuesto por cada alumno y permitían inaugurar nuevas zonas de reflexión que difícilmente podrían haber estado habilitadas desde las consignas iniciales del trabajo.
La modalidad adoptada constituyó para nosotros una manera de comunicar nuestra posición frente a la evaluación, basada en el intercambio de ideas sobre una cierta producción y dejando en un segundo plano las cuestiones vinculadas con el control y la acreditación. Esto fue explicitado en distintos momentos del desarrollo de la carrera y, el modo de trasmitir ideas en "acto" a partir de nuestras propias decisiones didácticas atravesó el trabajo del postítulo y fue un aspecto reconocido por los alumnos a raíz de varias otras cuestiones.

La formación matemática: uno de los ejes sobre los cuales se apoya esta formación

Nos proponemos ahora identificar distintas dimensiones que caracterizan el trabajo matemático que tuvo lugar en el trayecto de formación que estamos analizando: el recorte de contenidos matemáticos seleccionado, el tipo de práctica desplegado en las clases y el posicionamiento de los alumnos frente a la matemática al que apuntábamos.

¿Qué trabajo matemático seleccionar?

Es una premisa compartida por *todos*[7] que saber "más" matemática resulta valioso a la hora de planear y llevar a cabo un trayecto de enseñanza. Al mismo tiempo, muchos de nosotros sostenemos que "mayores conocimientos" matemáticos no son garantía de mejores enseñanzas. Y al sostener esto estamos oponiéndonos a las posiciones tradicionales que separan un "qué" de un "cómo" y entienden desde esta separación que es posible "apilar" algunos conocimientos didácticos encima de una sólida formación matemática.

Desde esta posición encaramos la tarea de selección de los contenidos y las prácticas que presentaríamos a los maestros en el trayecto de formación[8]. Hay aquí varios aspectos a considerar. Por un lado la manera de pensar el trabajo en el aula del postítulo tendría como marco de referencia la manera en que concebimos la clase de matemática en general –sus características esenciales serán desarrolladas en el siguiente punto. Por otro, había que seleccionar sectores de la matemática: objetos, propiedades, tareas, técnicas, etc. Sobre ese asunto queremos detenernos en este punto.

Fundamentamos nuestra oposición a la separación entre el "qué" y el "cómo" sosteniendo que, bajo el mismo nombre, se pueden desplegar prácticas muy distintas en relación con los objetos matemáticos, que dan lugar a aprendizajes esencialmente diferentes.

¿Cómo comprender el sentido de esta afirmación cuando se tiene naturalizado para cada contenido –como es el caso de muchos maestros– un conjunto de prácticas escolares históricamente asociadas con el mismo?

Para nosotros era imprescindible promover (alentar, sostener, generar condiciones para) un nuevo encuentro con la producción matemática que permitiera desplegar un trabajo en profundidad. Es nuestra convicción que al hacerlo se posibilita una mirada nueva sobre los "viejos" y conocidos objetos escolares como producto de nuevas relaciones construidas; nuevos vínculos entre diferentes "zonas" de la matemática que históricamente aparecen divorciadas en las prácticas escolares; la inclusión de conceptos en organizaciones teóricas más abarcativas que las conocidas hasta el momento; nuevos posibles en cuanto a las características del trabajo matemático. De este modo, a partir de una reflexión y discusión matemático-didáctica sobre los objetos de la escuela, los maestros podrían elaborar nuevos fundamentos para sus prácticas de enseñanza.

La referencia al diseño curricular por un lado y la valorización de ciertas zonas de la matemática como más potentes para permitir el despliegue de una actividad de producción rica a partir del conocimiento de una matemática elemental –como es el caso de los maestros– orientaron la selección de los contenidos a trabajar. El trabajo debía entonces constituirse en una experiencia matemática para los maestros, en un principio lejos del aula de la escuela primaria pero útil para el aula al mismo tiempo.

Las consideraciones anteriores nos llevaron a seleccionar básicamente dos núcleos de trabajo que se plasmaron en dos seminarios "matemáticos", uno de aritmética y otro de geometría[9], que fueron referencias de otros seminarios de contenido más didáctico.

Elegimos aritmética porque permite el despliegue de un trabajo intenso sin necesidad de apelar a teorías complejas. El bagaje que traían los maestros relativo a las operaciones fue un punto de apoyo fuerte para las nuevas elaboraciones que habría que producir. El seminario giró en torno de la idea de división entera y divisibilidad. Se resolvieron problemas, se formularon conjeturas, se planearon por escrito y oralmente justificaciones a lo que se formulaba, se debatió en el aula sobre resoluciones y justificaciones. Fue un trabajo intenso sin salirnos de la matemática elemental.

Si miramos en perspectiva los trayectos de trabajo efectivamente realizados, la idea de generalidad, la formulación de lo general y la conciencia de que hay maneras de justificar y asegurarse que esa generalidad enunciada es cierta fueron los grandes núcleos de aprendizaje de los maestros. Como punto de partida en las aulas aparecía una diversidad muy manifiesta en el posicionamiento de los alumnos a propósito de estas cuestiones. De a poco, muchos maestros fueron tomando conciencia de que las reglas generales, muchas de las cuales son enseñadas por ellos en sus aulas, se podían validar.

Segundo ejemplo: nuevas preguntas para viejos conocidos. Los criterios de divisibilidad, ¿por qué funcionan? ¿en qué reglas se apoya la explicación? ¿existe una explicación para esas reglas?

Un trabajo que resultó de alto impacto para muchos maestros fue el desplegado en torno de los criterios de divisibilidad. Asuntos enseñados desde siempre como reglas que "se aplican" para decidir se fueron transformando, como producto del trabajo en las clases, en enunciados cuya validez puede explicarse a través de razonamientos que se sustentan en conocimientos simples que un maestro –y también un estudiante de primaria– puede comprender. Para muchos de nuestros alumnos fue un verdadero y gratificante descubrimiento enterarse no sólo de que existía una justificación para cada criterio de divisibilidad sino también que ellos mismos las podían producir.

Reseñemos brevemente cómo llegamos a ese momento. Los primeros problemas[10] ponían en acto propiedades que luego los alumnos debían formular como conjeturas y validarlas. Por ejemplo, llegaron a formular que "si un número a es divisible por otro k, y se le suma otro número b, el resto de $a+b$ es el mismo que el de b (en la división por k)". O también que "*el resto de la suma de dos números (en la división por un tercero), se calcula como el resto de la suma de los restos*". Son reglas que seguramente los maestros usaban de manera implícita y, ahora se podían poner en palabras y se podía encontrar una explicación para justificar su validez[11].

Estas reglas sirvieron como punto de apoyo para las explicaciones que se produjeron en torno de los criterios de divisibilidad tradicionales. Pero el trabajo no se agotó allí. Hubo luego un espacio para la producción de "otros" criterios de divisibilidad, que trajo aparejada la necesidad de estudiar –en calidad de conjeturas– los producidos por los compañeros. Este trabajo permitió una reflexión de otro orden. La pregunta acerca de *qué es un criterio de divisibilidad* derivó en la noción de condición necesaria y condición suficiente. Preguntas como *¿hay alguna condición que me garantice que un número será múltiplo de 4, aunque no sea necesaria?* o *¿hay alguna condición necesaria para que un número sea múltiplo de 6, aunque no sea suficiente?* cobraron sentido y fueron estudiadas en el aula.

En un segundo momento el proceso que acabamos de describir:

- estudiar comportamientos numéricos;
- enunciar propiedades que generalizan lo estudiado;
- validar esas propiedades;
- usar las propiedades recién validadas para probar otras reglas ya conocidas que se usan para la toma de decisiones;
- enunciar y validar nuevas propiedades que permiten tomar decisiones respecto de los mismos asuntos para los cuales antes se usaban reglas *que siempre estuvieron allí*,

fue en sí mismo estudiado como ejemplo de distintas fases involucradas en la producción de conocimiento matemático.

Fue un trabajo fructífero en torno de los criterios de divisibilidad, con aprendizaje en distintos niveles y que sirvió como marco de referencia para pensar, en otro momento, la problemática didáctica de su enseñanza. Podemos afirmar que los maestros se sentían en una posición de dominio importante para encarar esta reflexión y pensar en una propuesta que incluyera su validación como asunto pertinente para sus aulas.

La clase de matemática

Concebimos el trabajo matemático en la clase (cualquiera que ella sea) como la construcción colectiva de una *cultura* que se va elaborando a medida que un grupo de alumnos y docente enfrentan problemas, conciben diferentes formas de abordarlos y discuten alrededor de las mismas, generan nuevos problemas a partir de las resoluciones planteadas, descontextualizan, generalizan y se preguntan el alcance de las relaciones producidas... Las ideas que van emergiendo son el resultado de una compleja combinación de interacciones en la que se entrelazan el trabajo personal de los alumnos con las confrontaciones colectivas –generalmente orientadas por el docente– que dan sentido al planteo de nuevas cuestiones y abren otros posibles para el trabajo matemático.

Al plantear el trabajo matemático de la clase como construcción cultural estamos considerando que los aportes de los alumnos, las ideas que proponen para abordar las cuestiones que se tratan en cada momento, son constitutivos de los objetos matemáticos que se van configurando. Es decir, las producciones de cada alumno son tenidas en cuenta no simplemente por respeto o como canal que le pueda informar al docente de posibles errores sino fundamentalmente como parte del conocimiento que va emergiendo. No son estas ideas fáciles de asumir –aceptar, comprender– ni desde la perspectiva de los alumnos ni desde la perspectiva de los docentes. ¡Comprender qué es una construcción cultural es –también– el resultado de una construcción!

En el caso del postítulo hemos elegido una vía posible para "entrarle" a la cuestión: proponer a los maestros[12] que transitaran "en tanto alumnos" una experiencia de estas características para luego conceptualizarla, contribuyendo de esta manera a que elaboraran nuevas referencias para pensar la enseñanza que ellos ejercen.

Ha llevado bastante tiempo lograr que en cada aula se conformara una verdadera comunidad de producción. Efectivamente, ni la decisión del equipo docente de encarar un trabajo de estas características, ni un discurso inicial planteando el modo de trabajo que se desplegaría, ni siquiera la mediación de los profesores alentando desde el inicio de las clases el intercambio entre los alumnos, fueron suficientes para que las ideas de unos interactuaran realmente con las de otros en el marco de las clases. Hacía falta que se comprendiera la naturaleza del trabajo matemático, comprensión que sólo podría alcanzarse participando de una práctica sostenida de éste. Recién después de haber recorrido un trayecto importante hubo condiciones para entender que al enfrentar problemas se producen ideas nuevas, que dichas ideas no son necesariamente las mismas para distintas personas, que llevan implícitas relaciones que en muchos casos hay que validar y que pueden ser objeto de intercambios generando nuevas ideas. Hacer de estos procesos del aula asunto de reflexión con los mismos maestros, objetivar las prácticas de las que ellos formaban parte, fue esencial para desnaturalizar y problematizar la enseñanza.

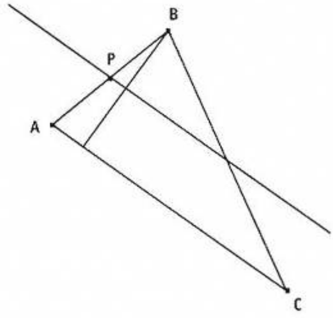
Presentaremos a continuación un ejemplo "captado" en una clase de geometría, en el que podremos analizar justamente cómo una alumna logra establecer condiciones de validez para la producción de una compañera tomando como marco la propia producción.

**Tercer ejemplo:
la comprensión de la naturaleza
del trabajo matemático
como condición de posibilidad
para una verdadera interacción**

Desde el inicio de las clases –lo hemos señalado– los docentes promovieron que se hicieran públicas las diferentes estrategias que surgían para abordar los problemas y que se discutiera sobre ellas. Los alumnos prestaban en general atención pero, les resultaba difícil entender que detrás de la idea de otro hay implicadas relaciones que pueden o no ser válidas y que justamente interactuar es *al mismo tiempo* considerar la propia producción como marco para analizar otra y descentrarse de la propia perspectiva para acceder a una nueva posibilidad. Al inicio del postítulo, la actitud más usual de los alumnos era analizar cada una de las producciones que se trataban *en sí misma*, sin pensar que debían ponerlas en relación para asegurar consistencia entre las distintas alternativas que emergían en la clase. Este era fundamentalmente un trabajo del docente, quien se ocupaba de señalar coherencias o contradicciones según el caso. O sea, el docente fue desde un inicio articulador entre las diferentes posiciones del aula y motor de la interacción entre las mismas. El ejemplo que analizaremos a continuación da cuenta de un momento en el que esta posibilidad de analizar –aceptar, rechazar, validar, comprender– lo del otro *en relación* con lo propio, es asumida por los alumnos.

Se trata de un episodio sucedido al promediar el seminario de Geometría, luego de 8 meses de curso. Se discutía en la clase sobre el siguiente problema[13]:

> *Dado un triángulo ABC, determinar P perteneciente a la recta AB de manera tal que el área de PAC sea la mitad del área del ABC.*



Gran parte de los alumnos estableció que P es el punto medio de AB proponiendo como argumento que el triángulo PAC tiene la misma altura que el triángulo ABC y que su base es la mitad. Una alumna propuso una alternativa diferente: construir la altura correspondiente a AC, considerar el punto medio de dicha altura, trazar por dicho punto una paralela a AC; el punto P es la intersección entre AB y la paralela trazada. El triángulo APC tiene la misma base que el ABC (AC) y la altura es la mitad.

Una de las autoras del primer procedimiento hace en su cuaderno un esquema a mano alzada de este segundo procedimiento, a medida que va escuchando el relato. En su esquema los dos puntos P (el del primer procedimiento y el del segundo) no coinciden, y al constatar esto dice:

- *no me cierra. Si este procedimiento fuera correcto, los dos puntos sobre AB (obtenidos en cada procedimiento) deberían coincidir.*

Esta alumna ha establecido que el punto P es único[14] y que si el segundo modo de abordar el problema fuera correcto debería ser también cierto que *la paralela a un lado por el punto medio de la altura correspondiente a ese lado corta a otro lado en la mitad*. Es un conocimiento que todavía no ha sido trabajado en clase y que para esta alumna que objeta, pareciera ser una conjetura cuya validez como propiedad general le genera mucha desconfianza. El posicionamiento de esta maestra, en el que lo del compañero se analiza con relación a lo propio, es nuevo en la clase. Efectivamente, el trabajo de la segunda alumna estaba justificado en sí mismo porque ella había conseguido un triángulo cuya altura era la mitad que la del triángulo de referencia y cuya base era igual; pero, para la alumna que lo pone en cuestión, no quedaba del todo validado cuando se ponía en relación con el primer procedimiento.

En la clase se hace explícito el enunciado de la conjetura que surge de poner en relación los dos procedimientos y, aunque no se puede abordar en ese momento –no se han tratado aún los conocimientos necesarios para demostrarlo–, sí se menciona que hay que ocuparse de la validez de una conjetura que es producto de la interacción entre diferentes producciones y se establece como tarea pendiente. El conjunto de los alumnos acepta la necesidad de demostrar esta conjetura.

El episodio da cuenta de un estado de la comunidad clase diferente del inicial. Cuando reflexionamos sobre el mismo, tomamos conciencia de que para interactuar matemáticamente con la producción de otro hace falta una comprensión de la naturaleza del trabajo matemático que se construye en la interacción con el otro. Efectivamente, asumir la coherencia entre las relaciones implicadas en dos estrategias resulta un mecanismo productor de conocimiento que sólo puede ponerse en juego desde una posición con relación a la matemática en la que la validación ocupa un plano central. Es en este punto en el que cada alumno se vuelve productor por el hecho de formar parte de una comunidad que se concibe de entrada como comunidad de producción.

Conclusiones

Las ideas que hemos expuesto dan cuenta de la complejidad que entraña llegar a constituir verdaderamente una comunidad de producción en el marco de una clase de matemática. Aunque la decisión de llevar a cabo un proyecto de enseñanza de esta naturaleza sea el punto de partida del equipo docente y aunque los alumnos acepten desde un principio el desafío que supone involucrarse en tal proyecto, hacen falta horas de vuelo para construir una práctica común –un lenguaje, unos modos de hacer, un consenso acerca de lo que es pertinente– que pueda ser objetivada y transformarse de este modo en referencia para seguir produciendo y para repensar la enseñanza.

El primer ejemplo que hemos analizado apunta a señalar que la puesta en acto de un escenario en el que la evaluación se basa en el intercambio intelectual (por contraposición al control, si se quiere), ha hecho posible discutir con los maestros ideas sobre el sentido de la enseñanza, que van más allá de una disciplina en particular. Comunicar *en acto* una concepción didáctica permite contornear sus condiciones pero sobre todo hace sentir que la misma es viable, restituyendo de este modo una confianza indispensable. La reflexión sobre el proceso de aprendizaje que transitaban los docentes se constituyó en un medio para volver a hablar sobre la escuela que anhelamos.

La cuestión de instalar a los maestros en una posición de dominio con respecto a la matemática ha sido un asunto del que quisimos ocuparnos a través del segundo ejemplo analizado.

Dominar no es sólo saber más; es fundamentalmente saber de otra manera. Se trata de que los maestros puedan revisar sus ideas acerca de la matemática y que lleguen a construir herramientas de control sobre lo que producen: sobre lo que ellos producen, sobre lo que sus colegas de curso producen en el aula del postítulo y, finalmente, sobre lo que sus alumnos construirán en la clase de matemática de la escuela.

Dominar significa poder moverse desde una idea según la cual en matemática *las cosas son* hacia un lugar de mayor capacidad de decisión que permita entender que *las cosas (las definiciones, las clasificaciones, las relaciones entre conceptos...) también podrían ser de este otro modo*. Es poder entender que el ordenamiento de la escuela con relación a la matemática es producto de las decisiones de personas y que por lo tanto, nuevos colectivos de personas en los cuales ellos están incluidos, partícipes de una sociedad que ha cambiado abruptamente en los últimos años, pueden provocar otros ordenamientos y definir otros asuntos como los relevantes para formar a un joven.

El análisis del tercer ejemplo nos hizo tomar conciencia de que los modos de interacción en una clase *evolucionan* en función del posicionamiento que tienen las personas que interactúan con relación a la matemática y con relación al valor que le atribuyen a la interacción como mecanismo de producción de nuevas ideas. La pregunta por la coherencia entre las diferentes producciones, inicialmente a cargo de los docentes, fue asumida paulatinamente por los alumnos. Es una pregunta diferente de la que se ocupa de la validez de *cada* procedimiento, que da lugar a la emergencia de nuevas propiedades. La matemática en la clase se transforma en una *materia viva* que permite y necesita de creatividad.

Para aceptar de manera *genuina* la producción de los alumnos como la materia prima del conocimiento que se está construyendo en una clase, es necesario un maestro que sea a la vez *sólido y flexible*. Pensamos el tipo de trabajo desplegado en las clases de matemática del postítulo como una experiencia válida para ayudar a construir esa solidez y esa flexibilidad.

Notas

(1) DOP (Docentes del postítulo) está integrado por: Daniel Arias, Diego Barcos, Valeria Borsani, Verónica Cambriglia, Mara Cedrón, Diana Giuliani, Gioia Guerberoff, Cecilia Lamela, Hernán Münch, Andrea Novembre, Héctor Ponce, María Emilia Quaranta, Silvia Segal, Paola Tarasow y Graciela Zilberman.

(2) Trabajo desarrollado en el marco del proyecto UBACYT X254.

(3) Este postítulo forma parte de la oferta de capacitación del Centro de Pedagogías de Anticipación (CEPA) de la secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. La primera cohorte, a la cual se refiere este artículo comenzó las clases en octubre de 2003 y las finalizó en marzo de 2005. La coordinación del postítulo estuvo a cargo de Patricia Sadovsky y Carmen Sessa. Agradecemos especialmente a Analía Segal y a Graciela Lombardi por haber impulsado la creación del postítulo y por el apoyo y sostén recibido para su implementación.

(4) Pensar un trayecto de formación para maestros nos ha generado (y nos sigue generando) múltiples interrogantes e incertidumbres. No es el objeto de este artículo discutir el trayecto de formación como tal y por eso nos restringimos solamente a señalar las principales referencias, sin dar cuenta ni del total del postítulo ni del proceso de marchas y contramarchas ocurrido hasta arribar al diseño finalmente desplegado.

(5) Hay experiencia de trabajo en la disciplina en tanto se enfrentan problemas para los cuales hay que promover ideas nuevas, hay que discutirlas con otros y validarlas siguiendo ciertas reglas matemáticas acordadas con los otros. Es un sentido del trabajo más amplio que aquel que podría asociar *hacer matemática* sólo a la actividad de formular y demostrar teoremas nuevos.

(6) La noción de qué es una actividad matemática está sustentada en una posición que es compartida con otros pero que de ninguna manera es única. Es claro que generamos condiciones para reflexionar sobre la naturaleza de la actividad matemática tal como es interpretada por nosotros.

[7] Todos los que, desde diversos lugares, aportan experiencia, estudio u opiniones sobre la "cuestión" de la formación docente.
[8] Organizar el aprendizaje de matemática de manera que resultara útil para pensar la enseñanza era una tarea relativamente nueva para nosotros. Nuestra experiencia de trabajo en formación de profesores en el ámbito de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales nos enfrenta con una realidad esencialmente diferente: nuestros alumnos –futuros profesores– llegan con aprendizajes matemáticos sólidos, y el trabajo didáctico que promovemos los lleva a una necesaria revisión de la Matemática como disciplina.
[9] No nos detendremos en este artículo a esbozar las decisiones tomadas para diseñar el Seminario de Geometría. Más adelante se analiza el tramo de una clase producida en el marco de dicho seminario y se hace una somera referencia a las características del mismo.
[10] Ver anexo sobre los primeros problemas de este seminario.
[11] Las explicaciones eran muy variadas en cuanto a la precisión y rigor que portaban. En estos primeros momentos apuntábamos a establecer una distinción entre aquellas que intentaban de algún modo coordinar distintas relaciones generales para hacer inteligible las razones por las que una propiedad es válida y aquellas que se restringían a constatar sobre ejemplos.
[12] Queda claro que en este caso los "maestros" son "alumnos".
[13] Aunque, como venimos argumentando, los contenidos tratados no dan cuenta de las prácticas desplegadas, nos vemos necesitados de explicitar que hasta el momento de plantear este problema se había trabajado sobre: circunferencia, ángulos inscriptos, suma de ángulos interiores de un polígono, construcciones con regla y compás que pusieran en juego los conceptos de bisectriz, altura y mediatriz y áreas de polígonos. El teorema de Thales fue objeto de trabajo en un momento posterior al de este problema.
[14] Tal vez apoyada en su propia estrategia, tal vez en la característica del problema que invita a considerar que una vez obtenido un punto P que cumpla lo pedido, si se lo corre sobre el lado AB, se agranda o achica el área que se obtiene.

Referencias bibliográficas

Bauersfeld, H.; Cobb, P. (1995). *The emergence of mathematical meaning:* interaction in classroom cultures. Hillsdale, New Jersey, USA,Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Becker, M.E.; Pietrocola, N.; Sánchez, C. (2001). *Aritmética*. Buenos Aires, Red Olímpica.

Brousseau, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques". *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol. 7/2, pp. 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Cobb, P. (1996). *Where is the mind?* A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives en constructivism: theory, perspectives, and practice. Columbia University, Teachers College.

Sadovsky, P. (2003). Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Tesis Doctoral. Facultad de Filosofía y Letras, UBA.

Sadovsky, P.; Sessa, C. (2005). "The didactical interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a *milieu* for the emergence of new questions". *Educational Studies in Mathematics*, vol. 59, pp. 1-3.

Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2002). Programas para primero y segundo año de las Escuelas Medias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Disponible en www.buenosaires.gov.ar/educación.

Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires (2005). Diseño curricular para la Educación Básica.

Anexo

Problema 1

En una tabla de 6 columnas e "infinitas" filas, se van ubicando consecutivamente el cero y "todos" los números naturales:

	columna del 0	*columna del 1*	*columna del 2*	*columna del 3*	*columna del 4*	*columna del 5*
fila 0	0	1	2	3	4	5
fila 1	6	7	8	9	10	11
fila 2	12	13	14	15	16	17
fila 3	18	19	20	21	22	23
fila 4	24	25	26	27	28	29
fila 5	30	31	32	33	34	35
fila 6	36	37	38	39	40	41

a) ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el 126?

b) Buscar un número mayor que 1.000 que esté en la misma columna del 130

c) ¿Qué número se encuentra en la fila 9, columna del 2?

d) ¿Qué número se encuentra en la fila 37, columna de 3?

e) ¿Dónde se encuentra el 27.643?

f) Redactar un procedimiento que usaste para ubicar el 27.643 y que sirva para ubicar cualquier otro número en la tabla. Explicar por qué el procedimiento propuesto es correcto.

g) Se va a hacer *otra tabla* con un criterio similar pero con 7 columnas. ¿En qué fila y columna estará el 126? Para esta segunda tabla, qué número se ubica en la fila 8, columna del 4?

h) Ahora se tiene *otra tabla*, de la cual se conoce una columna:

7
19
31
43

¿Se puede saber de cuántas columnas es la tabla?
¿Cómo se podría decidir si el 1147 está en esa misma columna?

i) ¿Por qué en una tabla de 10 columnas, en cada columna todos los números terminan con la misma cifra?

j) Plantear *por grupos* diferentes problemas "de tablas".

Problema 2

a) Se sabe que al dividir un número por 7, se obtiene resto 3. ¿Es posible saber el resto de dividir por 7 al doble del número?

Idem con resto 1, 2, 4, 5 y 6.

b) Habrán visto que a veces el resto del doble de un número coincide con el doble del resto del número dado y a veces no. Analicen por qué sucede esto y propongan una afirmación que sintetice el análisis realizado.

c) Si en lugar de dividir por 7, hubieras dividido por otro número, ¿seguiría siendo válida tu afirmación? ¿Cómo la modificarías?

Problema 2´

a) Analizar si la siguiente afirmación es cierta, y dar una explicación que justifique la repuesta que dan: "Si un número tiene resto 5 al dividirlo por 11, el triple de este número tendrá resto 4.

b) ¿Hay números que no son divisibles por 6, pero que al duplicarlos si resultan divisibles por 6? ¿Cuáles son todos esos números?

Problema 3

a) El resto de dividir un número **a** por 152, es 10 y el de dividir otro número **b** por 152, es 141. ¿Es posible saber el resto de dividir por 152 la suma **a + b**?

b) El resto de dividir un número **a** por 152, es 10 y el de dividir otro número **b** por 152, es 151. ¿Es posible saber el resto de dividir por 152 la suma **a + b**?

c) El resto de dividir un número **a** por 152, es 11 y el de dividir otro número **b** por 152, es 141. ¿Es posible saber el resto de dividir por 152 la suma **a + b**?

d) El resto de dividir un número **a** por 152 es 25. Si a a se le suma un número **b** que es múltiplo de 152, ¿es posible saber el resto de dividir por 152 la suma **a + b**?

e) Proponer conjeturas basadas en las relaciones producidas a partir de la resolución de todos los ítems anteriores y validarlas.

Problema 4

Al dividir un número por 128 se obtiene resto 74. Se sumó una cierta cantidad a dicho número, de modo que el resto de dividir esa suma por 128 ahora es 32. ¿Qué número se habrá agregado? Discutir la cantidad de soluciones.

Problema 5

a) ¿Es posible saber, sin hacer la cuenta, si los resultados de cada uno de los siguientes cálculos son múltiplo de 5? Dar razones que fundamenten la decisión anterior.

$5 \times 1748317 + 2$

$5 \times 1748318 + 30$

$5 \times 1748319 + 32$

$5 \times 1748320 + 132$

b) ¿Cuál es el resto de dividir cada uno de los números anteriores por 10? (Obviamente, sin hacer el cálculo)
c) ¿Es verdad que si se divide por 10 un múltiplo de 5, se obtiene siempre como resto 0 ó 5?

Problema 6

a) ¿Es cierto que el producto de cinco números consecutivos cualesquiera termina en 0? Redactar una explicación que fundamente la respuesta.
b) ¿Es cierto que el producto de tres números consecutivos cualesquiera es múltiplo de 6? Redactar una explicación que fundamente la respuesta.
c) ¿ Es cierto que el producto de cuatro números consecutivos cualesquiera es múltiplo de 16? Redactar una explicación que fundamente la respuesta.

Problema 7

a) Enunciar el criterio de divisibilidad por 4 y explicar por qué funciona.
b) Enunciar el criterio de divisibilidad por 3. Para números de 3 cifras dar una explicación de por qué funciona.
c) Enunciar el criterio de divisibilidad por 8 y explicar por qué funciona.
d) Enunciar el criterio de divisibilidad por 5 y explicar por qué funciona.
e) Inventar un criterio de divisibilidad por 16 y explicar por qué funciona.

Problema 8

A continuación presentamos cuatro criterios de divisibilidad no tradicionales. Estudiar su validez.
a) Un número de tres cifras es divisible por 6 si es divisible por 6 el número que resulta de: sumar las cifras de las centenas y de las decenas, multiplicar ese resultado por 4 y sumar a ese producto la cifra de las unidades
b) Un número de tres cifras es divisible por 7 si el doble de la cifra de las centenas, más el triple de la cifra de las decenas, más la cifra de las unidades, es múltiplo de 7.
c) Un número es divisible por 4 si la suma de sus cifras es divisible por 4.
d) Un número de tres cifras es divisible por 8 si la suma del cuádruplo de la cifra de las centenas, más el doble de la cifra de las decenas, más la cifra de las unidades, es múltiplo de 8.