

## TIPOS DE REPRESENTACIONES GRAFICAS SOBRE LA RAPIDEZ DE LA VARIACIÓN

Crisólogo Dolores Flores

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

cdolores@prodigy.net.mx

**Resumen:** En este documento se presentan resultados parciales de un proyecto que tiene el propósito de explorar qué tipos de representaciones gráficas hacen los estudiantes de enunciados verbales acerca de la rapidez de la variación. En el sistema escolar este es un concepto emerge de las ciencias naturales aunque en la vida cotidiana es ampliamente utilizado mucho antes de su enseñanza formal. Seis tipos de representaciones gráficas fueron encontradas en este trabajo, las representaciones pictográficas, gráficas de barras, las gráficas de "punto", las gráficas de "rectas", las gráficas de "curvas" y las gráficas de "flechas". Los resultados encontrados indican que los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud y no como la pendiente o cociente de magnitudes de cambios como se prevé en el currículum escolar.

**Palabras clave:** representaciones gráficas, rapidez, variación, graficas

### Introducción

La rapidez es un concepto que vive fuera de la escuela antes de que sea tratado de manera formal en las aulas escolares y forma parte de nuestras primeras percepciones acerca del movimiento. No obstante en condiciones escolares este concepto es tratado en los cursos de ciencias naturales asociado frecuentemente a la idea de velocidad, se define como el cambio de distancia entre el cambio de tiempo y su representación gráfica se asocia a la pendiente de la recta o curva que a su vez representa al movimiento en cuestión. La rapidez por tanto es un concepto variacional y su estudio tiene lugar dentro de la línea de investigación

acerca del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. En esta línea de investigación se estudian los procesos de transmisión y asimilación del conocimiento relativo a la matemática de las variables, en este proceso importan por un lado las estructuras matemáticas propias de la variación y el cambio así como los procesos cognoscitivos que se ponen en juego cuando los seres humanos interactúan con este conocimiento con el propósito de hacerlos suyos. La rapidez y la velocidad suelen ser utilizadas indistintamente, sin embargo en cinemática se establece una clara diferenciación, mientras que la velocidad es una magnitud vectorial la rapidez es una magnitud escalar. Para quedar bien definida la velocidad requiere que se señale, además de su magnitud, cuál es su dirección y su sentido, en cambio la rapidez queda determinada únicamente con la magnitud de la velocidad. En términos simbólicos la rapidez media  $r$  se define como el valor absoluto de la velocidad media  $v$ :

$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t}$  ,  $r = \left| \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t} \right|$ . Donde  $s$  y  $t$  son la distancia y el tiempo respectivamente. Por tanto la

rapidez instantánea  $r_i$  se define en términos del límite, como una derivada particular:

$$r_i = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t} \right|$$

En términos gráficos la derivada suele interpretarse como la pendiente de la curva (gráfica de la función) en cualquier punto, la rapidez instantánea siendo una derivada particular puede ser interpretada como la pendiente (con signo positivo) de la curva asociada a una función en donde la variable dependiente es la distancia y la independiente es el tiempo.

Las representaciones gráficas llamaron la atención de investigadores en el campo de la Matemática Educativa desde la década de los ochenta, cuando los procesos de visualización fueron sobreponiéndose cada vez al rigor y a la formalización en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Para estudiar estos procesos se introdujeron conceptos como visualización matemática (Zimmerman & Cunningham, 1991) y pensamiento visual (Arnheim, 1986). En especial cuando se estudian las gráficas de ellas se estudia su interpretación y su construcción. La interpretación se refiere a las habilidades necesarias

para leer una gráfica local y globalmente, y darle sentido o significado (Leinhardt *et al*, 1990). La construcción se refiere al acto de generar algo nuevo, construyendo una gráfica o trazando puntos a partir de datos, a partir de una regla funcional o a partir de una tabla. La interpretación de gráficas requiere de poner en juego la visualización, varias investigaciones han reportado las dificultades e inconsistencias que afloran cuando los estudiantes hacen lectura de gráficas, véase por ejemplo a: Brassel & Rowe, (1993); Moschkovich *et al* (1993); Yerushalmy & Shternberg (2001); Wainer, (1992); Dolores *et al* (2002), Dolores (2004).

Con el objetivo de estudiar la estabilidad o cambio de concepciones alternativas acerca de las representaciones gráficas de funciones, Mevarech & Kramarsky (1997) encontraron en estudiantes de secundaria que, al plantearles situaciones en forma verbal y traducirlas al lenguaje gráfico, las representan mediante un sólo punto, construyen varias gráficas representando cada una de ellas los datos mas relevantes, conservan la forma de función creciente a pesar de que las situaciones contenían condiciones constantes o decrecientes. En sus resultados mostraron que varios errores (por ejemplo, la idea generalizada y estereotipada de una gráfica, el uso de flechas y escalones para indicar la dirección de la covariación y el uso de líneas o curvas para unir las marcas en los ejes) desaparecieron completamente después de que los estudiantes fueron expuestos a la enseñanza formal, mientras que la gráfica como un punto, la serie de gráficas, y la conservación de la forma creciente fueron resistentes de cambiar bajo la enseñanza tradicional. En esta misma dirección en Dolores y Valero (2004) pero con estudiantes universitarios indican que las concepciones alternativas que destacaron por su estabilidad son la consideración de que una función es positiva y creciente si, además de cumplir con estas dos condiciones posee abscisas positivas y la que consiste en considerar que la derivada de una función en un punto es igual a la ordenada de ese punto. En Dolores (1998) se había percibido la asociación de equivalencia entre la ordenada y la velocidad al interpretar estudiantes de bachillerato una gráfica que representaba la caída libre de cuerpos, incluso en Dolores *et al*

(2002) se reporta la asociación que estudiantes de bachillerato hacen de la trayectoria física de un cuerpo con la propia gráfica cartesiana considerándolas como equivalentes.

Como se puede apreciar, las interpretaciones que hacen los estudiantes de las gráficas tienen sus propias complicaciones, la graficación que se espera (la que se acepta en matemáticas) no necesariamente es la que comparten los estudiantes, inclusive varias de concepciones acerca de las graficas son resistentes al cambio conceptual bajo la enseñanza formal. Las investigaciones también reportan la consideración por parte de los estudiantes de bachillerato e incluso los principiantes universitarios, de que en una gráfica cartesiana la ordenada representa la velocidad de un cuerpo para el caso de la caída libre de los cuerpos. Estos resultados nos inducen a plantear una pregunta central, ¿Qué tipo de representaciones gráficas viven en la escuela asociadas a la rapidez de la variación? Las representaciones que se han encontrado en las investigaciones descritas fueron producto principalmente de la lectura e interpretación, suponemos que otras se pueden encontrar si se plantean actividades a los estudiantes en las que ellos sean quienes construyen la gráficas a partir de ciertas situaciones de variación. El conocimiento de estas representaciones puede contribuir al desarrollo de la visualización matemática, del pensamiento visual y del pensamiento y lenguaje variacional, tan precariamente desarrollados en la escuela.

## Elementos Teóricos

Desde el primer tercio del siglo pasado Vigotsky (1996) había dejado en claro que los procesos del conocimiento son mediatizados por el lenguaje. Los objetos matemáticos tienen naturaleza ideal y no son perceptibles de manera inmediata, nos son asequibles a través de sus mediadores. Un enunciado verbal, una gráfica, una fórmula matemática, un dibujo, una sucesión numérica, etc., son mediadores a través de los cuales los objetos matemáticos nos son asequibles. Sobre la base de los mediadores del conocimiento Duval (1998) plantea el concepto de registro de representación semiótica. Para que un sistema semiótico sea un registro de representación semiótica debe permitir tres actividades

cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis: la formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. En la primera se caracteriza la representación de un registro dado: enunciación de una frase (comprendible en una lengua natural dada), composición de un texto, dibujo de una figura geométrica, elaboración de un esquema, escritura de una fórmula, esta formación implica una selección de rasgos y de datos del contenido por representar. El tratamiento consiste transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. La conversión se define como la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Este trabajo se fundamenta en la idea de registro de representación semiótica para caracterizar a las representaciones gráficas, además se utiliza la idea de conversión para analizar las formas en que los estudiantes transitan de una representación verbal (escrita) a una representación gráfica, centrando la atención en la naturaleza de estas últimas. En razón de esto en el cuestionario de exploración se plantean cuatro situaciones de variación (en lenguaje verbal escrito) en los cuales está involucrada la rapidez de la variación y se pide a los estudiantes una representación gráfica acerca de esos enunciados verbales. Nos interesa principalmente conocer qué representaciones gráficas presentan los estudiantes sobre la rapidez de la variación, incidiendo en aquellos que ya han estudiado la graficación de manera formal y en aquellos que aún no lo hacen. Estos resultados podrían contribuir a dar explicaciones acerca del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, en particular respecto de uno de sus conceptos principales como lo es la rapidez de la variación.

## Metodología

**Participantes.** Participaron 95 estudiantes del tercer año de bachillerato (12avo. grado de escolaridad) y que estudiaban en dos de las principales escuelas del nivel medio superior del centro del Estado de Guerrero, Méx. Su edad promedio era de 17 años y estaban estudiando el último semestre del bachillerato con orientación hacia el área humanístico social. Fueron elegidas escuelas del centro del estado por encontrarse en mejores

condiciones tanto académicas como de infraestructura educativa en relación con las del resto del estado.

**Instrumentos.** A los estudiantes se les pidió que elaboraran una representación sobre cuatro situaciones de variación a saber:

1. Desde una misma posición de una pista olímpica, inician su carrera los atletas A y B. Después de un tiempo determinado el atleta A alcanza una rapidez de 2m/s y el atleta B de 5 m/s. Así se mantiene durante una vuelta entera a la pista. Represente esta situación gráficamente.
2. Una niña crece más rápidamente que un niño durante cierto tiempo. Después la rapidez de crecimiento se invierte, es decir, el niño crece más rápido que la niña, en un periodo subsiguiente. Dibuje una gráfica que represente tal situación.
3. Un automóvil parte del reposo y alcanza una rapidez de 100 km/h en 20 segundos. Haga una representación gráfica de esta situación.
4. Dos recipientes que contienen igual cantidad de agua y aceite respectivamente, se calientan por un periodo determinado de tiempo hasta alcanzar su punto de ebullición. El agua hirvió más rápidamente que el aceite. Construye la o las gráficas que representen esta descripción.

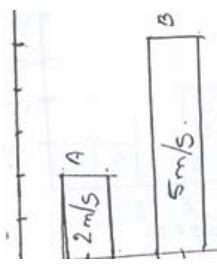
A los estudiantes se les proporcionaron cuatro hojas blancas de tamaño carta para que registrasen sus actividades, se les planteó que podían realizar las actividades solicitadas a pulso, sin usar una regla o auxiliarse de alguna calculadora. La fase de validación del instrumento fue calificada, basada en un estudio piloto y en entrevista con estudiantes del bachillerato ajenos a la investigación. El estudio piloto indicó que los estudiantes se mostraron interesados en las tareas y no tuvieron dificultades en comprender las situaciones planteadas.

**Análisis de las respuestas.** Los datos del presente estudio fueron analizados independientemente por dos investigadores en matemática educativa. El proceso de

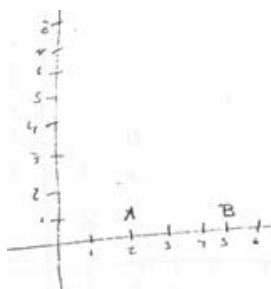
análisis involucró los siguientes pasos: a) examinar cada gráfica para describirlas y compararlas y detectar tipos. b) Clasificar las gráficas en categorías o tipos en función de características comunes, y c) Intercambiar clasificaciones para lograr consensos entre los investigadores.

## Resultados

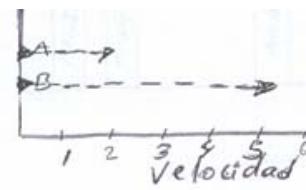
A continuación se presentan algunas gráficas representativas obtenidas al aplicar el instrumento de exploración. Las representaciones gráficas que los estudiantes presentaron respecto de la primera situación, en la que los atletas A y B recorren la pista olímpica, destacan las siguientes:



Gráfica 1



Gráfica 2

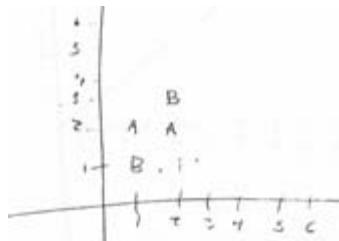


Gráfica 3

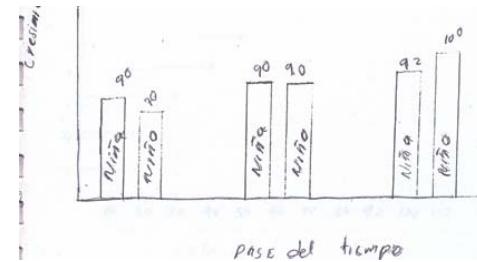
Las representaciones que los estudiantes elaboraron respecto de la situación 2, en donde las niñas crecen más rápido que los niños, se presentaron gráficas como las siguientes:



Gráfica 4

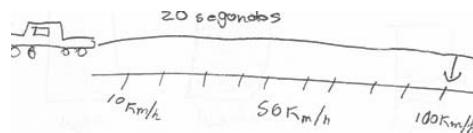


Gráfica 5

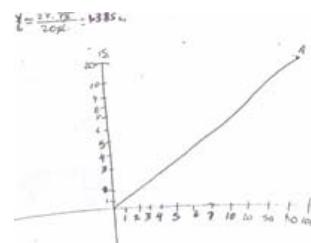


Gráfica 6

Representaciones gráficas obtenidas de la situación 3, relativas al automóvil.

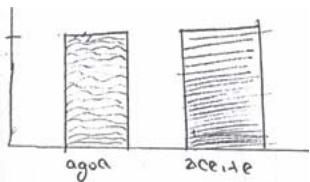


Gráfica 7

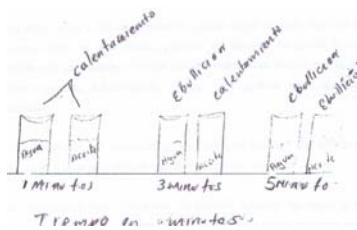


Gráfica 8

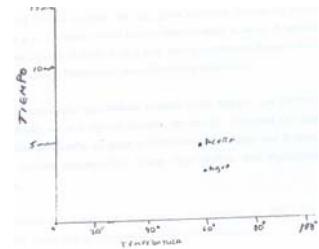
Representaciones gráficas del calentamiento del agua y el aceite presentadas por los estudiantes.



Gráfica 9

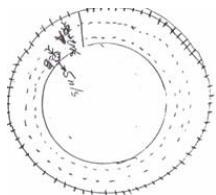


Gráfica 10



Gráfica 11

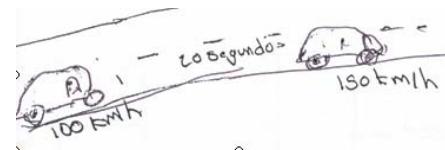
Una vez analizado cada gráfica presentadas por los estudiantes se clasificaron en función de sus características comunes, resultando seis tipos de representaciones gráficas: representaciones pictóricas, gráficas de "barras", gráficas de "punto", gráficas de "curvas", gráficas de "rectas" y gráfica de "flechas". A continuación se muestran algunas representativas de cada tipo.



Gráfica 12

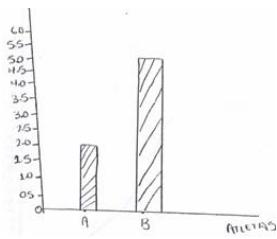


Gráfica 13

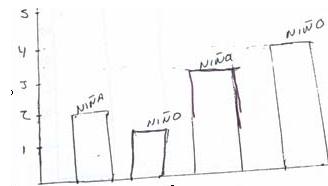


Gráfica 14

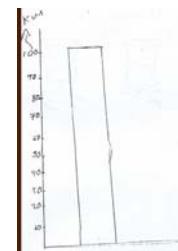
Representaciones pictóricas sobre la rapidez de la variación



Gráfica 15

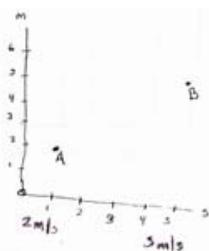


Gráfica 16

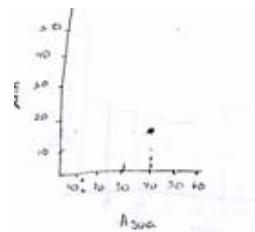


Gráfica 17

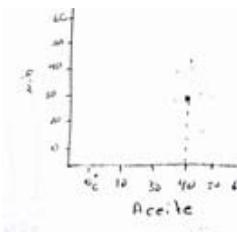
Gráficas de “barras” utilizadas para representar rapidez de la variación



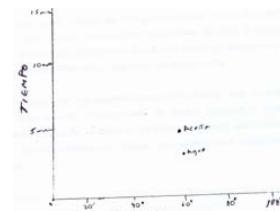
Gráfica 18



Gráfica 19

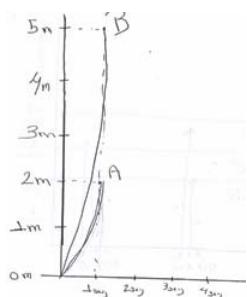


Gráfica 20



Gráfica 21

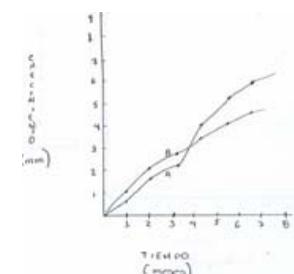
Gráficas de “punto” asociadas a la rapidez de la variación



Gráfica 22

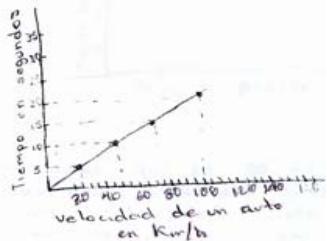


Gráfica 23

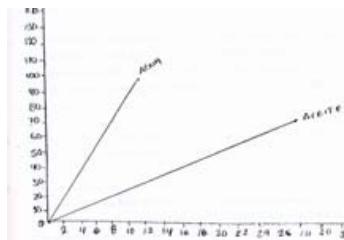


Gráfica 24

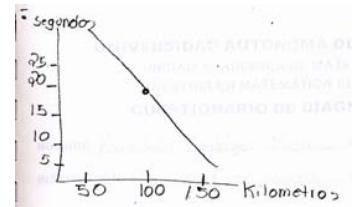
Gráficas de “curvas” asociadas a la rapidez de la variación



Gráfica 25

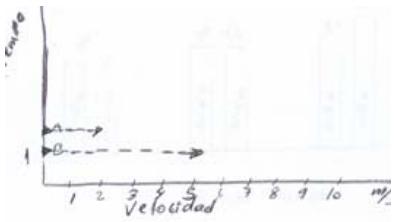


Gráfica 26

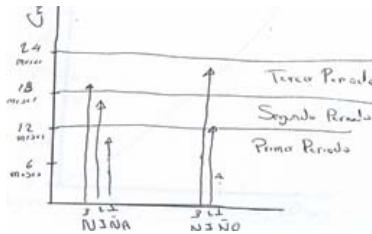


Gráfica 27

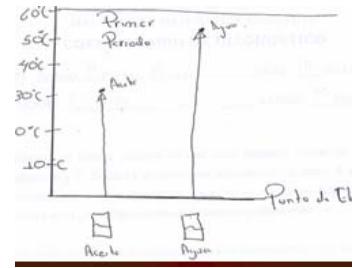
Graficas de “rectas” asociadas a la rapidez de la variación



Gráfica 28



Gráfica 29



Gráfica 30

Graficas de “flechas” presentadas para representar rapidez de la variación

## Discusión

Las representaciones gráficas presentadas por los estudiantes al traducir las situaciones de variación propuestas no son tábula rasa, sin embargo se notan al menos seis tipos de representaciones gráficas dibujadas. Las asociadas a dibujos o pictogramas intentan describir o traducir con dibujos la situación planteada. En el caso de los corredores dibujan la pista olímpica y los supuestos corredores etiquetando la rapidez que cada uno lleva, de manera análoga lo hacen para el resto de situaciones. Las representaciones pictóricas presentadas indican que a la mayor rapidez se la asocia, para el caso de los corredores o el de los niños, con “muñequitos” más grandes al de mayor rapidez, sugiriendo que la rapidez está asociada a la magnitud del dibujo. Las gráficas tipo “barras” sugieren algo parecido al

notado en los pictogramas, una barra más grande para el de mayor rapidez y una más chica para la de menor rapidez, es notorio que para representar la situación del automóvil que alcanza 100km/h en 20 segundos algunos estudiantes la asociaron con una barra cuya magnitud es de 100km. Las gráficas de “puntos” tienen una connotación también similar, el punto más alto representa la mayor rapidez y el más bajo al de menor rapidez. Las gráficas de “curvas” y las de “rectas” se acercan más a las representaciones aceptables en la escuela, las segundas fueron utilizadas estableciendo las diferencias entre su pendientes: la gráfica del calentamiento del agua tiene mayor pendiente que la gráfica del calentamiento del aceite; para el caso de las primeras fueron utilizadas quizá recuperando las continuidad de los movimientos representados, en algunos casos se utilizaron para comparar crecimientos. En las gráficas de “flechas” se percibe la intención de representar el sentido de la rapidez y su magnitud. En términos de frecuencias los resultados preliminares arrojados por este estudio se muestran en la siguiente tabla.

ESTUDIANTES DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

SITUACIÓN VARIACIONAL	TIPOS DE REPRESENTACIONES SOBRE LA RAPIDEZ DE LA VARIACIÓN					
	Dibujo pictograma	Barras	Punto	Curvas	Rectas	Flechas
1. Dos corredores...	4	7	4	0	0	3
2. Crecimiento de niños...	4	10	3	2	0	0
3. Rapidez de un automóvil...	5	3	7	0	4	0
4. Calentamiento de agua y aceite...	7	8	2	1	1	0
FRECUENCIAS	20	28	16	3	5	3

Las gráficas de “barras” fueron las mayoritariamente utilizadas por los bachilleres para representar la rapidez de la variación, eso representa casi un tercio de los estudiantes cuestionados. Casi una quinta parte presentó pictogramas para representar la rapidez de la variación y una sexta parte utilizó la gráficas de “punto” para representar esta idea. Una

cantidad muy reducida utilizó las rectas o las curvas (8.42%) para representar la rapidez, incluso en este tipo de gráficas se encuentran las que desde el punto de vista matemático son aceptables. En cuanto al tipo de representaciones gráficas estos resultados son congruentes con los encontrados por Mevarech y Kramarsky (1997), aunque ellas lo exploraron con estudiantes de secundaria y aquí con estudiantes de bachillerato, además en el presente trabajo se buscan representaciones de rapidez y aquél concepciones alternativas. En síntesis los resultados encontrados indican que los estudiantes dan representaciones gráficas de la rapidez asociándola con su magnitud y no como la pendiente o cociente de magnitudes de los cambios como se prevé en el currículum matemático escolar. De manera similar como lo señala Dolores (1998) cuando notó que la velocidad es considerada como equivalente  $s(t_0)$  y no como la pendiente de la curva en  $t_0$ . Estos son resultados parciales de un estudio más amplio que involucra a estudiantes de secundaria y a estudiantes universitarios.

## Bibliografía

- Arnheim, R. (1986). *El pensamiento visual*. Editorial Paidós, Buenos Aires, Arg.
- Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes en sus cursos de cálculo. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272). México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica
- Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3 (5), 225-250.
- Dolores, C. y Valero, M. S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. *Epsilon* 58, 20 (1), 45-73.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* 60, 1- 64.

- Mevarech, Z. & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: stability and change in students' alternative conceptions, *Educational Studies in Mathematics* 32, pp. 229–263.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. & Arcabi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of lineal relations, and connecting among them. En T. Romberg, E. Fennema & T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69 –100). Hillsdale, N.J., USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher*, Vol. 21, pp.14 – 23.
- Yerushalmy, M., Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. En *The Roles of Representation in School Mathematics*, Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 251 – 268
- Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. Ediciones Quinto Sol. México D. F.
- Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.